คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ร่วมกับ สถาบันพัฒนาครู คณาจารย์และบุคลากรทางการศึกษา (สคบศ.) ดำเนินการพัฒนาชุดการอบรมครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี ระดับประถมศึกษาถึงระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ตามโครงการพัฒนาชุดการอบรมครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี ระดับประถมศึกษาถึงระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่เน้นกระบวนการคิดวิเคราะห์แก้ปัญหา โดยเริ่มโครงการระหว่างปีงบประมาณ 2555 – 2557

เพื่อให้การอบรมรมครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่ดำเนินตามนโยบาย เป้าหมาย และวัตถุประสงค์ สสวท. จึงได้จัดทำชุดการอบรมครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่ จำนวน 13 ชุด ได้แก่ (1) วิชาวิทยาศาสตร์ประถมศึกษา (2) วิชาวิทยาศาสตร์มัธยมศึกษาตอนต้น (3) วิชาเคมีมัธยมศึกษาตอนปลาย (4) วิชาชีววิทยามัธยมศึกษาตอนปลาย (5) วิชาฟิสิกส์มัธยมศึกษาตอนปลาย (6) วิชาโลก ดาราศาสตร์และอวกาศมัธยมศึกษาตอนปลาย (7) วิชาคณิตศาสตร์ประถมศึกษาตอนต้น (8) วิชาคณิตศาสตร์ประถมศึกษาตอนปลาย (9) วิชาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษาตอนต้น (10) วิชาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษาตอนปลาย (11) วิชาเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสารประถมศึกษา (12) วิชาเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสารมัธยมศึกษาตอนต้น (13) วิชาเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสารมัธยมศึกษาตอนปลาย แต่ละชุดประกอบด้วย แผนการอบรม เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม เอกสารสำหรับวิทยากร และสื่อประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เพื่อมอบให้กับสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาและหน่วยงานที่มีส่วนเกี่ยวข้องดำเนินการอบรมครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่ในสังกัดต่อไป

สสวท. ขอขอบพระคุณคณะผู้เชี่ยวชาญ คุณครู และคณะกรรมการ ทุกท่าน ที่ให้ความร่วมมือในการพัฒนาหลักสูตร และจัดทำเอกสาร หวังเป็นอย่างยิ่งว่า เอกสารเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้เกี่ยวข้องทุกฝ่าย หากมีข้อเสนอแนะโปรดแจ้งแก่ คณะทำงานโครงการพัฒนาชุดการอบรมครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่ สสวท. ทราบด้วย จักขอบคุณยิ่ง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

กันยายน 2557

สารบัญ

	หน้า
หน่วยการเรียนรู้ที่ 6 การออกแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้	**1**
เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต	**3**
แผนการอบรม	5
เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม	19
เอกสารสำหรับวิทยากร	39
เรื่อง พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม	**57**
แผนการอบรม	59
เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม	79
เอกสารสำหรับวิทยากร	97
เรื่อง การพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	**115**
แผนการอบรม	117
เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม	125
เอกสารสำหรับวิทยากร	135
เรื่อง โครงงานคณิตศาสตร์	**145**
แผนการอบรม	147
เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม	157
เอกสารสำหรับวิทยากร	195

หน่วยการเรียนรู้ที่ 6

การออกแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต

แผนการอบรม

แผนการอบรมครูคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น สำหรับครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่

เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต

เวลา 3 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์ เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรม

1. ได้รับความรู้ ความเข้าใจ ในเรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต
2. สามารถออกแบบและจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ในเรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต

สาระการเรียนรู้

1. การเลื่อนขนาน
2. การสะท้อน
3. การหมุน

สาระสำคัญ

1. การเลื่อนขนานบนระนาบเป็นการเลื่อนจุดทุกจุดของรูปที่กำหนดไปบนระนาบตามแนวเส้นตรงในทิศทางเดียวกัน และเป็นระยะเท่ากันตามที่กำหนด เรียกทิศทางและระยะที่กำหนดว่า เวกเตอร์ของการเลื่อนขนาน เรียกรูปที่กำหนดให้ว่ารูปต้นแบบ และเรียกรูปที่ได้จากการเลื่อนขนานว่าภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน
2. รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน จะเท่ากันทุกประการ
3. ส่วนของเส้นตรงบนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานของส่วนของเส้นตรงนั้นจะขนานกัน
4. กำหนดจุด P และเส้นตรง λ บนระนาบจะมีภาพที่ได้จากการสะท้อนเป็นจุด P' โดยมี λ เป็นเส้นสะท้อน
   1) ถ้าจุด P ไม่อยู่บนเส้นตรง λ แล้วเส้นตรง λ จะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{PP'}$
   2) ถ้าจุด P อยู่บนเส้นตรง λ แล้วจุด P และจุด P' เป็นจุดเดียวกัน
5. สมบัติของการสะท้อน
   1) รูปต้นแบบที่ได้จากการสะท้อน สามารถทับกันได้สนิทโดยต้องพลิกรูปหรือกล่าวว่า รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการสะท้อนเท่ากันทุกประการ

2) ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดแต่ละจุดบนรูปต้นแบบ กับจุดที่สมนัยกันบนภาพที่ได้จากการสะท้อนจะขนานกัน

6. เมื่อลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดบนรูปต้นแบบกับจุดที่สมนัยกันบนภาพที่ได้จากการสะท้อน จะได้ว่าส่วนของเส้นตรงนี้ตั้งฉากกับเส้นสะท้อน และระยะห่างระหว่างจุดบนภาพที่ได้จากการสะท้อนกับเส้นสะท้อนจะเท่ากับระยะห่างระหว่างจุดนั้นบนรูปต้นแบบกับเส้นสะท้อน
7. การสร้างเส้นสะท้อนทำได้โดยลากเส้นตรงผ่านจุดกึ่งกลางและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมต่อระหว่างจุดบนรูปต้นแบบและจุดบนภาพที่ได้จากการสะท้อนจุด
8. การหมุนบนระนาบเป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่มีจุด O ที่ตรึงจุดหนึ่งเป็น**จุดหมุน**แต่ละจุด P บนระนาบ มีจุด P' เป็นภาพที่ได้จากการหมุนจุด P รอบจุด O ตามทิศทางที่กำหนดด้วยมุมที่มีขนาด k โดยที่
   1) ถ้าจุด P ไม่ใช้จุด O แล้ว $OP = OP'$ และขนาดของ $P\hat{O}P'$ เท่ากับ k
   2) ถ้าจุด P เป็นจุดเดียวกันกับจุด O แล้ว จุด P และ P' เป็นจุดเดียวกัน
9. ความหมายและสมบัติของการหมุน
   1) รูปต้นแบบหรือภาพที่ได้จากการหมุนจะเท่ากันทุกประการ
   2) จุดบนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการหมุนจุดนั้นแต่ละคู่จะอยู่บนวงกลมเดียวกันและมีจุดหมุนเป็นจุดศูนย์กลาง แต่วงกลมเหล่านี้ไม่จำเป็นต้องมีรัศมีเท่ากัน
10. เมื่อมีภาพที่เกิดจากการหมุนรูปต้นแบบ ถ้าเส้นตรงสองเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดที่สมนัยกัน 2 คู่ จุดตัดของเส้นตรงทั้งสองนั้นจะเป็นจุดหมุน

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน/ยาก

นักเรียนเข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับความหมายของคำศัพท์ต่าง ๆ ในเรื่องการแปลงทางเรขาคณิต ซึ่งมีคำศัพท์ใหม่จำนวนมาก เช่น รูปต้นแบบ ภาพ การเลื่อนขนาน เวกเตอร์ การสะท้อน เส้นสะท้อน การหมุน จุดหมุน ซึ่งครูอาจแก้ไขโดยการให้ความหมายและยกตัวอย่างพร้อมทบทวนให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดให้ครอบคลุม

สื่อและแหล่งการเรียนรู้

1. สำหรับผู้เข้ารับการอบรม

1.1 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1 : ใบกิจกรรม 1

1.2 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 2 : ใบกิจกรรม 2 เรื่อง “พิกัดและภาพ”

1.3 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 3 : ใบกิจกรรม 3 เรื่อง “เลื่อนไปเลื่อนมา”

1.4 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 4 : ใบกิจกรรม 4 เรื่อง “การหาพื้นที่”

1.5 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 5 : ใบกิจกรรม 5 เรื่อง “ภาพสะท้อน”

1.6 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 6 : ใบกิจกรรม 6 เรื่อง “เส้นสะท้อนอยู่ไหน”

1.7 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 7 : ใบกิจกรรม 7 เรื่อง “สะท้อนมาประกบกัน”

1.8 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 8 : ใบกิจกรรม 8 เรื่อง “ตั้งฉากกันไหม”

1.9 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 9 : ใบกิจกรรม 9 เรื่อง “จุดหมุนอยู่ไหน”

1.10 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 10 : ใบกิจกรรม 10 เรื่อง “แปลงแบบใด”

2. สำหรับวิทยากร

2.1 เอกสารสำหรับวิทยากร 1 : เฉลยใบกิจกรรม 1

2.2 เอกสารสำหรับวิทยากร 2 : เฉลยใบกิจกรรม 3 เรื่อง “เลื่อนไปเลื่อนมา”

2.3 เอกสารสำหรับวิทยากร 3 : เฉลยใบกิจกรรม 4 เรื่อง “การหาพื้นที่”

2.4 เอกสารสำหรับวิทยากร 4 : เฉลยใบกิจกรรม 5 เรื่อง “ภาพสะท้อน”

2.5 เอกสารสำหรับวิทยากร 5 : เฉลยใบกิจกรรม 6 เรื่อง “เส้นสะท้อนอยู่ไหน”

2.6 เอกสารสำหรับวิทยากร 6 : เฉลยใบกิจกรรม 7 เรื่อง “สะท้อนมาประกบกัน”

2.7 เอกสารสำหรับวิทยากร 7 : เฉลยใบกิจกรรม 8 เรื่อง “ตั้งฉากกันไหม”

2.8 เอกสารสำหรับวิทยากร 8 : เฉลยใบกิจกรรม 9 เรื่อง “จุดหมุนอยู่ไหน”

2.9 เอกสารสำหรับวิทยากร 9 : เฉลยใบกิจกรรม 10 เรื่อง “แปลงแบบใด”

2.10 เอกสารสำหรับวิทยากร 10 : แบบกรอกคะแนน เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต

การประเมินผล

รายการประเมิน	**เกณฑ์การให้คะแนน (คะแนนเต็ม 11 คะแนน)**	**เครื่องมือ**
1. การมีส่วนร่วมในกิจกรรม พิจารณาจาก เข้าร่วมกิจกรรม	**คะแนนเต็ม 3 คะแนน โดย** ได้ 3 คะแนน เมื่อเข้าร่วมกิจกรรมครบทุกกิจกรรมย่อยและมีส่วนร่วมในการแสดงความคิดเห็นในกิจกรรม ได้ 2 คะแนน เมื่อเข้าร่วมกิจกรรมครบทุกกิจกรรมย่อย	- แบบสังเกตการมีส่วนร่วมในกิจกรรม

รายการประเมิน	**เกณฑ์การให้คะแนน (คะแนนเต็ม 11 คะแนน)**	**เครื่องมือ**
	ได้ 1 คะแนน เมื่อเข้าร่วมกิจกรรมไม่ครบทุกกิจกรรมย่อย ได้ 0 คะแนน ไม่เข้าร่วมกิจกรรมย่อย	
2. ชิ้นงาน พิจารณาจาก ปฏิบัติและส่งใบกิจกรรม 1-10	**คะแนนเต็ม 1 คะแนน โดย** ได้ 1 คะแนน เมื่อปฏิบัติงานและส่งใบกิจกรรมครบ 10 ใบกิจกรรม ได้ 0 คะแนน เมื่อปฏิบัติงานและส่งใบกิจกรรมน้อยกว่า 10 ใบกิจกรรม	- แบบบันทึกการส่งใบกิจกรรม 1-10
3. การนำเสนอผลงาน พิจารณาจาก ข้อ 3.1 -3.3 ดังนี้ 3.1. เป็นตัวแทนนำเสนอผลงานเดี่ยวหรือกลุ่มของใบกิจกรรม 1-10 3.2. เป็นผู้อภิปรายหรือแสดงความคิดเห็นต่อการนำเสนอผลงานเดี่ยว หรือกลุ่มของตนเองหรือกลุ่มอื่นของใบกิจกรรม 1-10 3.3. เข้าร่วมรับฟังการนำเสนอผลงานของใบกิจกรรม 1-10	**คะแนนเต็ม 5 คะแนน โดย** ได้ 5 คะแนน เมื่อปฏิบัติครบ 3 ข้อ ได้ 4 คะแนน เมื่อปฏิบัติ 2 ข้อ ได้ 3 คะแนน เมื่อปฏิบัติ 1 ข้อ ได้ 0 คะแนน เมื่อไม่ปฏิบัติทั้ง 3 ข้อ	- แบบประเมินการนำเสนอผลงาน
4. สรุปองค์ความรู้ พิจารณาจาก ข้อ 4.1 - 4.2 ดังนี้ 4.1. ได้สะท้อนผลการเรียนรู้หรือแลกเปลี่ยนเรียนรู้ในการปฏิบัติใบกิจกรรม 10 4.2. ส่งใบกิจกรรม 10 และปฏิบัติครบทุกประเด็นคำถามในใบกิจกรรม 10	**คะแนนเต็ม 2 คะแนน โดย** ได้ 2 คะแนน เมื่อปฏิบัติครบ 2 ข้อ ได้ 1 คะแนน เมื่อปฏิบัติ 1 ข้อ ได้ 0 คะแนน เมื่อไม่ปฏิบัติทั้ง 2 ข้อ	- ใบกิจกรรมที่ 10

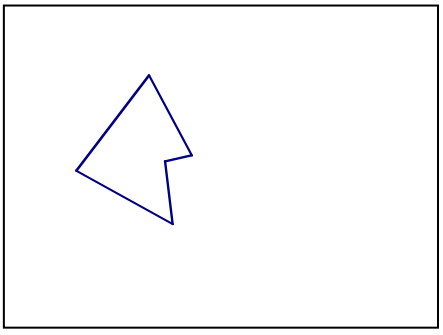
แนวทางปฏิบัติสำหรับวิทยากร

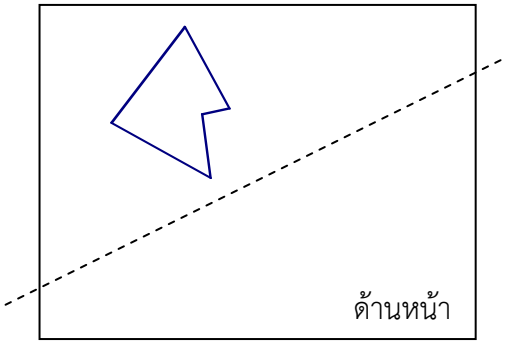
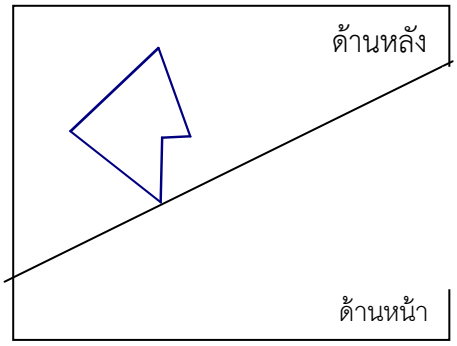
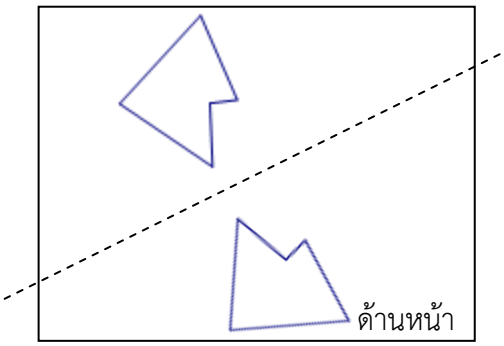
1. ศึกษาเอกสารสำหรับวิทยากรและเอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรมทุกเอกสารในเรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต
2. ทำสำเนาเอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1-10 ตามจำนวนผู้เข้ารับการอบรม
3. แจ้งให้ผู้เข้ารับการอบรมทราบเกี่ยวกับจุดประสงค์ในการอบรมและการประเมินผล (ตัวชี้วัดและเกณฑ์การให้คะแนน) ในช่วงเริ่มต้นของการอบรม
4. ให้ผู้เข้ารับการอบรมบอกชื่อและเลขที่ของตนเองทุกครั้งก่อนนำเสนอผลงานหรืออภิปรายแสดงความคิดเห็น เพื่อความสะดวกของวิทยากรในการให้คะแนนและประเมินผล
5. ดำเนินการจัดการอบรมตามแนวทางการจัดกิจกรรม พร้อมทั้งประเมินผลผู้เข้ารับการอบรมตามรายการประเมินและเครื่องมือที่กำหนด แล้วกรอกคะแนนสรุปลงในเอกสารสำหรับวิทยากร 10: แบบกรอกคะแนนเรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต

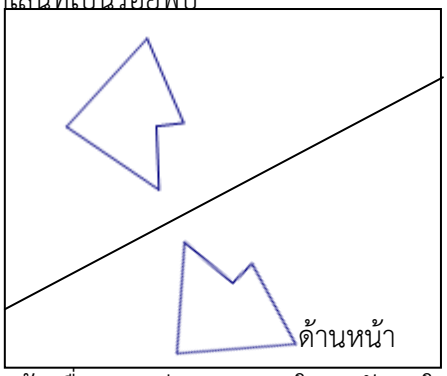
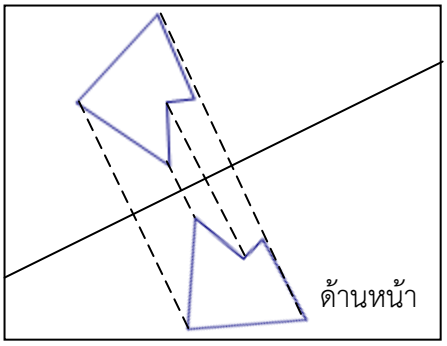
แนวทางการจัดกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/เอกสาร	วัดและประเมินผล
1. การสร้างองค์ความรู้ (2 ชั่วโมง 30 นาที) 1.1 การเลื่อนขนาน (50 นาที) 1.1.1 ขั้นนำสู่เนื้อหา (10 นาที) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมทำใบกิจกรรมที่ 1 เพื่อจำแนกลักษณะการย้ายวัตถุจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่ง โดยจับคู่กันเพื่อทำกิจกรรมกับเพื่อนประมาณ 5 นาที วิทยากรควรเดินสังเกตการทำกิจกรรมของผู้เข้าอบรม ฟังการสนทนาของผู้เข้าอบรม เข้าไปช่วยเหลือเมื่อผู้เข้าอบรมเกิดข้อสงสัย นอกจากนี้วิทยากรควรกระตุ้นให้ผู้เข้าอบรมตั้งคำถามและช่วยเหลือคนอื่น ๆ เมื่อผู้เข้าอบรมทำกิจกรรมเสร็จแล้ว วิทยากรควรให้ผู้เข้าอบรมอภิปรายคำตอบของผู้เข้าอบรม <u>แนวคำถามสำหรับวิทยากร</u> - จัดรูปออกเป็นกี่กลุ่ม เพราะเหตุใดจึงจัดกลุ่มเช่นนี้ ครูควรชี้ให้ผู้เข้าอบรมเห็นถึงลักษณะการเคลื่อนย้ายวัตถุของรูปในแต่ละกลุ่ม ดังต่อไปนี้ กลุ่มที่ 1 เป็นกลุ่มรูปที่แสดงการเคลื่อนย้าย	ใบกิจกรรม 1-11	- การสังเกตการถามตอบ - การทำกิจกรรม - การตรวจจากการทำใบกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/เอกสาร	วัดและประเมินผล
วัตถุในแนวเส้นตรง กลุ่มที่ 2 เป็นกลุ่มรูปที่แสดงการสะท้อน กลุ่มที่ 3 เป็นกลุ่มรูปที่แสดงการหมุนวัตถุ (ถ้าผู้เข้าอบรมแบ่งกลุ่มรูปแตกต่างไปจากนี้ วิทยากรควรชี้แนะผู้เข้าอบรมให้สังเกตลักษณะของการย้ายวัตถุ) วิทยากรอธิบายว่า รูปที่เห็นเป็นตัวอย่างของการย้ายวัตถุในแบบต่าง ๆ หากเราพิจารณารูปเรขาคณิต 2 มิติ การเคลื่อนย้ายของรูปเรขาคณิตในลักษณะเดียวกับกลุ่มที่ 1 เรียกว่า การเลื่อนขนาน การเคลื่อนย้ายของรูปเรขาคณิตในลักษณะเดียวกับกลุ่มที่ 2 เรียกว่า การสะท้อน และการเคลื่อนย้ายของรูปเรขาคณิตในลักษณะเดียวกับกลุ่มที่ 3 เรียกว่า การหมุน ซึ่งการเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุนของรูปเรขาคณิต เรียกว่า การแปลงทางเรขาคณิต และเรียกรูปก่อนการแปลงว่า รูปต้นแบบ และเรียกรูปหลังการแปลงว่า ภาพ วิทยากรให้ผู้เข้าอบรมสังเกตรูปในใบกิจกรรมที่ 1 อภิปรายรูปร่างและขนาดของรูปต้นแบบและภาพที่ได้จาก การแปลง แล้วสรุปว่า การเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุน จะได้ภาพที่มีรูปร่างเหมือนกันและขนาดเดียวกันกับรูปต้นแบบเสมอ 1.1.2 ขั้นสอนและปฏิบัติการ (40 นาที) 1) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมทำใบกิจกรรมที่ 2 “พิกัดและภาพ” กิจกรรมนี้มีจุดประสงค์เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรมบอกความหมายและสมบัติของการเลื่อนขนาน โดยให้จับคู่กันทำกิจกรรม หรือวิทยากรอาจจะให้ผู้เข้าอบรมสืบเสาะสมบัติของการเลื่อนขนานโดยใช้โปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เมื่อทำกิจกรรมแล้วสามารถสรุปความหมายของการเลื่อนขนานดังนี้ - รูปต้นแบบกับภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานสามารถทับ		

กิจกรรม	สื่อ/เอกสาร	วัดและประเมินผล
กันได้สนิท โดยไม่ต้องพลิกรูป หรือกล่าวว่ารูปต้นแบบกับภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานจะเท่ากันทุกประการ - ถ้ามีส่วนของเส้นตรงบนรูปต้นแบบ แล้วส่วนของเส้นตรงและภาพของส่วนของเส้นตรงที่ได้จากการเลื่อนขนานส่วนของเส้นตรงนั้น จะขนานกัน - การเลื่อนขนานบนระนาบเป็นการเลื่อนจุดทุกจุดของรูปที่กำหนดไปบนระนาบตามแนวเส้นตรงในทิศทางเดียวกัน และเป็นระยะเท่ากันตามที่กำหนด เรียกทิศทางและระยะที่กำหนดว่า เวกเตอร์ของการเลื่อนขนาน เรียกรูปที่กำหนดให้ว่ารูปต้นแบบ และเรียกรูปที่ได้จากการเลื่อนขนานว่าภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน 2) วิทยากรให้ผู้เข้าอบรมทำใบกิจกรรม 3 “เลื่อนไปเลื่อนมา” เพื่อให้สามารถสร้างภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนาน เมื่อกำหนดรูปต้นแบบ และเวกเตอร์ของการเลื่อนขนานได้ โดยให้ผู้เข้าอบรมจับคู่ทำกิจกรรม วิทยากรและผู้เข้าอบรมร่วมกันอภิปรายและสรุปหลังจากเสร็จสิ้นการทำกิจกรรมแต่ละข้อ 3) วิทยากรให้ผู้เข้าอบรมทำใบกิจกรรมที่ 4 “การหาพื้นที่” เป็นการบ้าน เพื่อให้สามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับการเลื่อนขนานแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับพื้นที่ของรูปเรขาคณิตสองมิติ 1.2 การสะท้อน (50 นาที) 1.2.1 ขั้นนำสู่เนื้อหา (10 นาที) 1) วิทยากรแจกกระดาษลอกลายให้ผู้เข้าอบรม 2) ให้วาดรูปเรขาคณิตไว้ทางด้านซ้ายของกระดาษลอกลาย เช่น 		

กิจกรรม	สื่อ/เอกสาร	วัดและประเมินผล
3) ให้พับกระดาษลอกลายเป็นแนวเส้นตรงที่ใดก็ได้ แต่ไม่ให้รอยพับทับกับรูปที่วาดไว้  4) ให้ลอกลายภาพที่ได้อีกด้านหนึ่งของกระดาษลอกลาย (ด้านหลัง)  5) ให้คลี่กระดาษลอกลายออก แล้ววาดรูปจากภาพที่อยู่ด้านหลังไว้ด้านหน้า  		

กิจกรรม	สื่อ/เอกสาร	วัดและประเมินผล
6) ให้ลากเส้นที่เป็นรอยพับ  7) ให้ลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดทุกจุดในรูปกับจุดในภาพที่เกิดขึ้น  เมื่อทำกิจกรรมเสร็จแล้ว วิทยากรอธิบายว่า ผู้เข้าอบรมเพิ่งจะวาดภาพที่เกิดจากการสะท้อน พร้อมกันนี้ควรแนะนำคำศัพท์ที่ใช้เรียกส่วนต่าง ๆ ได้แก่ - ภาพแรกที่เราวาดลงไปบนกระดาษ เรียกว่า รูปต้นแบบ - ภาพใหม่ที่ได้หลังจากการพับกระดาษและลอกลาย เรียกว่า ภาพที่ได้จากการสะท้อน - เส้นที่ลากตามรอยพับในกระดาษ เรียกว่า เส้นสะท้อน หรือวิทยากรอาจจะให้ผู้เข้าอบรมสืบเสาะสมบัติของการสะท้อนโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad 1.2.2 ขั้นสอนและปฏิบัติการ (40 นาที) 1) วิทยากรให้ผู้เข้าอบรมทำใบกิจกรรมที่ 5 "ภาพสะท้อน" (30 นาที) เพื่อให้สามารถ - หาภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปต้นแบบได้		

กิจกรรม	สื่อ/เอกสาร	วัดและประเมินผล
- บอกพิกัดของจุดบนภาพที่ได้จากการสะท้อนของรูปต้นแบบที่กำหนดให้ได้ โดยให้ผู้เข้าอบรมแต่ละคู่ช่วยกันหาภาพและพิกัดของจุดบนภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปต้นแบบ เมื่อทำกิจกรรมนี้แล้วผู้เข้าอบรมควรสรุปได้ว่า - ถ้าเส้นสะท้อน คือ แกน Y และอยู่ด้านขวาของรูปต้นแบบแล้ว พิกัด x ของจุดบนภาพเท่ากับพิกัด x ของจุดบนรูปต้นแบบบวกกับสองเท่าของระยะห่างระหว่างจุดบนรูปต้นแบบกับเส้นสะท้อน และพิกัด y ของจุดบนรูปต้นแบบและจุดบนภาพจะเท่ากัน - ถ้าเส้นสะท้อน คือ แกน Y และอยู่ด้านซ้ายของรูปต้นแบบแล้ว พิกัด x ของจุดบนภาพเท่ากับพิกัด x ของจุดบนรูปต้นแบบลบกับสองเท่าของระยะห่างระหว่างจุดบนรูปต้นแบบกับเส้นสะท้อน และพิกัด y ของจุดบนรูปต้นแบบและจุดบนภาพจะเท่ากัน - ถ้าเส้นสะท้อน คือ แกน X และอยู่ด้านล่างของรูปต้นแบบแล้ว พิกัด y ของจุดบนภาพเท่ากับพิกัด y ของจุดบนรูปต้นแบบลบกับสองเท่าของระยะห่างระหว่างจุดบนรูปต้นแบบกับเส้นสะท้อน และพิกัด x ของจุดรูปต้นแบบและจุดบนภาพจะเท่ากัน - ถ้าเส้นสะท้อนคือแกน X และอยู่ด้านบนของรูปต้นแบบแล้ว พิกัด y ของจุดบนภาพเท่ากับพิกัด y ของจุดบนรูปต้นแบบบวกกับสองเท่าของระยะห่างระหว่างจุดบนรูปต้นแบบกับเส้นสะท้อน และพิกัด x ของจุดบนรูปต้นแบบและจุดบนภาพจะเท่ากัน 2) วิทยากรให้ผู้เข้าอบรมทำใบกิจกรรมที่ 6 “เส้นสะท้อนอยู่ไหน” (10 นาที) เพื่อให้สามารถหาเส้นสะท้อนเมื่อกำหนดรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการสะท้อนให้ได้ โดยให้ทำกิจกรรมเป็นคู่และแลกเปลี่ยนความคิดเห็นระหว่างกัน 3) วิทยากรให้ผู้เข้าอบรมทำใบกิจกรรมที่ 7 “สะท้อนมาประกบกัน” เพื่อให้สามารถนำความรู้เกี่ยวกับ การสะท้อนไปใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับพื้นที่ของรูปเรขาคณิตสองมิติได้ เป็นการบ้าน 1.3 การหมุน (60 นาที) 1) วิทยากรให้ผู้เข้าอบรมทำใบกิจกรรมที่ 8 “ตั้งฉากกันไหม”		

กิจกรรม	สื่อ/เอกสาร	วัดและประเมินผล
เพื่อให้สำรวจความสัมพันธ์ระหว่างเส้นตรงที่ลากผ่านจุดหมุนและแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดที่สมนัยกันระหว่างรูปต้นแบบ กับภาพที่เกิดจากการหมุน โดยให้จับคู่กันทำกิจกรรมหรือวิทยากรอาจจะให้ผู้เข้าอบรมสืบเสาะสมบัติของการหมุนโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad 2) วิทยากรให้ผู้เข้าอบรมทำใบกิจกรรมที่ 9 "จุดหมุนอยู่ไหน" เพื่อให้สามารถหาจุดหมุน ขนาดของมุมที่ใช้ในการหมุน และทิศทางการหมุนเมื่อกำหนดรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการหมุนให้ 1.4 การประยุกต์ (20 นาที) วิทยากรให้ผู้เข้าอบรมทำใบกิจกรรมที่ 10 "แปลงแบบใด" เพื่อให้สามารถ - หาภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุนรูปต้นแบบที่กำหนดให้ได้ - อธิบายความเหมือนและความแตกต่างของการแปลงทางเรขาคณิตแต่ละแบบได้		

เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม

ใบกิจกรรม 1

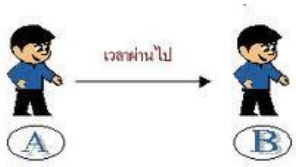
ให้แบ่งรูปภาพออกเป็นกลุ่มตามลักษณะของการย้ายวัตถุจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่ง



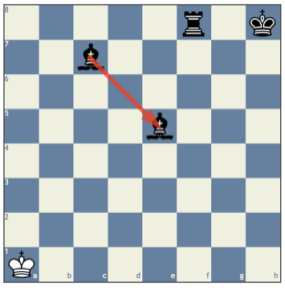
A



B



C



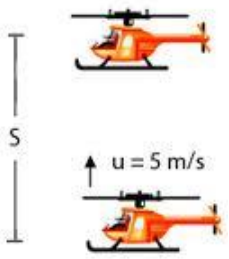
D



E



F



G



H



I



J



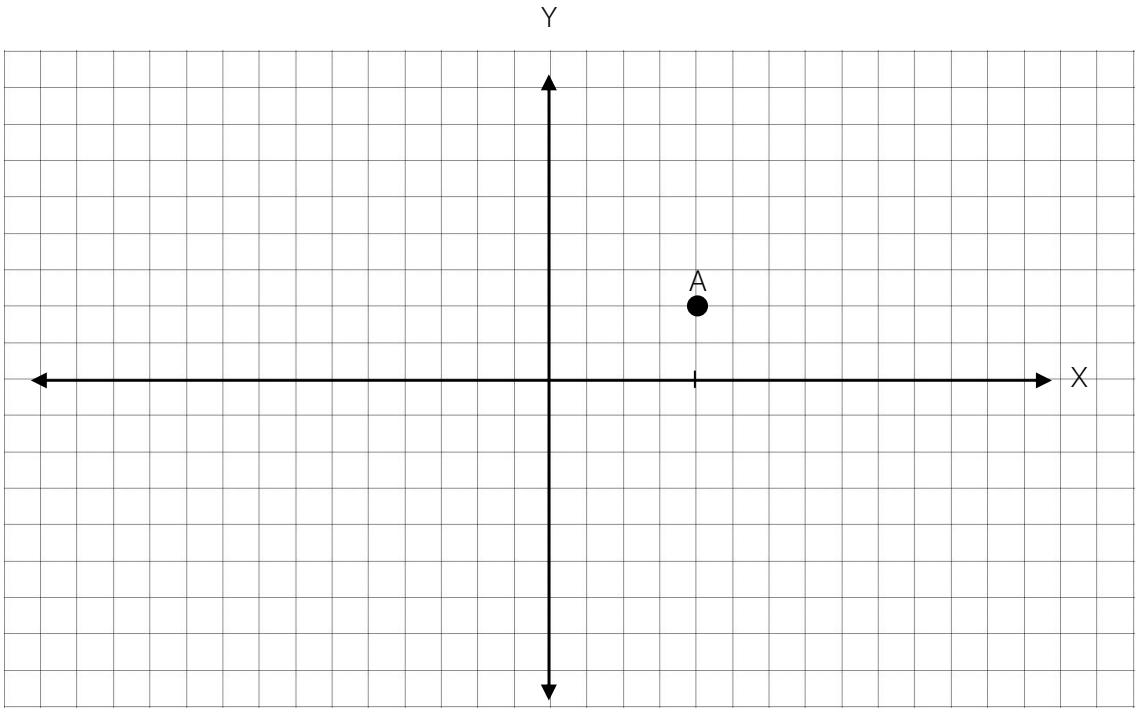
K



L

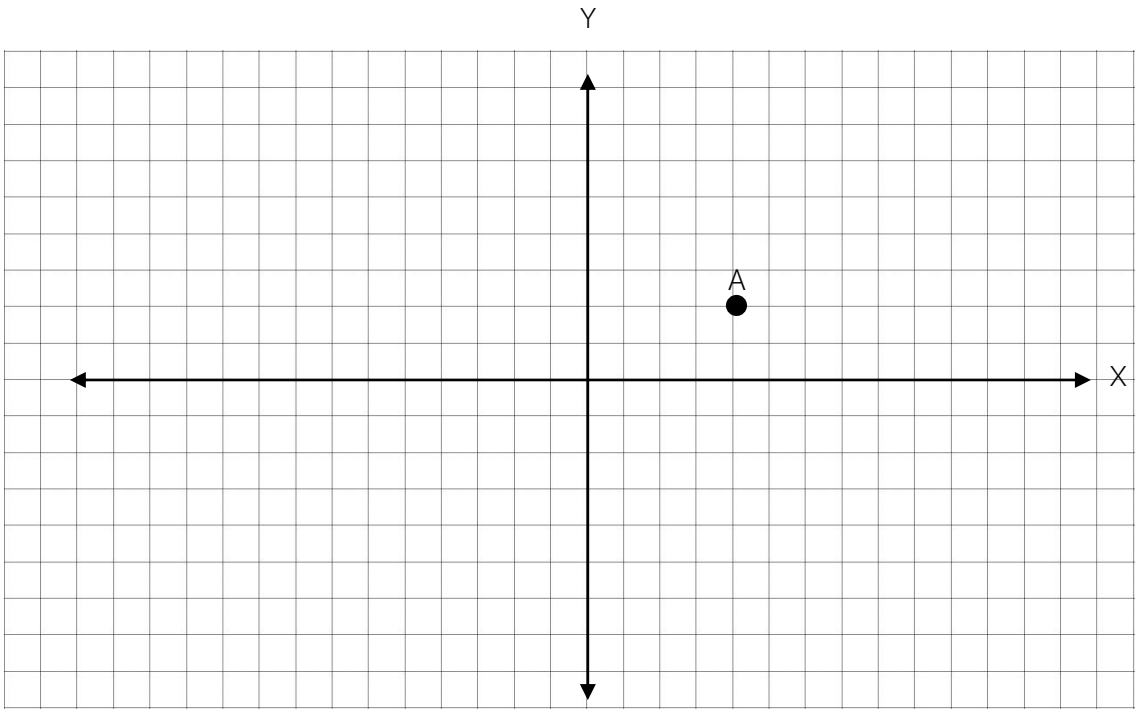
ใบกิจกรรม 2 “พิกัดและภาพ”

1. กำหนดให้จุด A เป็นรูปต้นแบบ ให้สร้างจุด A' ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน โดยสามารถกำหนดจุด A' ให้เคลื่อนที่ตามแนวขนานกับแกน X แล้วตอบคำถามต่อไปนี้



คำถาม	คำตอบ
พิกัดของจุด A	
ระยะระหว่างจุด A กับจุด A'	
พิกัดของจุด A'	
อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดของจุด A พิกัดของจุด A'	

2. กำหนดให้จุด A เป็นรูปต้นแบบ ให้สร้างจุด A' ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน โดยสามารถกำหนดจุด A' ให้เคลื่อนที่ตามแนวขนานกับแกน Y แล้วตอบคำถามต่อไปนี้



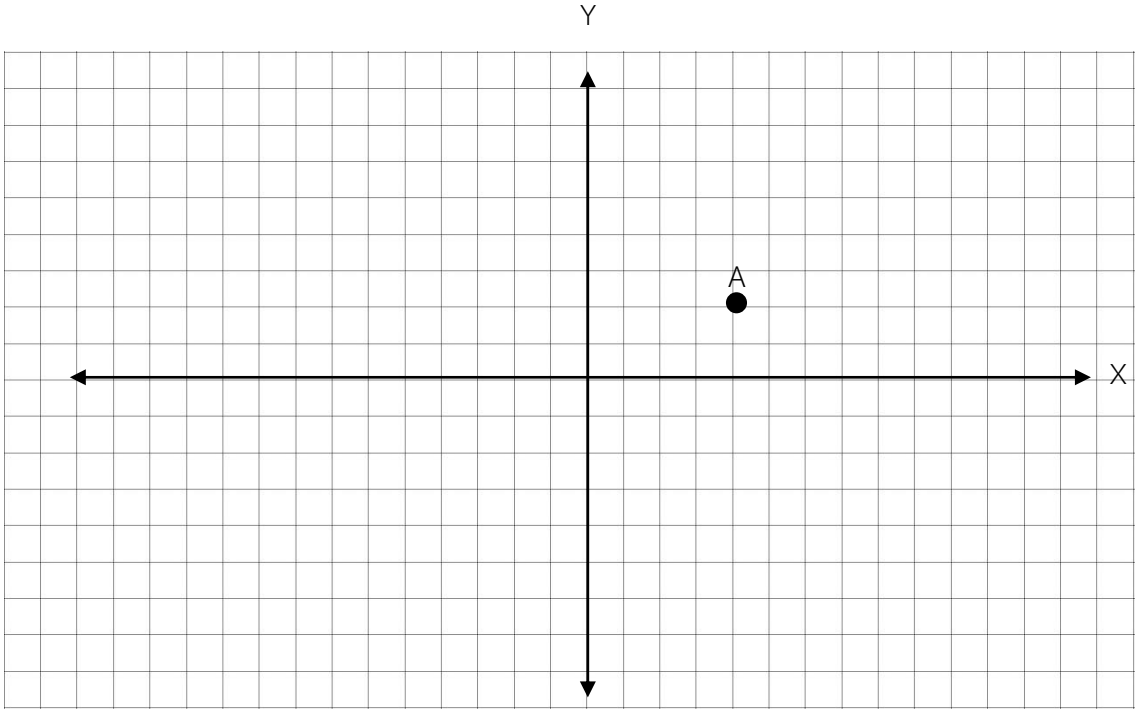
คำถาม	**คำตอบ**
พิกัดของจุด A	
ระยะระหว่างจุด A กับจุด A'	
พิกัดของจุด A'	
อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดของจุด A พิกัดของจุด A'	

ข้อสังเกต .....

.....

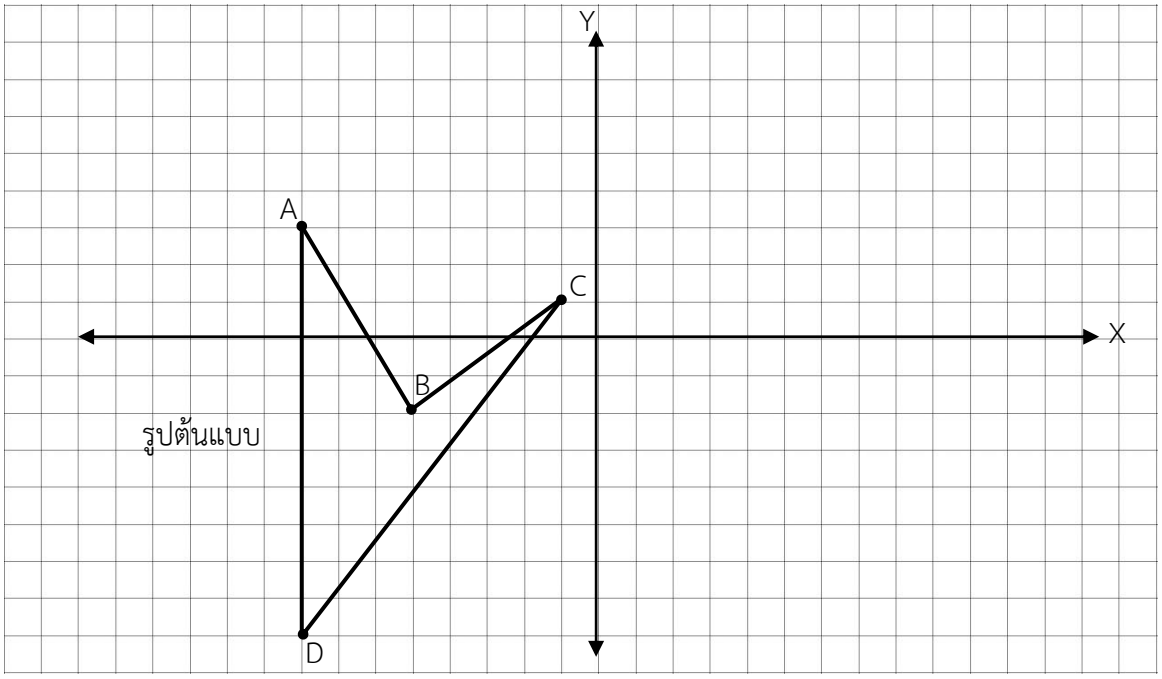
.....

3. กำหนดให้จุด A เป็นรูปต้นแบบ ให้สร้างจุด A' ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน โดยสามารถกำหนดจุด A' เป็นพิกัดใดก็ได้บนระนาบในระบบพิกัดฉาก แล้วตอบคำถามต่อไปนี้



คำถาม	**คำตอบ**
พิกัดของจุด A	
ระยะระหว่างจุด A กับจุด A' ตามแนวขนานกับแกน X	
ระยะระหว่างจุด A กับจุด A' ตามแนวขนานกับแกน Y	
พิกัดของจุด A'	
อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดของจุด A พิกัดของจุด A' กับระยะตามแนวขนานกับแกน X	
อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดของจุด A พิกัดของจุด A' กับระยะตามแนวขนานกับแกน Y	

4. กำหนดให้รูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปต้นแบบ ให้สร้างรูปสี่เหลี่ยม $A'B'C'D'$ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน โดยสามารถกำหนดพิกัดของรูปสี่เหลี่ยม $A'B'C'D'$ เป็นพิกัดใดก็ได้บนระนาบในระบบพิกัดฉาก แล้วตอบคำถามต่อไปนี้



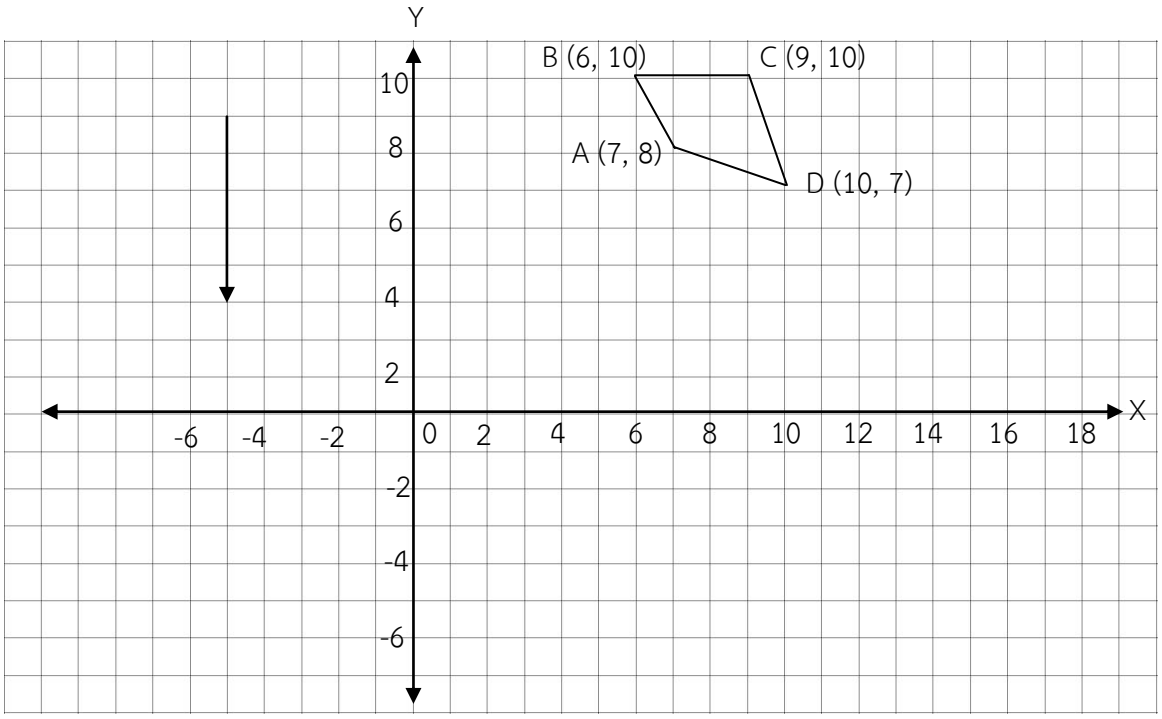
คำถาม	**คำตอบ**
พิกัดของจุด A	
ระยะระหว่างจุด A กับจุด A' ตามแนวขนานกับแกน X	
ระยะระหว่างจุด A กับจุด A' ตามแนวขนานกับแกน Y	
พิกัดของจุด A'	
พิกัดของจุด B	
ระยะระหว่างจุด B กับจุด B' ตามแนวขนานกับแกน X	
ระยะระหว่างจุด B กับจุด B' ตามแนวขนานกับแกน Y	
พิกัดของจุด B'	

พิกัดของจุด C	
ระยะระหว่างจุด C กับจุด C' ตามแนวขนานกับแกน X	
ระยะระหว่างจุด C กับจุด C' ตามแนวขนานกับแกน Y	
พิกัดของจุด C'	
พิกัดของจุด D	
ระยะระหว่างจุด D กับจุด D' ตามแนวขนานกับแกน X	
ระยะระหว่างจุด D กับจุด D' ตามแนวขนานกับแกน Y	
พิกัดของจุด D'	
อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดของรูปสี่เหลี่ยม ABCD และพิกัดของรูปสี่เหลี่ยม $A'B'C'D'$ กับระยะตามแนวขนานกับแกน Y	

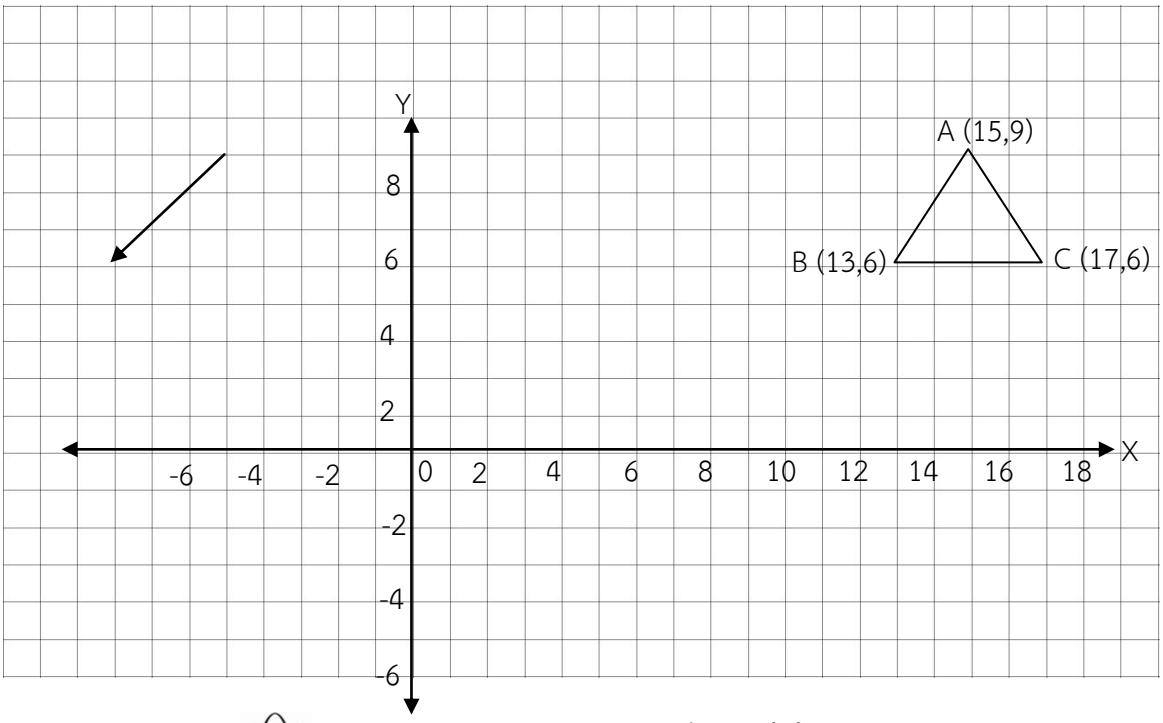
ใบกิจกรรม 3 “เลื่อนไปเลื่อนมา”

ให้สร้างภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานรูปต้นแบบ พร้อมทั้งหาพิกัดของภาพ เมื่อกำหนดเวกเตอร์ของการเลื่อนขนาน

1

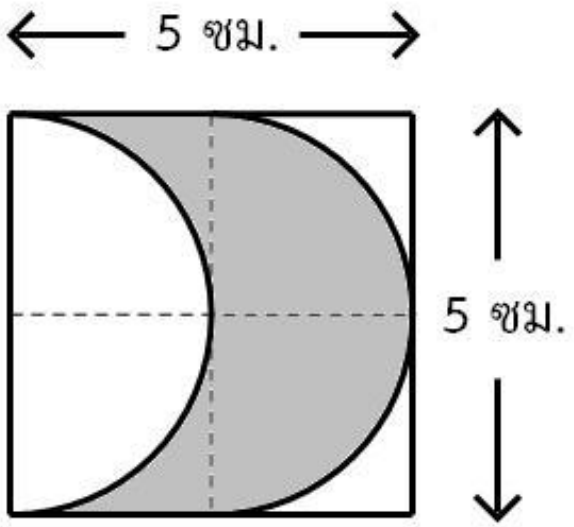


2

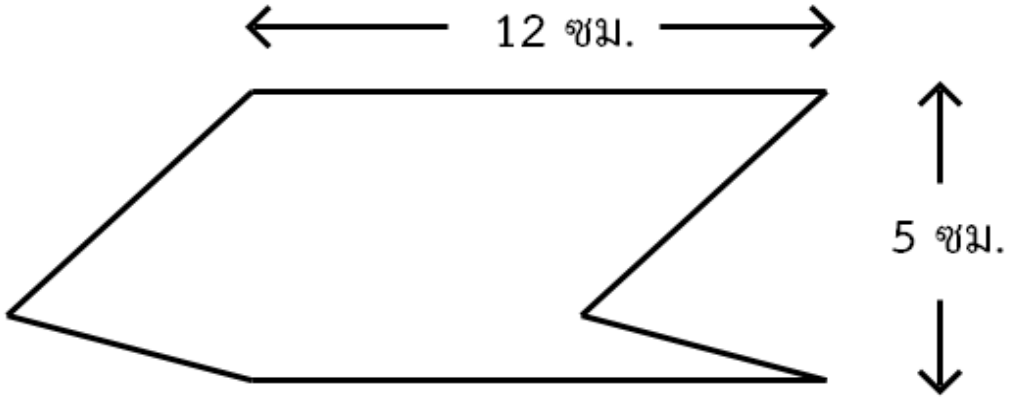


ใบกิจกรรม 4 “การหาพื้นที่”

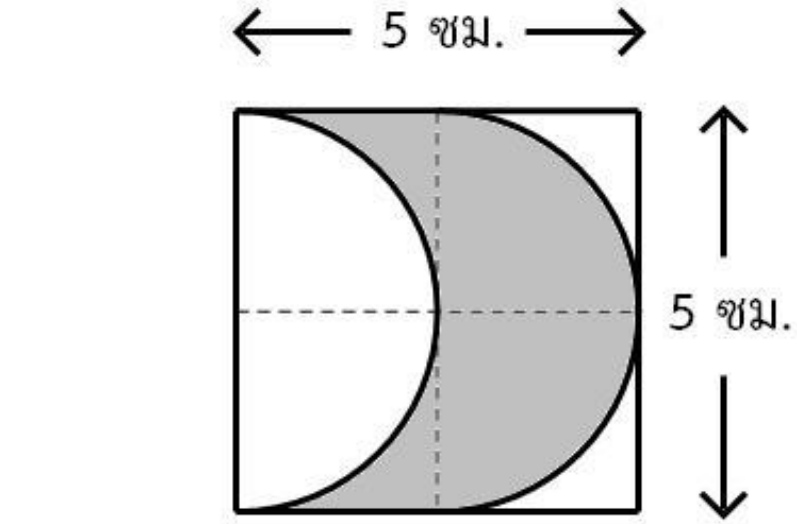
1. จงใช้การเลื่อนขนานหาพื้นที่โดยประมาณของส่วนที่แรเงา พร้อมอธิบายวิธีการหาพื้นที่และวาดภาพประกอบ

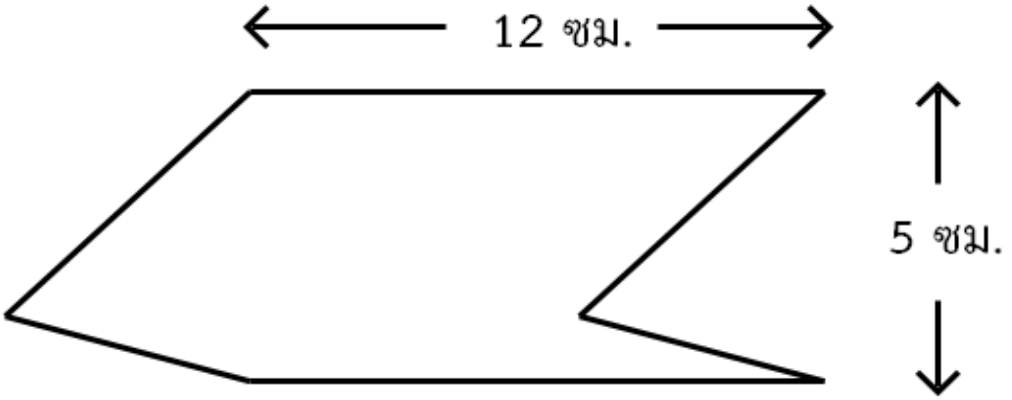


2. จงใช้การเลื่อนขนานหาพื้นที่โดยประมาณของรูปที่กำหนดให้ พร้อมอธิบายวิธีการหาพื้นที่และวาดภาพประกอบ



รูปที่สามารถตัดได้จริง

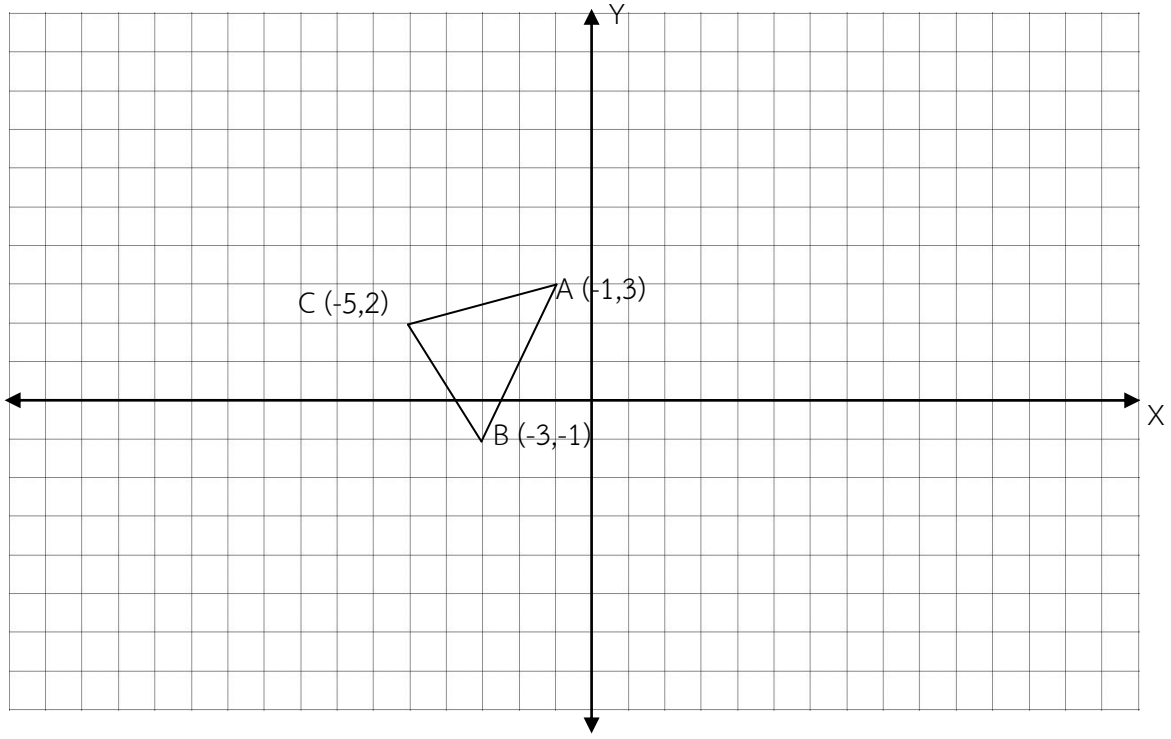




ใบกิจกรรม 5 “ภาพสะท้อน”

ให้หาภาพและพิกัดของภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปต้นแบบที่กำหนดให้

1. ให้แกน Y เป็นเส้นสะท้อน



ระยะห่างระหว่างจุด A กับเส้นสะท้อนเท่ากับ ..... หน่วย

ระยะระหว่างจุด A กับจุด A′ เท่ากับ.....หน่วย ดังนั้นพิกัดของจุด A′ คือ .....

ระยะห่างระหว่างจุด B กับเส้นสะท้อนเท่ากับ ..... หน่วย

ระยะระหว่างจุด B กับจุด B′ เท่ากับ.....หน่วย ดังนั้นพิกัดของจุด B′ คือ.....

ระยะห่างระหว่างจุด C กับเส้นสะท้อนเท่ากับ ..... หน่วย

ระยะระหว่างจุด C กับจุด C′ เท่ากับ.....หน่วย ดังนั้นพิกัดของจุด C′ คือ.....

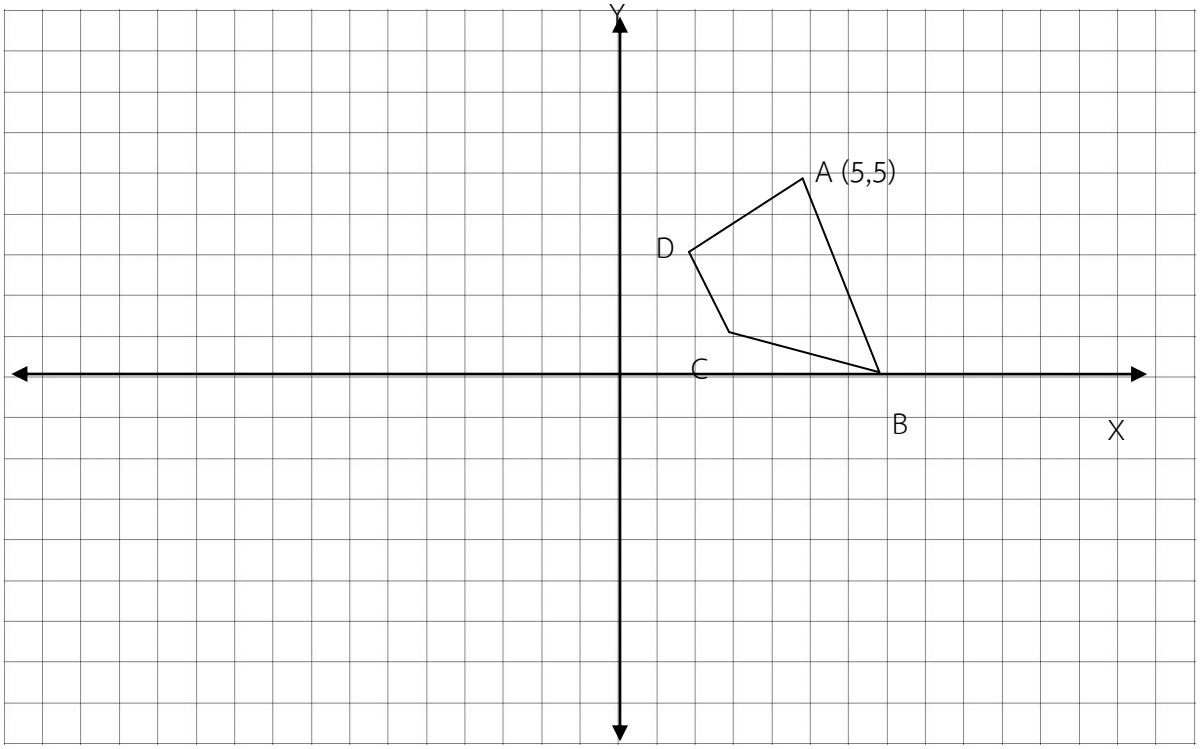
ความสัมพันธ์ของพิกัดของจุดบนรูปต้นแบบกับพิกัดของจุดบนภาพที่ได้จากการสะท้อน

.....

.....

.....

2. ให้แกน X เป็นเส้นสะท้อน



ระยะห่างระหว่างจุด A กับเส้นสะท้อนเท่ากับ ..... หน่วย

ระยะระหว่างจุด A กับจุด A′ เท่ากับ.....หน่วย ดังนั้นพิกัดของจุด A′ คือ .....

ระยะห่างระหว่างจด B กับเส้นสะท้อนเท่ากับ ..... หน่วย

ระยะระหว่างจุด B กับจุด B′ เท่ากับ.....หน่วย ดังนั้นพิกัดของจุด B′ คือ.....

ระยะห่างระหว่างจุด C กับเส้นสะท้อนเท่ากับ ..... หน่วย

ระยะระหว่างจุด C กับจุด C′ เท่ากับ.....หน่วย ดังนั้นพิกัดของจุด C′ คือ.....

ระยะห่างระหว่างจุด D กับเส้นสะท้อนเท่ากับ ..... หน่วย

ระยะระหว่างจุด D กับจุด D′ เท่ากับ.....หน่วย ดังนั้นพิกัดของจุด D′ คือ.....

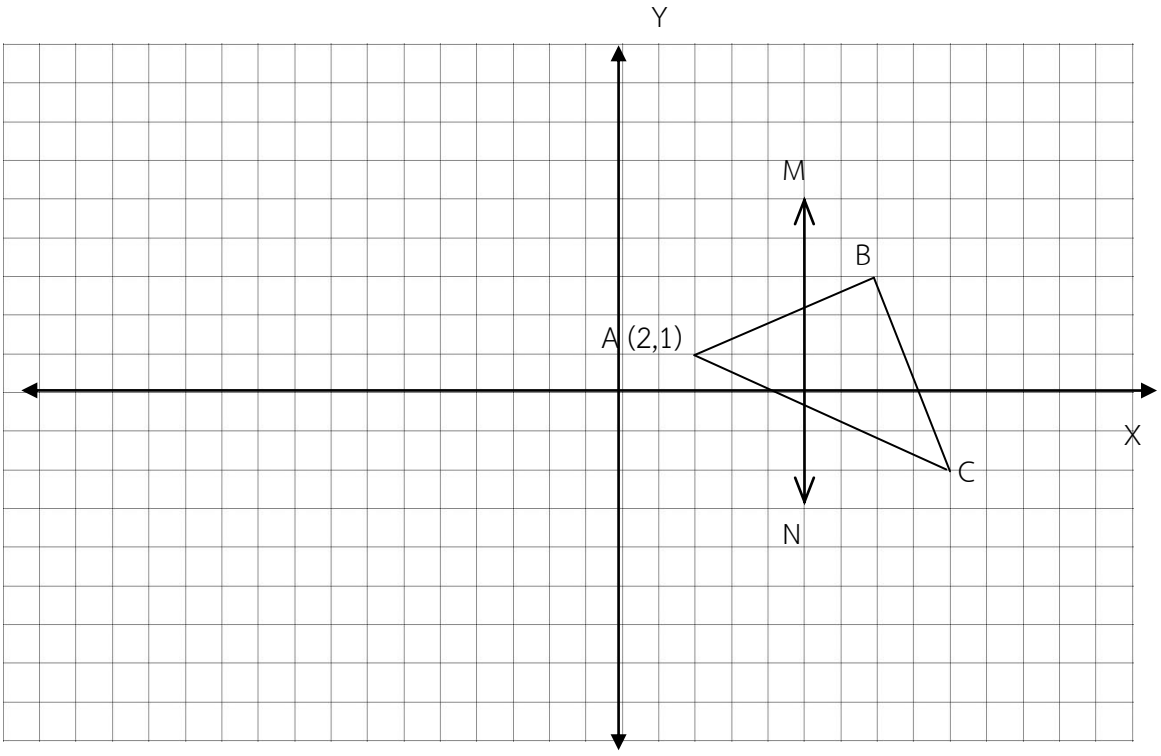
ความสัมพันธ์ของพิกัดของจุดบนรูปต้นแบบกับพิกัดของจุดบนภาพที่ได้จากการสะท้อน

.....

.....

.....

3. ให้เส้นตรง MN เป็นเส้นสะท้อน



ระยะห่างระหว่างจุด A กับเส้นสะท้อนเท่ากับ ..... หน่วย

ระยะระหว่างจุด A กับจุด A′ เท่ากับ.....หน่วย ดังนั้นพิกัดของจุด A′ คือ .....

ระยะห่างระหว่างจุด B กับเส้นสะท้อนเท่ากับ ..... หน่วย

ระยะระหว่างจุด B กับจุด B′ เท่ากับ.....หน่วย ดังนั้นพิกัดของจุด B′ คือ.....

ระยะห่างระหว่างจุด C กับเส้นสะท้อนเท่ากับ ..... หน่วย

ระยะระหว่างจุด C กับจุด C′ เท่ากับ.....หน่วย ดังนั้นพิกัดของจุด C′ คือ.....

ความสัมพันธ์ของพิกัดของจุดบนรูปต้นแบบกับพิกัดของจุดบนภาพที่ได้จากการสะท้อน

.....

.....

.....

ใบกิจกรรม 6 “เส้นสะท้อนอยู่ไหน”

ให้หาเส้นสะท้อนเมื่อกำหนดรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการสะท้อนต่อไปนี้

1. 

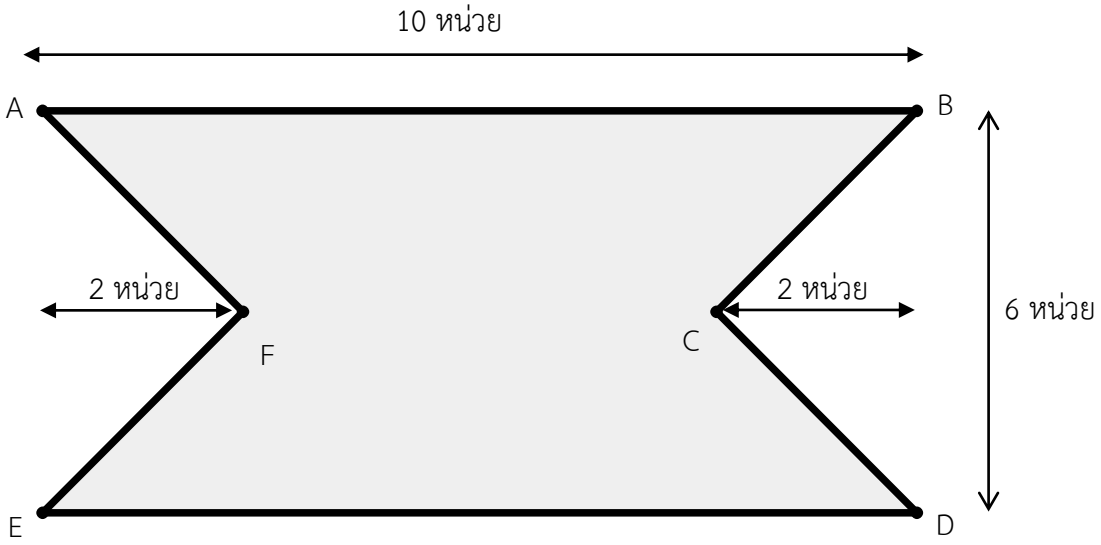
2. 

3. 

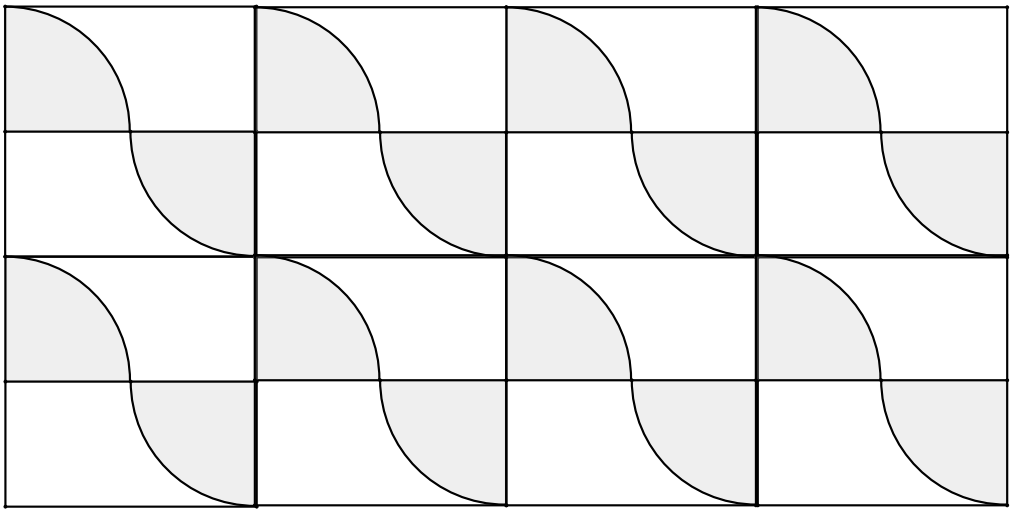


ใบกิจกรรม 7 “สะท้อนมาประกบกัน”

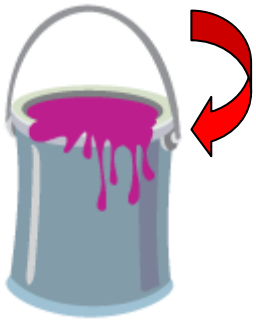
1. ให้ผู้เข้าอบรมหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม ABCDEF ที่กำหนดให้ โดยที่ $\overline{AB} // \overline{DE}$



2. อาจารย์เฉลิมศักดิ์ เป็นอาจารย์สอนวิชาศิลปะ ต้องการเปลี่ยนสีผนังห้องทำงานด้านหนึ่งใหม่ โดยผนังเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ที่มีความกว้าง 4 เมตร ยาว 8 เมตร ซึ่งอาจารย์ออกแบบลวดลายผนังห้องทำงานดังรูป แต่เมื่ออาจารย์สำรวจสีที่มีอยู่ ปรากฏว่ามีสีเหลือทาผนังอยู่เพียง 2 กระป๋อง ซึ่งเป็นสีที่แตกต่างกัน อยากทราบว่าอาจารย์เฉลิมศักดิ์จะใช้สีที่มีอยู่นี้ทาผนังห้องทำงานด้านที่ต้องการจนเสร็จได้หรือไม่ ถ้าไม่พอต้องซื้อมาเพิ่มอีกกี่กระป๋อง
(ข้อกำหนด: ให้นักเรียนใช้การสะท้อนแก้ปัญหานี้)



สีแต่ละกระป๋อง
สามารถทาได้ประมาณ
5 ตารางเมตร



ให้ผู้เข้าอบรมวาดภาพประกอบการหาพื้นที่พร้อมทั้งระบุขนาดของภาพที่สร้างขึ้น

ใบกิจกรรม 8 “ตั้งฉากกันไหม”

ให้ทำกิจกรรมตามลำดับขั้นตอนที่กำหนดให้ แล้วสรุปสิ่งที่ค้นพบ

1. สร้างรูปเรขาคณิต 1 รูปในกรอบด้านล่างเพื่อเป็นรูปต้นแบบ พร้อมทั้งระบุชื่อรูป
2. กำหนดจุดหมุนให้อยู่บนรูปต้นแบบหรือนอกรูปต้นแบบก็ได้
3. หมุนรูปต้นแบบไปในทิศทาง.....(ทวนเข็มนาฬิกา ตามเข็มนาฬิกา) ขนาด.....องศา (ให้กำหนดเอง)
4. ลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดที่สมนัยกันทีละคู่
5. แบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงแต่ละเส้นที่สร้างขึ้น
6. ลากเส้นตรงผ่านจุดหมุนและจุดที่แบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่สร้างขึ้นแต่ละเส้น
7. วัดขนาดของมุมระหว่างเส้นตรงที่ลากผ่านจุดหมุนและส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดที่สมนัยกัน

สิ่งที่ค้นพบ

.....

.....

.....

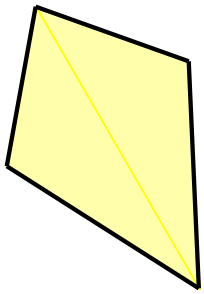
.....

.....

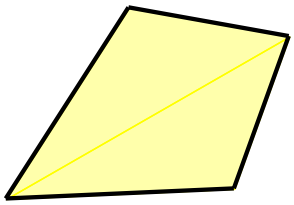
ใบกิจกรรม 9 “จุดหมุนอยู่ไหน”

ให้หาจุดหมุน และขนาดของมุมที่ใช้ในการหมุน เมื่อกำหนดรูปต้นแบบและภาพต่อไปนี้

1.



รูปต้นแบบ



ภาพ

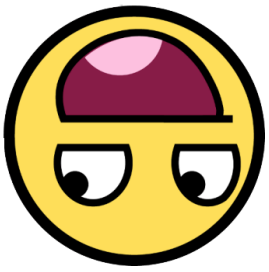
ภาพที่ได้เป็นการหมุนรูปต้นแบบรอบจุดหมุนในทิศทาง .....

ด้วยมุมที่มีขนาด.....องศา

2.



รูปต้นแบบ



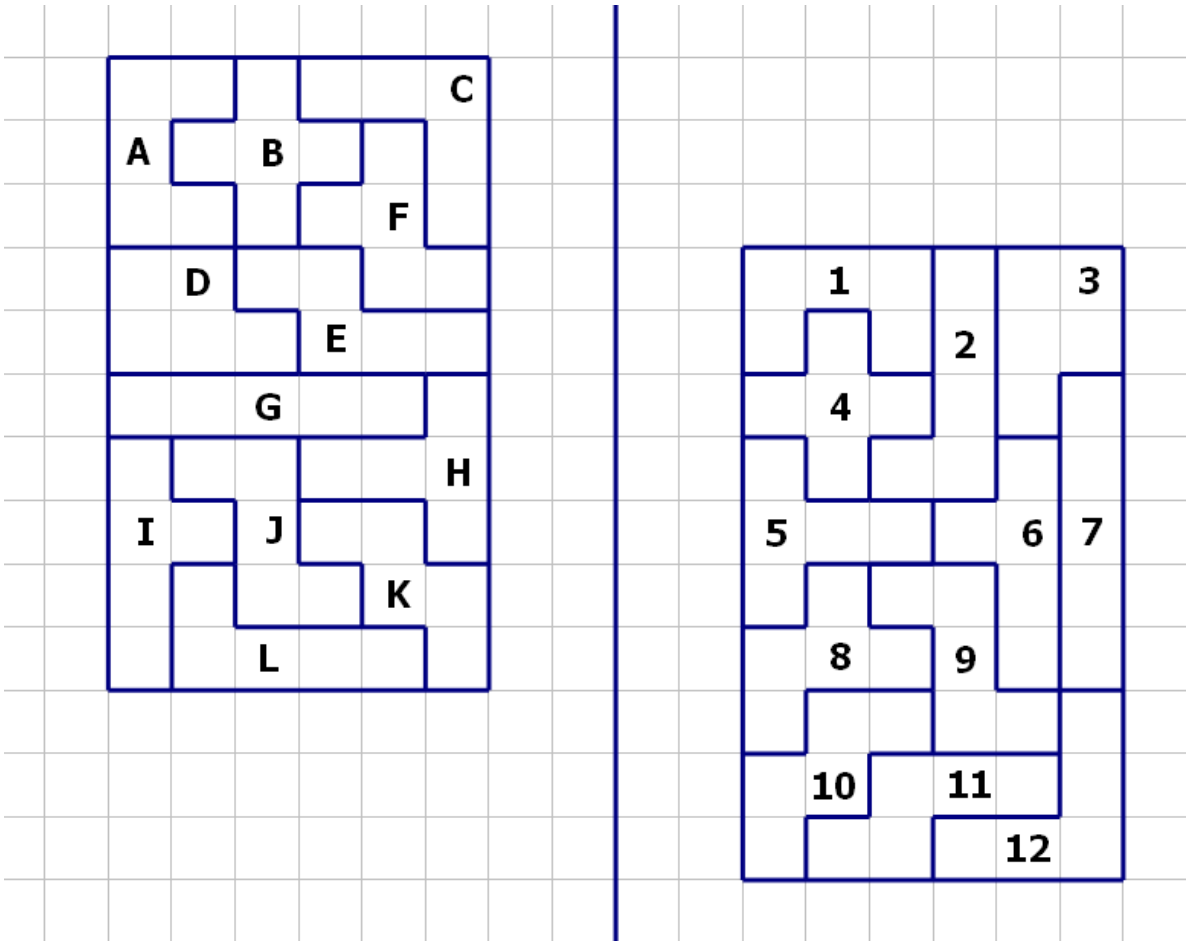
ภาพ

ภาพที่ได้เป็นการหมุนรูปต้นแบบรอบจุดหมุนในทิศทาง .....

ด้วยมุมที่มีขนาด.....องศา

ใบกิจกรรม 10 “แปลงแบบใด”

จงหาว่ารูปทางซ้ายมือกับรูปทางขวามือคู่ใดที่เท่ากันทุกประการ และรูปคู่นั้นเกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตแบบใด



การจับคู่	การแปลงทางเรขาคณิต
A และ _____	
B และ _____	
C และ _____	
D และ_____	
E และ _____	
F และ _____	
G และ _____	
H และ _____	
I และ _____	
J และ _____	
K และ _____	
L และ _____	

เอกสารสำหรับวิทยากร

เฉลยใบกิจกรรม 1

แนวคำตอบ

กลุ่มที่ 1 แสดงการเคลื่อนย้ายวัตถุในแนวเส้นตรง คือรูป C, D, G และ K

กลุ่มที่ 2 แสดงการสะท้อน คือรูป A, E, H และ I

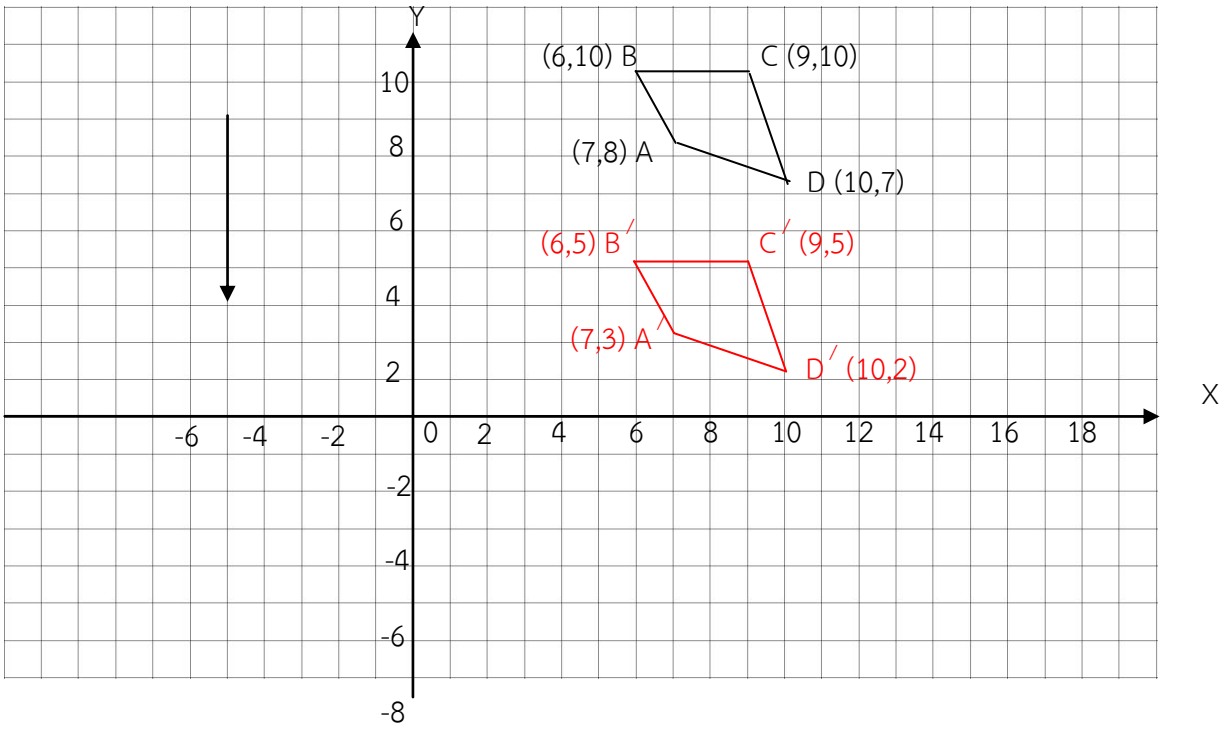
กลุ่มที่ 3 แสดงการหมุนของวัตถุ คือรูป B , F, J และ L

หมายเหตุ: อาจมีนักเรียนที่จัดกลุ่มแตกต่างออกไป ครูควรถามเหตุผลการจัดกลุ่มของนักเรียน

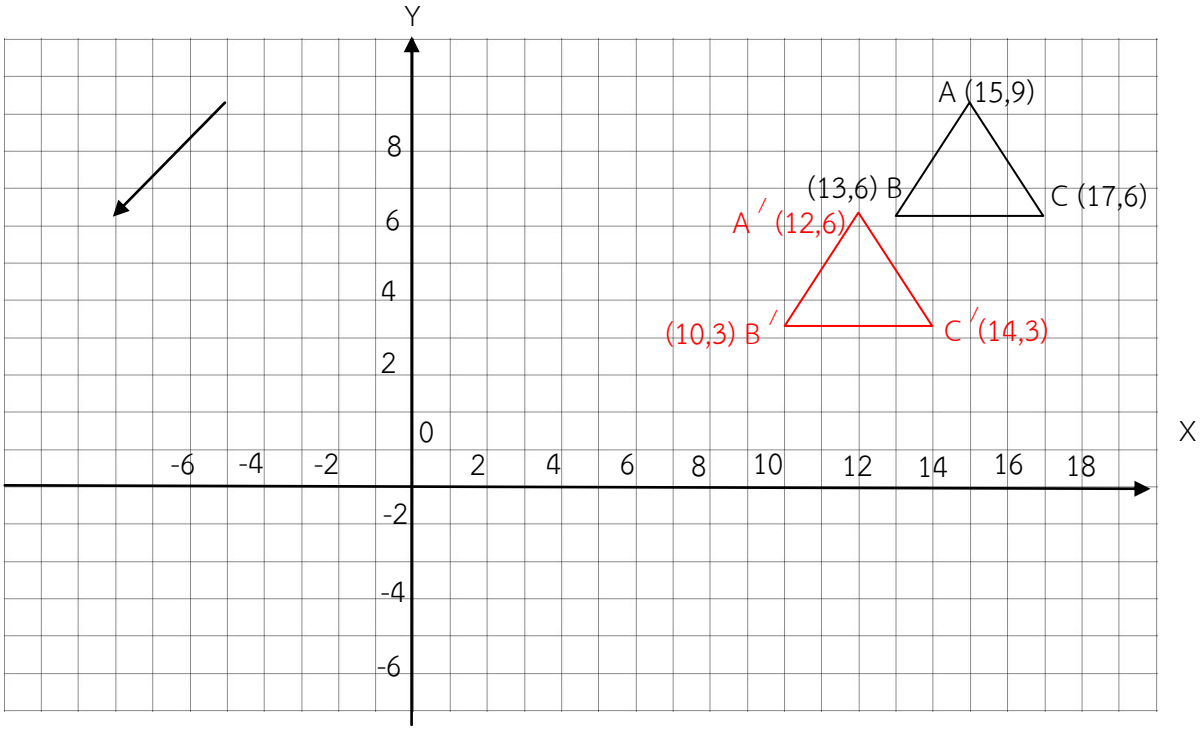
เฉลยใบกิจกรรม 3 “เลื่อนไปเลื่อนมา”

ให้สร้างรูปที่ได้จากการเลื่อนขนานพร้อมกับบอกพิกัดจากเวกเตอร์ที่กำหนดให้

1

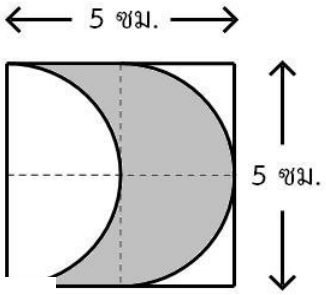


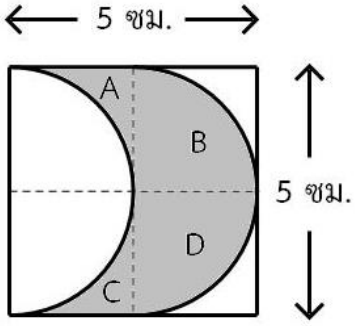
2



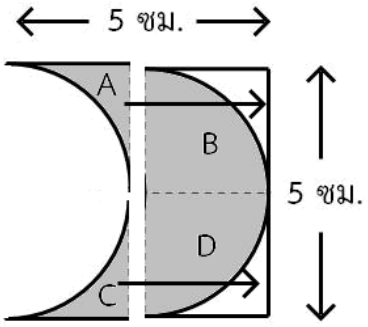
เฉลยใบกิจกรรม 4 “การหาพื้นที่”

1. จงใช้การเลื่อนขนานหาพื้นที่โดยประมาณของส่วนที่แรเงา พร้อมอธิบายวิธีการหาพื้นที่และวาดภาพประกอบ

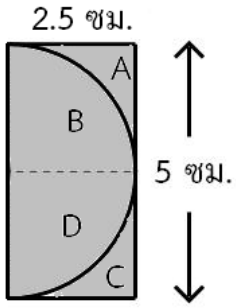




ขั้นที่ 1 แยกพื้นที่ส่วนที่แรเงาให้เป็นพื้นที่ A, B, C และ D

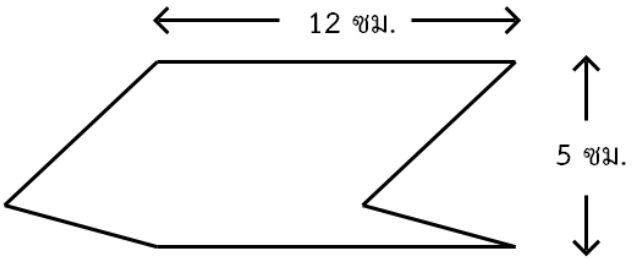


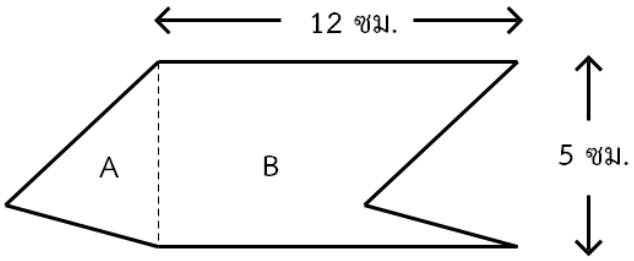
ขั้นที่ 2 เลื่อนขนานพื้นที่ A และ C ไปยังพื้นที่สีขาว



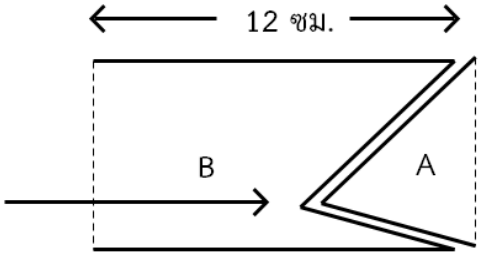
ขั้นที่ 3 พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่เกิดขึ้นจะเท่ากับพื้นที่ของส่วนที่แรเงา ซึ่งเท่ากับ 2.5 x 5 = 12.5 ตารางเซนติเมตร

2. จงใช้การเลื่อนขนานหาพื้นที่โดยประมาณของรูปที่กำหนดให้ พร้อมอธิบายวิธีการหาพื้นที่และวาดภาพประกอบ

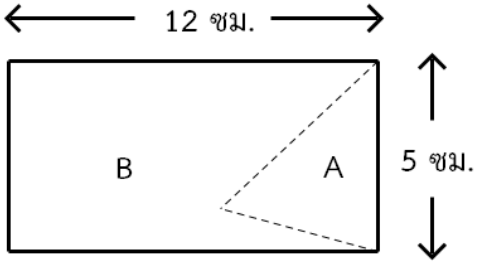




ขั้นที่ 1 แยกรูปเรขาคณิตที่กำหนดให้เป็นรูป A และรูป B



ขั้นที่ 2 เลื่อนขนานรูป A ไปยังพื้นที่ว่าง



ขั้นที่ 3 พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่เกิดขึ้นจะเท่ากับพื้นที่ของรูปเรขาคณิตที่กำหนดให้ซึ่งเท่ากับ 12 x 5 = 60 ตารางเซนติเมตร

หมายเหตุ มีอีกหลายวิธีที่ใช้ในการแยกชิ้นส่วนภาพนี้และประกอบขึ้นมาใหม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก แต่ไม่ว่าจะใช้วิธีใด พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ได้ก็จะเท่ากับ 60 ตารางเซนติเมตร

เฉลยใบกิจกรรมที่ 5 “ภาพสะท้อน”

ข้อ 1

ระยะห่างระหว่างจุด A กับเส้นสะท้อนเท่ากับ 1 หน่วย

ระยะระหว่างจุด A กับจุด A' เท่ากับ 2 หน่วย ดังนั้นพิกัดของจุด A' คือ (1 , 3)

ระยะห่างระหว่างจุด B กับเส้นสะท้อนเท่ากับ 3 หน่วย

ระยะระหว่างจุด B กับจุด B' เท่ากับ 6 หน่วย ดังนั้นพิกัดของจุด B' คือ (3 , -1)

ระยะห่างระหว่างจุด C กับเส้นสะท้อนเท่ากับ 5 หน่วย

ระยะระหว่างจุด C กับจุด C' เท่ากับ 10 หน่วย ดังนั้นพิกัดของจุด C' คือ (5 , 2)

ความสัมพันธ์ของพิกัดของจุดบนรูปต้นแบบกับพิกัดของจุดบนภาพที่ได้จากการสะท้อน

- ถ้าเส้นสะท้อนคือแกน Y และอยู่ด้านขวาของรูปต้นแบบ แล้วพิกัด x ของจุดบนภาพเท่ากับพิกัด x ของจุดบนรูปต้นแบบบวกกับสองเท่าของระยะห่างระหว่างจุดบนรูปต้นแบบกับเส้นสะท้อน และพิกัด y ของจุดของรูปต้นแบบและจุดบนภาพจะเท่ากัน

ข้อ 2

ระยะห่างระหว่างจุด A กับเส้นสะท้อนเท่ากับ 5 หน่วย

ระยะระหว่างจุด A กับจุด A' เท่ากับ 10 หน่วย ดังนั้นพิกัดของจุด A' คือ (5 , -5)

ระยะห่างระหว่างจุด B กับเส้นสะท้อนเท่ากับ 0 หน่วย

ระยะระหว่างจุด B กับจุด B' เท่ากับ 0 หน่วย ดังนั้นพิกัดของจุด B' คือ (7 , 0)

ระยะห่างระหว่างจุด C กับเส้นสะท้อนเท่ากับ 1 หน่วย

ระยะระหว่างจุด C กับจุด C' เท่ากับ 2 หน่วย ดังนั้นพิกัดของจุด C' คือ (3 , -1)

ระยะห่างระหว่างจุด D กับเส้นสะท้อนเท่ากับ 3 หน่วย

ระยะระหว่างจุด D กับจุด D' เท่ากับ 6 หน่วย ดังนั้นพิกัดของจุด C' คือ (2 , -3)

ความสัมพันธ์ของพิกัดของจุดบนรูปต้นแบบกับพิกัดของจุดบนภาพที่ได้จากการสะท้อน

- ถ้าเส้นสะท้อนคือแกน X และอยู่ด้านล่างของรูปต้นแบบ แล้วพิกัด y ของจุดบนภาพเท่ากับพิกัด y ของจุดบนรูปต้นแบบลบกับสองเท่าของระยะห่างระหว่างจุดบนรูปต้นแบบกับเส้นสะท้อน และพิกัด x ของจุดของรูปต้นแบบและจุดบนภาพจะเท่ากัน

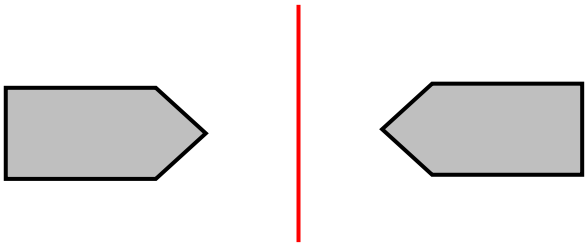
ข้อ 3

ระยะห่างระหว่างจุด A กับเส้นสะท้อนเท่ากับ 3 หน่วย
ระยะระหว่างจุด A กับจุด A' เท่ากับ 6 หน่วย ดังนั้นพิกัดของจุด A' คือ (8 , 1)
ระยะห่างระหว่างจุด B กับเส้นสะท้อนเท่ากับ 2 หน่วย
ระยะระหว่างจุด B กับจุด B' เท่ากับ 4 หน่วย ดังนั้นพิกัดของจุด B' คือ (3 ,3)
ระยะห่างระหว่างจุด C กับเส้นสะท้อนเท่ากับ 4 หน่วย
ระยะระหว่างจุด C กับจุด C' เท่ากับ 8 หน่วย ดังนั้นพิกัดของจุด C' คือ (1 , -2)
ความสัมพันธ์ของพิกัดของจุดบนรูปต้นแบบกับพิกัดของจุดบนภาพที่ได้จากการสะท้อน

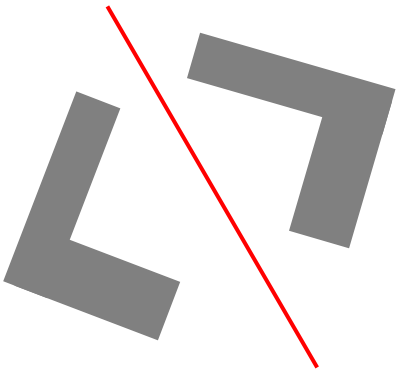
- ถ้าเส้นสะท้อนคือแกน Y และอยู่ด้านขวาของรูปต้นแบบ แล้วพิกัด x ของจุดบนภาพเท่ากับพิกัด x ของจุดบนรูปต้นแบบบวกกับสองเท่าของระยะห่างระหว่างจุดบนรูปต้นแบบกับเส้นสะท้อน และพิกัด y ของจุดบนรูปต้นแบบและจุดบนภาพจะเท่ากัน
- ถ้าเส้นสะท้อนคือแกน Y และอยู่ด้านซ้ายของรูปต้นแบบ แล้วพิกัด x ของจุดบนภาพเท่ากับพิกัด x ของจุดบนรูปต้นแบบลบกับสองเท่าของระยะห่างระหว่างจุดบนรูปต้นแบบกับเส้นสะท้อน และพิกัด y ของจุดของรูปต้นแบบและจุดบนภาพจะเท่ากัน

เฉลยใบกิจกรรม 6 “เส้นสะท้อนอยู่ไหน”

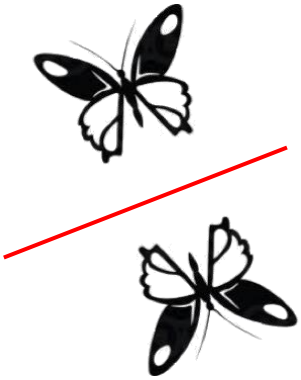
1.



2.

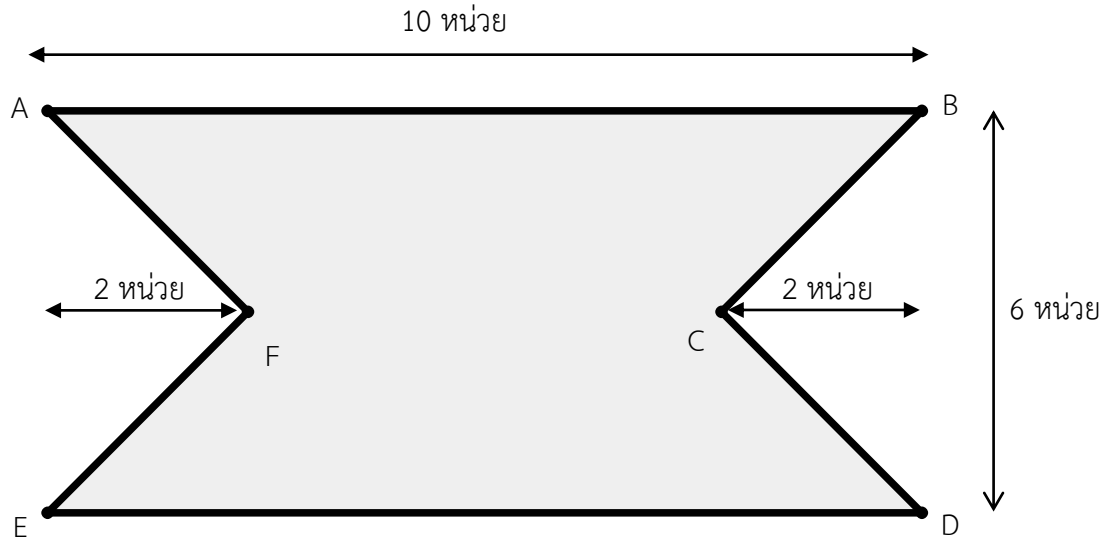


3.



เฉลยใบกิจกรรม 7 “สะท้อนมาประกบกัน”

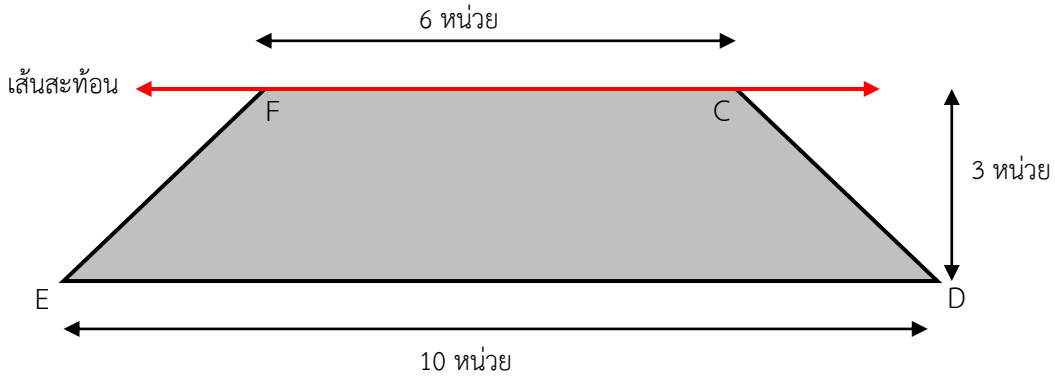
1. ให้นักเรียนหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม ABCDEF ที่กำหนดให้ โดยที่ $\overline{AB} // \overline{DE}$



จากรูปหลายเหลี่ยม ABCDEF มี $\overline{AB} // \overline{DE}$

- การแปลงทางเรขาคณิตที่นำมาใช้ในการหาพื้นที่ คือ การสะท้อน

- ให้นักเรียนวาดภาพประกอบวิธีการการหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม ABCDEF



รูปที่ 1

- แสดงวิธีการหาพื้นที่

  พิจารณารูปหลายเหลี่ยม ABCDEF มี $\overline{AB} // \overline{DE}$

  ใช้เส้นตรง FC เป็นเส้นสะท้อน

  จะได้ว่ารูปหลายเหลี่ยม ABCDEF เกิดจากสะท้อนรูปสี่เหลี่ยม CDEF และ $\overline{CF} // \overline{DE}$

ดังนั้นรูปสี่เหลี่ยม CDEF เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

พิจารณารูปสี่เหลี่ยมคางหมู CDEF

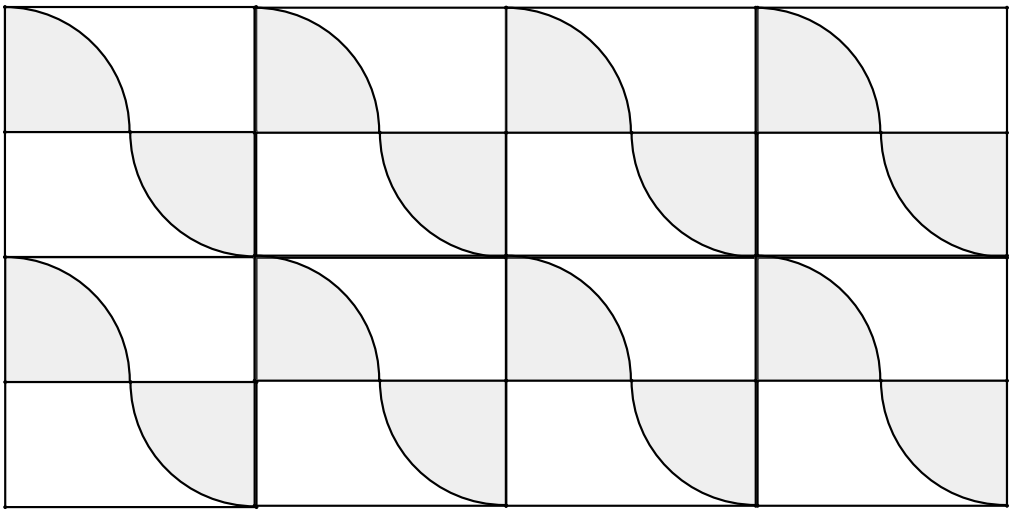
พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู CDEF เท่ากับ $\frac{1}{2}$ x (ผลบวกของด้านคู่ขนาน) x ความสูง

เท่ากับ $\frac{1}{2} \times (6+10) \times 3 = 24$ ตารางเมตร

ดังนั้น พื้นที่รูปหลายเหลี่ยม ABCDEF เท่ากับสองเท่าของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู CDEF

นั้นคือ พื้นที่รูปหลายเหลี่ยม ABCDEF เท่ากับ 2 x 24 = 48 ตารางเมตร

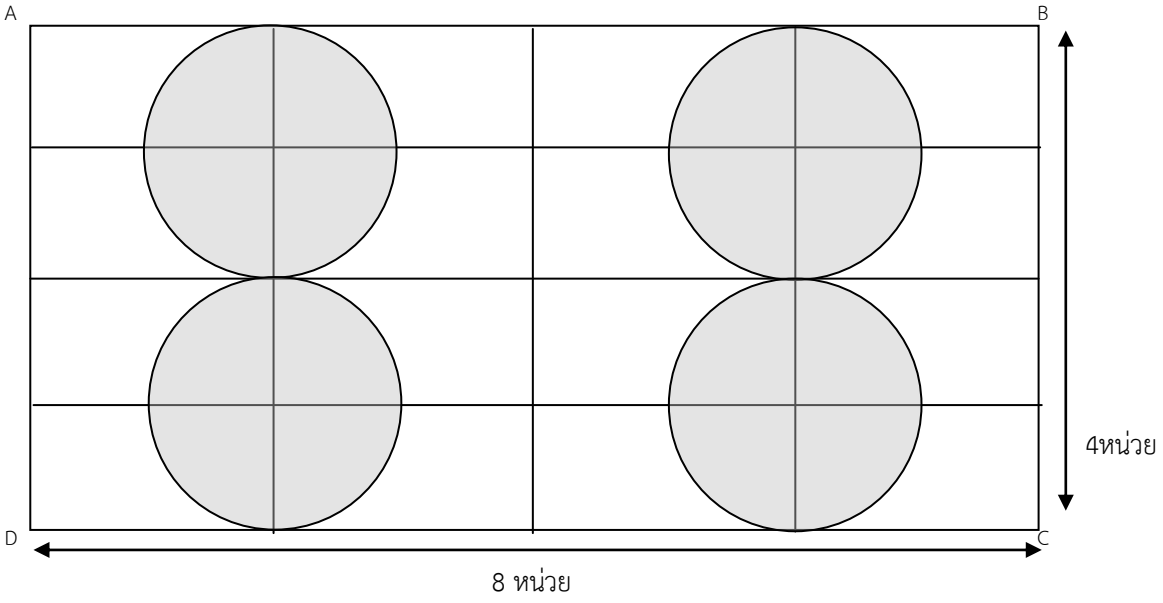
2. อาจารย์เฉลิมศักดิ์ เป็นอาจารย์สอนวิชาศิลปะ ต้องการเปลี่ยนสีผนังห้องทำงานด้านหนึ่งใหม่ โดยผนังเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ที่มีความกว้าง 4 เมตร ยาว 8 เมตร ซึ่งอาจารย์ออกแบบลวดลายผนังห้องทำงานดังรูป แต่เมื่ออาจารย์สำรวจสีที่มีอยู่ ปรากฏว่ามีสีเหลือทาผนังอยู่เพียง 2 กระป๋อง ซึ่งเป็นสีที่แตกต่างกัน อยากทราบว่าอาจารย์เฉลิมศักดิ์จะใช้สีที่มีอยู่นี้ทาผนังห้องทำงานด้านที่ต้องการจนเสร็จได้หรือไม่ ถ้าไม่พอต้องซื้อมาเพิ่มอีกกี่กระป๋อง
(ข้อกำหนด: ให้นักเรียนใช้การสะท้อนแก้ปัญหานี้)



สีแต่ละกระป๋อง
สามารถทาได้ประมาณ
5 ตารางเมตร



➢ ให้นักเรียนวาดภาพประกอบการหาพื้นที่ พร้อมทั้งระบุขนาดของภาพที่สร้างขึ้น



➢ แสดงวิธีการหาพื้นที่

พิจารณารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า กว้าง 4 เมตร ยาว 8 เมตร

ดังนั้น พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD เท่ากับ 4 x 8 = 32 ตารางเมตร

พิจารณาส่วนที่แรเงา เป็นรูปวงกลมที่มีรัศมียาว 1 หน่วย มีทั้งสิ้น 4 รูป ซึ่งแต่ละรูปมีพื้นที่เท่ากัน

พื้นที่ส่วนที่แรเงา (โดยประมาณ) เท่ากับ $4 \times \pi r^2 = 4 \times 3.14 \times (1)^2$

$= 12.56$ ตารางเมตร

และพื้นที่ส่วนที่ไม่ได้แรเงา (โดยประมาณ) เท่ากับ พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD ลบด้วยพื้นที่ส่วนที่แรเงา (โดยประมาณ)

พื้นที่ส่วนที่ไม่ได้แรเงา (โดยประมาณ) เท่ากับ 32 – 12.56 = 19.44 ตารางเมตร

พิจารณาสีแต่ละสีที่เหลืออยู่ ซึ่งเหลืออยู่เพียงสีละ 1 กระป๋อง แต่ละกระป๋องทาได้ประมาณ 5 ตารางเมตร

พิจารณาสีที่ 1 ใช้ทาส่วนที่แรเงา ซึ่งไม่เพียงพอยังขาดอยู่ 12.56 – 5 = 7.56 ตารางเมตร

ต้องซื้อเพิ่ม $\frac{7.56}{5} = 1.512$ กระป๋อง นั้นคือต้องซื้อเพิ่มอย่างน้อยที่สุด 2 กระป๋อง

พิจารณาสีที่ 2 ใช้ทาส่วนที่ไม่แรเงา ซึ่งไม่เพียงพอยังขาดอยู่ 19.44 – 5 = 14.44 ตารางเมตร

ต้องซื้อเพิ่ม $\frac{14.44}{5} = 2.888$ กระป๋อง นั้นคือต้องซื้อเพิ่มอย่างน้อยที่สุด 3 กระป๋อง

ดังนั้นอาจารย์เฉลิมศักดิ์ต้องซื้อสีเพิ่ม โดยสีที่ 1 ใช้ทาส่วนที่แรเงาต้องซื้อเพิ่มอย่างน้อยที่สุด 2 กระป๋อง และสีที่ 2 ใช้ทาส่วนที่ไม่แรเงาต้องซื้อเพิ่มอย่างน้อยที่สุด 3 กระป๋อง

เฉลยใบกิจกรรม 8 “ตั้งฉากกันไหม”

ข้อความคาดการณ์

เส้นตรงที่ลากผ่านจุดหมุนกับจุดที่แบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดที่สมนัยกัน จะตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดที่สมนัยกันคู่นั้น

เฉลยใบกิจกรรมที่ 9 “จุดหมุนอยู่ไหน”

ข้อ 1.

คำตอบ 1 ภาพที่ได้เป็นการหมุนรูปต้นแบบรอบจุดหมุนในทิศทาง ตามเข็มนาฬิกา ด้วยมุมที่มีขนาด 85 องศา

คำตอบ 2 ภาพที่ได้เป็นการหมุนรูปต้นแบบรอบจุดหมุนในทิศทาง ทวนเข็มนาฬิกา ด้วยมุมที่มีขนาด 275 องศา

ข้อ 2.

คำตอบ 1 ภาพที่ได้เป็นการหมุนรูปต้นแบบรอบจุดหมุนในทิศทาง ตามเข็มนาฬิกา ด้วยมุมที่มีขนาด 180 องศา

คำตอบ 2 ภาพที่ได้เป็นการหมุนรูปต้นแบบรอบจุดหมุนในทิศทาง ทวนเข็มนาฬิกา ด้วยมุมที่มีขนาด 180 องศา

เฉลยใบกิจกรรมที่ 10 “แปลงแบบใด”

การจับคู่	**การแปลงทางเรขาคณิต**
A และ 1	การหมุน
B และ 4	การเลื่อนขนาน/การสะท้อน/การหมุน
C และ 12	การหมุน
D และ 3	การหมุน
E และ 11	การสะท้อน
F และ 8	การหมุน
G และ 7	การหมุน
H และ 5	การสะท้อน/การหมุน
I และ 6	การสะท้อน
J และ 9	การเลื่อนขนาน/การหมุน
K และ 10	การสะท้อน/การหมุน
L และ 2	การหมุน

แบบกรอกคะแนน เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต

เลขที่	ชื่อ-สกุล	รายการประเมิน				รวม 11 คะแนน
		การมีส่วนร่วมในกิจกรรม (3 คะแนน)	ชิ้นงาน (1 คะแนน)	การนำเสนอผลงานกลุ่ม (5 คะแนน)	การสรุปองค์ความรู้ (2 คะแนน)	
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						
23						
24						
25						
26						

เลขที่	ชื่อ-สกุล	รายการประเมิน				รวม 11 คะแนน
		การมีส่วนร่วมในกิจกรรม (3 คะแนน)	ชิ้นงาน (1 คะแนน)	การนำเสนอผลงานกลุ่ม (5 คะแนน)	การสรุปองค์ความรู้ (2 คะแนน)	
27						
28						
29						
30						
31						
32						
33						
34						
35						
36						
37						
38						
39						
40						

ลงชื่อ.....วิทยากร

วัน/เดือน/ปี.....

เรื่อง พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม

แผนการอบรม

แผนการอบรมครูคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น สำหรับครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่
เรื่อง พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม
เวลา 3 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรม

1. มีความรู้ความเข้าใจในเรื่องพหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม
2. สามารถออกแบบและจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในเรื่องพหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม

สาระการเรียนรู้

1. พหุนาม
2. การแยกตัวประกอบของพหุนาม

สาระสำคัญ

1. ข้อความที่เขียนในรูปสัญลักษณ์ เช่น $6x, -\frac{3}{2}x, 4x^2$ ประกอบด้วยตัวเลขและตัวอักษร เรียกตัวเลขว่า **ค่าคงตัว** และเรียกตัวอักษรว่า **ตัวแปร**
2. ข้อความที่เขียนอยู่ในรูปสัญลักษณ์ เช่น $3, 7^2, 2x, x + 4, \frac{x}{5}, x - 7, x^8, \frac{x+2}{3x-1}, x + y - 6$ เรียกว่า **นิพจน์**
3. นิพจน์ที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปการคูณของค่าคงตัวกับตัวแปรตั้งแต่หนึ่งตัวขึ้นไป และเลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวเป็นศูนย์หรือจำนวนเต็มบวก เรียกว่า **เอกนาม** (monomial)

   นิพจน์ที่เป็นเอกนาม เช่น $2x, -\frac{3}{2}x, 5, 0$

   นิพจน์ที่ไม่เป็นเอกนาม เช่น $4x^{-2}, 3x + 4, \frac{2x}{y^2}, 4 - ab^2$

   เอกนามประกอบด้วยสองส่วน คือ ส่วนที่เป็นค่าคงตัว และส่วนที่อยู่ในรูปตัวแปรหรือการคูณกันของตัวแปร เรียกส่วนที่เป็นค่าคงที่ว่า **สัมประสิทธิ์** ของเอกนาม และเรียกผลบวกของเลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวในเอกนามว่า **ดีกรี** ของเอกนาม เช่น

   $2x$ เป็นเอกนามที่มี 2 เป็นสัมประสิทธิ์ มี x เป็นตัวแปร และมีดีกรี 1

   $5x^8y^2$ เป็นเอกนามที่มี 5 เป็นสัมประสิทธิ์ มี x และ y เป็นตัวแปร และมีดีกรี 10

   4 เป็นเอกนามที่มี 4 เป็นสัมประสิทธิ์ มีดีกรี 0 เนื่องจาก $4 = 4x^0$ หรือ $4 = 4y^0$ ตัวแปรเป็นตัวอักษรใดก็ได้ จึงไม่กล่าวถึงตัวแปรในกรณีที่เอกนามนั้นเป็นค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์

0 เป็นเอกนามที่ไม่สามารถบอกดีกรีได้ เนื่องจาก $0 = 0x^2$ หรือ $0 = 0x^5$ หรือ $0 = 0x^n$ และไม่กล่าวถึงตัวแปรของเอกนามศูนย์

4. เอกนามสองเอกนาม **คล้ายกัน** ก็ต่อเมื่อ เอกนามทั้งสองมีตัวแปรชุดเดียวกัน และเลขชี้กำลังของตัวแปรเดียวกันในแต่ละเอกนามเท่ากัน เช่น $2x$ คล้ายกันกับ $-3x$, $5a^2bc^3$ คล้ายกันกับ $7a^2bc^3$
5. ผลบวกของเอกนามที่คล้ายกัน

   = (ผลบวกของสัมประสิทธิ์) x (ส่วนที่อยู่ในรูปของตัวแปรหรือการคูณกันของตัวแปร)
6. ผลลบของเอกนามที่คล้ายกัน

   = (ผลลบของสัมประสิทธิ์) x (ส่วนที่อยู่ในรูปของตัวแปรหรือการคูณกันของตัวแปร)
7. นิพจน์ที่อยู่ในรูปเอกนาม หรือเขียนอยู่ในรูปการบวกของเอกนามตั้งแต่สองเอกนามขึ้นไป เรียกว่า **พหุนาม** (polynomial) เช่น $2, -\frac{3}{5}, 4r, 3x^2y, 2x + 4y, 2ab^3 + 4c^2d - 3e^4$
   - 7.1 สำหรับพหุนามใด ๆ จะเรียกแต่ละเอกนามที่อยู่ในพหุนามนั้นว่า **พจน์** ของพหุนาม
   - 7.2 กรณีที่พหุนามนั้นมีเอกนามที่คล้ายกัน จะเรียกเอกนามที่คล้ายกันว่า **พจน์ที่คล้ายกัน**
   - 7.3 พหุนามที่ไม่มีพจน์คล้ายกันเลย เรียกว่า **พหุนามในรูปผลสำเร็จ** โดยจะเรียกดีกรีสูงสุดของพจน์ของพหุนามในรูปผลสำเร็จว่า **ดีกรี** ของพหุนาม
8. การหาผลบวกของพหุนามทำได้โดยนำพหุนามมาเขียนในรูปการบวก และถ้ามีพจน์ที่คล้ายกันให้บวกพจน์ที่คล้ายกันเข้าด้วยกัน
9. การหาผลลบของพหุนามสองพหุนาม ทำตามข้อตกลงดังนี้

   พหุนามตัวตั้ง – พหุนามตัวลบ = พหุนามตัวตั้ง + พหุนามตรงข้ามของพหุนามตัวลบ
10. การหาผลคูณระหว่างพหุนามกับพหุนามทำได้โดย คูณแต่ละพจน์ของพหุนามหนึ่งกับทุก ๆ พจน์ของอีกพหุนามหนึ่ง แล้วนำผลคูณเหล่านั้นมาบวกกัน
11. การหารพหุนามสามารถเขียนความสัมพันธ์ของตัวตั้ง ตัวหาร ผลหาร และเศษได้ดังนี้

    ตัวตั้ง = (ตัวหาร x ผลหาร) + เศษ
12. เศษส่วนของพหุนาม ถ้า P และ Q เป็นพหุนาม โดยที่ $Q \neq 0$ จะเรียก $\frac{P}{Q}$ ว่า **เศษส่วนของพหุนาม** ที่มี P เป็น **ตัวเศษ** และ Q เป็น **ตัวส่วน**
    - 12.1 การคูณเศษส่วนของพหุนาม

      เมื่อ P, Q, R และ S เป็นพหุนาม โดยที่ $Q \neq 0$ และ $S \neq 0$ จะได้ว่า $\frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{P \times R}{Q \times S}$
    - 12.2 การหารเศษส่วนของพหุนาม

      เมื่อ P, Q, R และ S เป็นพหุนาม โดยที่ $Q \neq 0$ และ $S \neq 0$ จะได้ว่า $\frac{P}{Q} \div \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \times \frac{S}{R}$

12.3 การบวกและการลบเศษส่วนของพหุนาม

เมื่อ P, Q และ R เป็นพหุนาม โดยที่ $Q \neq 0$ จะได้ว่า $\frac{P}{Q} + \frac{R}{Q} = \frac{P+R}{Q}$

และ $\frac{P}{Q} - \frac{R}{Q} = \frac{P-R}{Q}$

นิยมเขียนผลบวก ผลลบ ผลคูณ และผลหาร ที่ได้ให้เป็นเศษส่วนของพหุนามในรูปผลสำเร็จ

13. การแยกตัวประกอบของพหุนามใด คือการเขียนพหุนามนั้นในรูปการคูณกันของพหุนามที่มีดีกรีต่ำกว่า
14. รูปทั่วไปของพหุนามที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ คือ $a^2 + 2ab + b^2$ และ $a^2 - 2ab + b^2$ เมื่อ a และ b เป็นพหุนาม แยกตัวประกอบได้ดังนี้

    $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ และ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
15. รูปทั่วไปของพหุนามที่อยู่ในรูปผลต่างกำลังสอง คือ $a^2 - b^2$ เมื่อ a และ b เป็นพหุนาม แยกตัวประกอบได้ดังนี้

    $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
16. รูปทั่วไปของพหุนามที่อยู่ในรูปผลบวกของกำลังสาม คือ $a^3 + b^3$ เมื่อ a และ b เป็นพหุนาม แยกตัวประกอบได้ดังนี้

    $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
17. รูปทั่วไปของพหุนามที่อยู่ในรูปผลต่างของกำลังสาม คือ $a^3 - b^3$ เมื่อ a และ b เป็นพหุนาม แยกตัวประกอบได้ดังนี้

    $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน/ยาก

1. นักเรียนเข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับความหมายของคำศัพท์ต่าง ๆ ในเรื่องพหุนามซึ่งมีคำศัพท์ใหม่จำนวนมาก เช่น เอกนาม พจน์ นิพจน์ พจน์ที่คล้ายกันพหุนาม เศษส่วนของพหุนาม การแยกตัวประกอบ การใช้วิธีกำลังสองสมบูรณ์ เป็นต้น ซึ่งครูอาจแก้ไขโดยการให้ความหมายและยกตัวอย่างพร้อมทบทวนให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดให้ครอบคลุม
2. นักเรียนเข้าใจคลาดเคลื่อนในเรื่องการบวกและการคูณพหุนาม เช่น เข้าใจผิดว่า $x + x = x^2$, $x + x = 2x^2$, $x \cdot x = 2x$, $x \cdot x = 2x^2$, $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ ซึ่งครูสามารถแก้ไขได้โดยเน้นการใช้สมบัติแจกแจง และทบทวนการใช้สมบัติของการคูณเลขยกกำลัง รวมทั้งนักเรียนเข้าใจผิดว่าเลขยกกำลังของ x คือ 0 ส่งผลให้การคูณพหุนามไม่ถูกต้อง
3. ในการแยกตัวประกอบโดยใช้สมบัติการแจกแจง นักเรียนมักไม่ระมัดระวังในการนำตัวประกอบร่วมออกมาจากพหุนามที่ต้องการแยกตัวประกอบให้หมด จึงทำให้คำตอบไม่ได้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

4. นักเรียนสับสนเกี่ยวกับการแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจง ในกรณีที่ตัวประกอบร่วมเป็นพจน์หนึ่งของพหุนามที่กำหนดให้ เช่น เขียนผิดว่า $2 + 2y - 4x = 2(y - 2x)$, $x^2 - x = x(x - 0)$, $-(x^2 - x) = -x^2 - x$
5. บางกรณีนักเรียนจะคิดว่าแยกตัวประกอบไม่ได้จึงไม่ตอบ แต่ที่จริงแล้วกรณีนี้ อาจแยกตัวประกอบได้ในรูปของจำนวนอตรรกยะ เช่น $x^2 - 3 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$
6. นักเรียนบางคนคิดว่าการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง เมื่อสามารถแยกให้เป็นผลต่างกำลังสองได้ ก็น่าจะสามารถแยกพหุนามดีกรีสองให้อยู่ในรูป $(a^2 + b^2) = (a + b)(a + b)$ ได้ ซึ่งไม่ถูกต้อง
7. นักเรียนนำตัวร่วมไปหารเศษส่วนของพหุนามที่อยู่ในรูปผลสำเร็จแล้ว ซึ่งไม่ถูกต้อง เช่น $\frac{2x^2+3y}{4x}$ นักเรียนเข้าใจผิดว่า $\frac{\cancel{2x^2}+3y}{\cancel{4x}_{2}} = \frac{x+3y}{2}$

สื่อและแหล่งการเรียนรู้

1. สำหรับผู้เข้ารับการอบรม

1.1. เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1: ใบกิจกรรม 1 การบวกและการลบพหุนาม

1.2. เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 2: ใบกิจกรรม 2 การคูณพหุนาม

1.3 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 3: ใบกิจกรรม 3 การหารพหุนาม

1.4 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 4: ใบกิจกรรม 4 เศษส่วนของพหุนาม

1.5 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 5: ใบกิจกรรม 5 การพิสูจน์สูตร $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

1.6 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 6: ใบกิจกรรม 6 การพิสูจน์สูตร $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

1.7 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 7: ใบกิจกรรม 7 การพิสูจน์สูตร $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

1.8 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 8: ใบกิจกรรม 8 การแยกตัวประกอบของพหุนาม

1.9 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 9: ใบกิจกรรม 9 เกมจิ๊กซอร์การแยกตัวประกอบของพหุนาม

1.10 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 10: ใบกิจกรรม 10 ออกแบบกิจกรรม/เกม เรื่อง พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม

1.11 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 11: ใบกิจกรรม 11 การสรุปองค์ความรู้

1.12 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 12: ใบความรู้ 1 พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม

1.13 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 13: ใบความรู้ 2 แบบรูปกับพหุนาม

1.14 กระดาษ A4 สีต่าง ๆ กรรไกรไม้บรรทัด ดินสอสี

1.15 หนังสือและคู่มือครูสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่อง พหุนาม

1.16 หนังสือและคู่มือครูสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่อง พหุนามและเศษส่วนของพหุนาม

1.17 หนังสือและคู่มือครูสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง

1.18 หนังสือและคู่มือครูสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง ระบบสมการ

2. สำหรับวิทยากร

2.1 เอกสารสำหรับวิทยากร 1: เฉลยใบกิจกรรม 1 การบวกและการลบพหุนาม

2.2 เอกสารสำหรับวิทยากร 2: เฉลยใบกิจกรรม 2 การคูณพหุนาม

2.3 เอกสารสำหรับวิทยากร 3: เฉลยใบกิจกรรม 3 การหารพหุนาม

2.4 เอกสารสำหรับวิทยากร 4: เฉลยใบกิจกรรม 4 เศษส่วนของพหุนาม

2.5 เอกสารสำหรับวิทยากร 5: เฉลยใบกิจกรรม 8 การแยกตัวประกอบของพหุนาม

2.6 เอกสารสำหรับวิทยากร 6: แบบสังเกตการมีส่วนร่วมในกิจกรรม

2.7 เอกสารสำหรับวิทยากร 7: แบบบันทึกการส่งใบกิจกรรมหรือผลงานของกิจกรรม 1-11

2.8 เอกสารสำหรับวิทยากร 8: แบบประเมินการนำเสนอผลงาน

2.9 เอกสารสำหรับวิทยากร 9: แบบประเมินการสรุปองค์ความรู้ตามใบกิจกรรม 11

2.10 เอกสารสำหรับวิทยากร 10: แบบกรอกคะแนน เรื่อง พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม

2.11 สื่อสำหรับวิทยากร 1: ไฟล์ เรื่อง พหุนามกับพื้นที่.gsp

2.12 สื่อสำหรับวิทยากร 2: ไฟล์ เรื่อง ผลคูณของพหุนาม.gsp

2.13 สื่อสำหรับวิทยากร 3: ไฟล์ เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนาม.gsp

2.14 สื่อสำหรับวิทยากร 4: ไฟล์ เรื่อง พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม.ppt

2.15 สื่อสำหรับวิทยากร 5: สื่อเรียนรู้จากอินเทอร์เน็ตที่เว็บไซต์

http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=216
http://mr-math.com/Downloads/AlgebraTilesPublisher/tabid/112/Default.aspx

การประเมินผล

รายการประเมิน	**เกณฑ์การให้คะแนน (คะแนนเต็ม 11 คะแนน)**	**เครื่องมือ**
1. การมีส่วนร่วมในกิจกรรม พิจารณาจากการเข้าร่วมกิจกรรม	**คะแนนเต็ม 3 คะแนน** โดย ได้ 3 คะแนน เมื่อเข้าร่วมกิจกรรมครบทุกกิจกรรมย่อย และมีส่วนร่วมในการแสดงความคิดเห็นในกิจกรรม ได้ 2 คะแนน เมื่อเข้าร่วมกิจกรรมครบทุกกิจกรรมย่อย ได้ 1 คะแนน เมื่อเข้าร่วมกิจกรรมไม่ครบทุกกิจกรรมย่อย ได้ 0 คะแนน ไม่เข้าร่วมกิจกรรมย่อย	- แบบสังเกตการมีส่วนร่วมในกิจกรรม
2. ชิ้นงาน พิจารณาจากการปฏิบัติและส่งใบกิจกรรมหรือผลงานของกิจกรรม 1-11	**คะแนนเต็ม 1 คะแนน** โดย ได้ 1 คะแนน เมื่อปฏิบัติงานและส่งใบกิจกรรมครบ 11 ใบกิจกรรม ได้ 0 คะแนน เมื่อปฏิบัติงานและส่งใบกิจกรรมน้อยกว่า 11 ใบกิจกรรม	- แบบบันทึกการส่งใบกิจกรรมหรือผลงานของกิจกรรม 1-11
3. การนำเสนอผลงาน พิจารณาจากข้อ 3.1-3.3 ดังนี้ 3.1 เป็นตัวแทนนำเสนอผลงานเดี่ยวหรือกลุ่มของใบกิจกรรม 1 ถึงใบกิจกรรม 11 อย่างน้อย 1 กิจกรรม 3.2 เป็นผู้อภิปรายหรือแสดงความคิดเห็นต่อการนำเสนอผลงานเดี่ยว หรือกลุ่มตนเองหรือกลุ่มอื่นของใบกิจกรรม 1 ถึงใบกิจกรรม 11	**คะแนนเต็ม 5 คะแนน** โดย ได้ 5 คะแนน เมื่อปฏิบัติครบ 3 ข้อ ได้ 4 คะแนน เมื่อปฏิบัติ 2 ข้อ ได้ 3 คะแนน เมื่อปฏิบัติ 1 ข้อ ได้ 0 คะแนน เมื่อไม่ปฏิบัติทั้งสามข้อ	- แบบประเมินการนำเสนอผลงาน

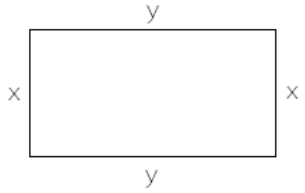
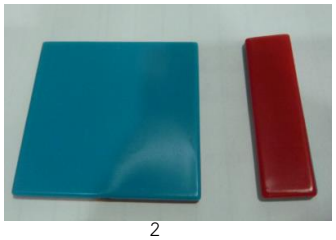
รายการประเมิน	**เกณฑ์การให้คะแนน (คะแนนเต็ม 11 คะแนน)**	**เครื่องมือ**
อย่างน้อย 1 กิจกรรม 3.3 เข้าร่วมรับฟังการนำเสนอผลงานของใบกิจกรรม 1 ถึงใบกิจกรรม 11		
4. การสรุปองค์ความรู้ พิจารณาจากข้อ 4.1 – 4.2 ดังนี้ 4.1 ได้สะท้อนผลการเรียนรู้หรือแลกเปลี่ยนเรียนรู้ในการปฏิบัติใบกิจกรรม 11 4.2 ส่งใบกิจกรรม 11 และปฏิบัติครบทุกประเด็นคำถามในใบกิจกรรม 11	**คะแนนเต็ม 2 คะแนน** โดย ได้ 2 คะแนน เมื่อปฏิบัติครบ 2 ข้อ ได้ 1 คะแนน เมื่อปฏิบัติ 1 ข้อ ได้ 0 คะแนน เมื่อไม่ปฏิบัติทั้งสองข้อ	- แบบประเมินการสรุปองค์ความรู้ตามใบกิจกรรม 11

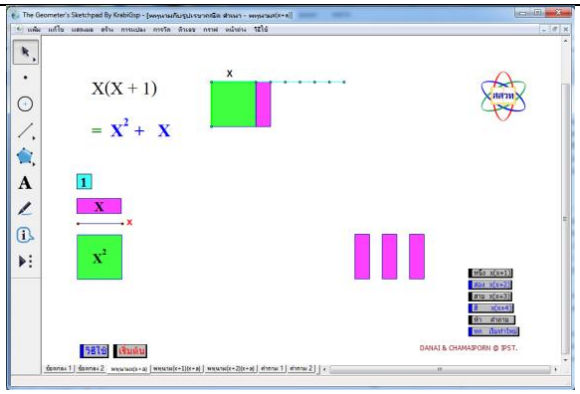
แนวทางปฏิบัติสำหรับวิทยากร

1. ศึกษาเอกสารสำหรับวิทยากรและเอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรมทุกเอกสารใน เรื่อง พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม
2. จัดเตรียมและทดลองใช้โปรแกรม PowerPoint ในไฟล์ เรื่อง พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม.ppt
3. จัดเตรียมและทดลองใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ในไฟล์ เรื่อง พหุนามกับพื้นที่.gsp ผลคูณของพหุนาม.gsp และการแยกตัวประกอบของพหุนาม.gsp
4. ทำสำเนาเอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1-13 (ใบกิจกรรม 1-11 และใบความรู้ 1-2) ตามจำนวนผู้เข้ารับการอบรม
5. แจ้งให้ผู้เข้ารับการอบรมทราบเกี่ยวกับจุดประสงค์ในการอบรมและการประเมินผล (ตัวชี้วัดและเกณฑ์การให้คะแนน) ในช่วงเริ่มต้นของการอบรม
6. ให้ผู้เข้ารับการอบรมบอกชื่อและเลขที่ของตนเองทุกครั้งก่อนนำเสนอผลงานหรืออภิปรายแสดงความคิดเห็น เพื่อความสะดวกของวิทยากรในการให้คะแนนและประเมินผล
7. ดำเนินการจัดการอบรมตามแนวทางการจัดกิจกรรม พร้อมทั้งประเมินผลผู้เข้ารับการอบรมตามรายการประเมินและเครื่องมือที่กำหนด แล้วกรอกคะแนนสรุปลงในเอกสารสำหรับวิทยากร 10: แบบกรอกคะแนน เรื่อง พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม

แนวทางการจัดกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/เอกสาร	วัดและประเมินผล
1. การสร้างองค์ความรู้ (2 ชั่วโมง 15 นาที) **1.1 เอกนามและพหุนาม (30 นาที)** **1.1.1 ขั้นนำสู่เนื้อหา (5 นาที)** วิทยากรสนทนากับผู้เข้ารับการอบรมว่า เรื่อง พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม เป็นเรื่องที่ค่อนข้างเป็นนามธรรม แต่เป็นเรื่องที่เป็นประโยชน์มากในการนำมาใช้แก้สมการ และแก้โจทย์ปัญหาสมการ จากนั้นวิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมช่วยกันคิดตัวอย่างสถานการณ์เพื่อเชื่อมโยงเนื้อหาดังกล่าว วิทยากรนำเสนอเนื้อหาโดยสรุปจากใบความรู้ 1 เรื่อง “พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม” (เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 12) และไฟล์ เรื่อง พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม.ppt **1.1.2 ขั้นสาธิตการสอนและปฏิบัติการ (25นาที)** 1) วิทยากรสนทนากับผู้เข้ารับการอบรมเกี่ยวกับประสบการณ์การสอน เรื่อง เอกนามและพหุนาม พร้อมแลกเปลี่ยนเรียนรู้ปัญหาอุปสรรคที่ผู้เข้ารับการอบรมเคยพบในชั้นเรียน วิทยากรเน้นการให้ความหมายคำศัพท์ใหม่ ๆ ในเรื่องเอกนามและพหุนาม ให้เข้าใจตรงกัน เช่น ค่าคงตัว ตัวแปร เอกนาม สัมประสิทธิ์ ดีกรี พจน์ เอกนามคล้าย เป็นต้น เพราะคำเหล่านี้มีความสำคัญในการทำความเข้าใจเนื้อหาและการคำนวณต่อไป 2) วิทยากรทบทวนหลักเกณฑ์การบวกและการลบจำนวนเต็ม การบวกและการลบเอกนามต้องเป็นเอกนามที่คล้ายกัน พร้อมทั้งเน้นการใช้สมบัติการแจกแจง วิทยากรเน้นให้ผู้เข้ารับการอบรมสังเกตว่า เอกนามที่ไม่คล้ายกันเมื่อนำมาบวกหรือลบกัน ผลลัพธ์ที่ได้จะไม่เป็นเอกนาม ดังนั้นจึงให้ความหมายของพหุนาม และนำเชื่อมโยงสู่รูปธรรมของพหุนาม เช่น ความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 12: ใบความรู้ 1 เรื่อง “พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม” - ไฟล์ เรื่อง พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม.ppt	- สังเกตการตอบคำถาม

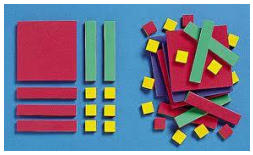
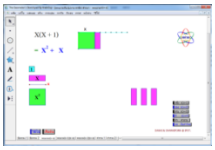
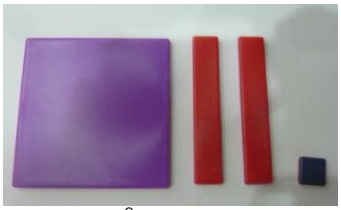
กิจกรรม	สื่อ/เอกสาร	วัดและประเมินผล
 ให้ความกว้างเป็น x ให้ความยาวเป็น y ความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็น 2x+2y หน่วย วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมแต่ละคนปฏิบัติกิจกรรม “การบวกและการลบพหุนาม” แล้วบันทึกในใบกิจกรรม 1 เรื่อง “การบวกและการลบพหุนาม” (เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1) หลังจากนั้นวิทยากรขอตัวแทนผู้เข้ารับการอบรม 2 คน ให้มานำเสนอผลเฉลย โดยวิทยากรและผู้เข้ารับการอบรมทั้งหมดร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง วิทยากรย้ำเตือนในกรณีที่มีเครื่องหมายลบอยู่ข้างหน้าวงเล็บ เมื่อถอดวงเล็บออกให้เปลี่ยนเครื่องหมายที่อยู่ในวงเล็บเป็นตรงกันข้ามและควรเขียนเรียงดีกรีของพหุนามที่จะทำมาบวกหรือมาลบกันจากมากไปน้อย เพื่อความสะดวกต่อการบวกหรือลบและตรวจสอบคำตอบได้ง่าย พร้อมต้องทำอยู่ในรูปผลสำเร็จ 3) วิทยากรแนะนำผู้เข้ารับการอบรมว่า ก่อนการสอนการคูณพหุนาม ควรทบทวนหลักเกณฑ์การคูณจำนวนเต็มและสมบัติของการคูณเลขยกกำลังให้แม่นยำ การคูณพหุนามมีทั้งการคูณระหว่างเอกนามกับเอกนาม เอกนามกับพหุนาม และพหุนามกับพหุนาม จากนั้นวิทยากรยกตัวอย่าง “พหุนามกับรูปเรขาคณิต” โดยใช้สื่อของจริง และสื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad (GSP) ชื่อไฟล์ พหุนามกับรูปเรขาคณิต.gsp เช่น การคูณเอกนามกับพหุนาม x(x + 1)  x(x + 1)  $x^2 + x$	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1: ใบกิจกรรม 1 เรื่อง “การบวกและการลบพหุนาม” - ไฟล์ เรื่อง พหุนามกับพื้นที่.gsp	- สังเกตการตอบคำถาม - สังเกตการปฏิบัติกิจกรรม - ตรวจสอบการทำและส่งใบกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/เอกสาร	วัดและประเมินผล
 วิทยากรยกตัวอย่างการคูณพหุนาม โดยใช้สมบัติการแจกแจง ย้ำความสำคัญของการฝึกทักษะในการคูณ และสังเกตแบบรูปการคูณจากผลคูณของพหุนามที่มีสองพจน์ เช่น $(x + 3)(x + 4) = (x + 3)x + (x + 3)4$ $= x^2 + 3x + 4x + 12$ $= x^2 + 7x + 12$ หรือ $(x + 3)(x + 4) = x(x + 3) + 3(x + 4)$ $= x^2 + 4x + 3x + 12$ $= x^2 + 7x + 12$ วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมสังเกตเครื่องหมายของจำนวนในพจน์กลางและพจน์ท้าย ในกรณี $(x + a)(x + b)$, $(x – a)(x + b)$, $(x + a)(x – b)$ และ $(x – a)(x – b)$ ว่าสัมพันธ์กันอย่างไร วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมแต่ละคนปฏิบัติกิจกรรม “การคูณพหุนาม” จากนั้นบันทึกในใบกิจกรรม 2 เรื่อง “การคูณพหุนาม” (เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 2) หลังจากนั้นวิทยากรขอตัวแทนผู้เข้ารับการอบรม 2 คน ให้มานำเสนอผลเฉลย โดยวิทยากรและผู้เข้ารับการอบรมทั้งหมดร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง จากนั้นวิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมสังเกตผลการคูณพหุนามที่มีสองพจน์ 4) วิทยากรแนะนำผู้เข้ารับการอบรมว่า ก่อนการสอนการหารพหุนาม ควรทบทวนหลักเกณฑ์การหารจำนวนเต็ม	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 2: ใบกิจกรรม 2 เรื่อง “การคูณพหุนาม”	- สังเกตการตอบคำถาม - สังเกตการปฏิบัติกิจกรรม - ตรวจสอบการทำและส่งใบกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/เอกสาร	วัดและประเมินผล
(ด้วยวิธีหารยาว) และสมบัติของการหารเลขยกกำลังให้แม่นยำ ย้ำความรอบคอบเมื่อหารพหุนามด้วยเอกนามที่ใช้หลักเกณฑ์การบวกเศษส่วน การหารพหุนามด้วยพหุนามต้องเขียนพหุนามตัวตั้งและตัวหารเรียงพจน์ที่มีดีกรีมากไปพจน์ที่ดีกรีน้อย โดยในระดับนี้ กล่าวถึงเฉพาะกรณีที่ตัวตั้งและตัวหารเป็นพหุนามที่มีตัวแปรหนึ่งตัวและเป็นตัวแปรตัวเดียวกัน และจะกล่าวถึงพหุนามที่ ตัวตั้ง ตัวหาร ผลหาร และเศษมีสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์เป็นจำนวนเต็มเท่านั้น พร้อมใช้ PowerPoint ในไฟล์ เรื่อง พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม.ppt เพื่อนำเสนอตัวอย่างการหารพหุนามที่เป็นการหารลงตัวและเป็นการหารไม่ลงตัว วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมแต่ละคนปฏิบัติกิจกรรม “การหารพหุนาม” จากนั้นบันทึกในใบกิจกรรม 3 เรื่อง “การหารพหุนาม” (เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 3) หลังจากนั้นวิทยากรขอตัวแทนผู้เข้ารับการอบรม 2 คน ให้มานำเสนอผลเฉลย โดยวิทยากรและผู้เข้ารับการอบรมทั้งหมดร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 3: ใบกิจกรรม 3 เรื่อง “การหารพหุนาม”	- สังเกตการตอบคำถาม - สังเกตการปฏิบัติกิจกรรม - ตรวจสอบการทำและส่งใบกิจกรรม
1.2 เศษส่วนของพหุนาม (45 นาที) **1.2.1 ขั้นนำสู่บทเรียน (5 นาที)** วิทยากรยกตัวอย่างพหุนามง่าย ๆ ที่สามารถใช้สมบัติการแจกแจงในการแยกตัวประกอบของพหุนามเพื่อฝึกการเขียนในรูปการคูณของพหุนามเช่น $3x + 9 = 3(x + 3)$ อันเป็นพื้นฐานในการเรียนเศษส่วนของพหุนาม วิทยากรนำเสนอเนื้อหาเศษส่วนของพหุนาม โดยสรุปจากใบความรู้ 1 เรื่อง “พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม” (เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1) และไฟล์ เรื่อง พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม.ppt	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 12: ใบความรู้ 1 เรื่อง “พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม” - ไฟล์ เรื่อง พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม.ppt	- สังเกตการตอบคำถาม
1.2.2 ขั้นสาธิตการสอนปฏิบัติการ (40 นาที) 1) วิทยากรแนะนำผู้เข้ารับการอบรมว่า พหุนาม สามารถเขียนในรูปเศษส่วนได้ ถ้า P และ Q เป็นพหุนาม โดยที่ $Q \neq 0$		

กิจกรรม	สื่อ/เอกสาร	วัดและประเมินผล
จะเรียก $\frac{P}{Q}$ ว่า “เศษส่วนของพหุนาม” ที่มี P เป็น “ตัวเศษ” และ Q เป็น “ตัวส่วน” วิทยากรยกตัวอย่างเศษส่วนของพหุนามอย่างง่ายที่สามารถใช้สมบัติการแจกแจง ทำให้ตัวเศษและตัวส่วนมีพหุนามหนึ่งเป็นตัวร่วม แล้วนำพหุนามที่เป็นตัวร่วมนั้นไปหารตัวเศษและตัวส่วน ซึ่งทำให้เศษส่วนของพหุนามนั้นเป็นเศษส่วนของพหุนามในรูปผลสำเร็จได้ เช่น $\frac{4x-8}{2x-4}=\frac{4(x-2)}{2(x-2)}=2$ พร้อมเน้นย้ำว่า อาจเกิดความคลาดเคลื่อนของการคำนวณ ถ้ามีการทอนเศษส่วนที่ไม่ได้เป็นตัวร่วมของเศษส่วนของพหุนาม เช่น $\frac{2x^2+3y}{4x}=\frac{x+3y}{2}$ เป็นคำตอบที่ไม่ถูกต้อง ซึ่งตัวหารจะต้องเป็นตัวคูณร่วมของตัวเศษและตัวส่วนของเศษส่วนของพหุนามนั้น เช่น $\frac{2x^2+3xy}{(2x+3y)(x+2y)}=\frac{x(2x+3y)}{(2x+3y)(x+2y)}=\frac{x}{x+2y}$ 2) วิทยากรชี้แนะว่า ในการสอนเรื่องเศษส่วนของพหุนาม ควรสอนเรื่องการคูณและการหารเศษส่วนของพหุนามก่อนเรื่องการบวกและการลบเศษส่วนของพหุนาม เมื่อพิจารณาตามความยากง่ายของเนื้อหาและผลลัพธ์ที่ได้ ต้องทำให้เป็นเศษส่วนของพหุนามในรูปผลสำเร็จทุกครั้ง เนื่องจากการบวกและการลบเศษส่วนของพหุนามมีหลักการเดียวกับการบวกและการลบเศษส่วนของจำนวนเต็ม วิทยากรเน้นย้ำการทำตัวส่วนให้เท่ากันและความรอบคอบในการเปลี่ยนเครื่องหมายเมื่อทำการถอดวงเล็บในการลบพหุนาม 3) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมแต่ละคนปฏิบัติกิจกรรม “การคูณและการหารเศษส่วนของพหุนาม” จากนั้นบันทึกในใบกิจกรรม 4 เรื่อง “เศษส่วนของพหุนาม” (เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 4) หลังจากนั้นวิทยากรขอตัวแทนผู้เข้ารับการอบรม 2 คน ให้มานำเสนอผลเฉลย โดยวิทยากรและผู้เข้ารับการอบรมทั้งหมดร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 4: ใบกิจกรรม 4 เรื่อง “เศษส่วนของพหุนาม”	- สังเกตการตอบคำถาม - สังเกตการปฏิบัติกิจกรรม - ตรวจสอบการทำและส่งใบกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/เอกสาร	วัดและประเมินผล
4) วิทยากรยกตัวอย่างแบบรูปกับพหุนาม ในใบความรู้ 2 เรื่อง “แบบรูปกับพหุนาม” (เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 13) ให้ผู้เข้ารับการอบรมได้เห็นโจทย์ที่แสดงการเชื่อมโยงความรู้เรื่องแบบรูปที่นำเสนอในรูปพหุนามหรือเศษส่วนของพหุนาม และร่วมกันอภิปรายถึงแนวทางการสอน พร้อมร่วมกันยกตัวอย่างอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง **1.3 การแยกตัวประกอบของพหุนาม (1 ชั่วโมง)** **1.3.1 ขั้นนำสู่เนื้อหา (5 นาที)** 1) วิทยากรสนทนากับผู้เข้ารับการอบรมว่า เรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามเป็นพื้นฐานสำคัญของการเรียนพีชคณิตและการคำนวณอื่น ๆ โดยเริ่มเรียนจากการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวที่แต่ละพจน์มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และเมื่อแยกตัวประกอบแล้ว แต่ละพจน์ในพหุนามตัวประกอบมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม จากนั้นเมื่อนักเรียนได้เรียนเรื่องกรณฑ์ที่สองแล้ว จึงจะกล่าวถึงการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสองและของพหุนามที่ทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์และสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ของตัวประกอบเป็นจำนวนจริง รวมทั้งการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสูงกว่าสอง ที่สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์เป็นจำนวนเต็ม และสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ของตัวประกอบเป็นจำนวนเต็ม โดยใช้สมบัติการเปลี่ยนหมู่ สมบัติการสลับที่ สมบัติการแจกแจง หรือใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ 2) วิทยากรเสนอแนะผู้เข้ารับการอบรมว่า ควรฝึกให้นักเรียนมีทักษะในการจัดพหุนามให้อยู่ในรูปที่จะนำสูตรการแยกตัวประกอบต่าง ๆ มาช่วยแยกตัวประกอบได้อย่างคล่องแคล่ว โดยเฉพาะเรื่องการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ วิทยากรนำเสนอเนื้อหาการแยกตัวประกอบของพหุนาม โดย	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 13: ใบความรู้ 2 เรื่อง “แบบรูปกับพหุนาม” - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 12: ใบความรู้ 1 เรื่อง “พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม”	- สังเกตการตอบคำถาม - สังเกตการตอบคำถาม

กิจกรรม	สื่อ/เอกสาร	วัดและประเมินผล
สรุปจากใบความรู้ 1 เรื่อง “พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม” (เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 12) และไฟล์เรื่อง พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม.ppt **1.3.2 ขั้นสาธิตการสอนและปฏิบัติการ (55 นาที)** 1) วิทยากรแบ่งผู้เข้ารับการอบรมเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3-4 คน จากนั้นให้ผู้เข้ารับการอบรมปฏิบัติกิจกรรมในใบกิจกรรม 5 เรื่อง “การพิสูจน์สูตร $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$” ใบกิจกรรม 6 เรื่อง “การพิสูจน์สูตร $(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$” และใบกิจกรรม 7 เรื่อง “การพิสูจน์สูตร $a^2 – b^2 = (a – b)(a + b)$” (เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 5 – 7) เพื่อให้เกิดความคิดรวบยอดของการแยกตัวประกอบ และเรียนคณิตศาสตร์อย่างมีความหมาย โดยวิทยากรยกตัวอย่างสื่อต่าง ๆ ที่นำมาใช้ในการเรียนรู้เรื่องการแยกตัวประกอบได้ เช่น สื่อกระดาษ สื่อไม้ สื่อโปรแกรม GSP สื่ออินเทอร์เน็ต วิทยากรแนะนำว่าสื่อดังกล่าวควรใช้ในช่วงเริ่มต้น จากนั้นการฝึกทักษะเป็นสิ่งจำเป็น    ตัวอย่างการใช้สื่อรูปธรรมอธิบายสิ่งที่เป็นนามธรรม เรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนาม   $x^2 + 2x + 1$ $(x + 1)(x + 1)$   $x^2 – 2x + 1$ $(x – 1)(x – 1)$	- ไฟล์ เรื่อง พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม.ppt - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 5: ใบกิจกรรม 5 เรื่อง “การพิสูจน์สูตร $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$” - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 6: ใบกิจกรรม 6 เรื่อง “การพิสูจน์สูตร $(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$” - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 7: ใบกิจกรรม 7 เรื่อง “การพิสูจน์สูตร $a^2 – b^2 = (a – b)(a + b)$” - ไฟล์ เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนาม.gsp	- สังเกตการตอบคำถาม - สังเกตการปฏิบัติกิจกรรม - ตรวจสอบการทำและส่งใบกิจกรรม - สังเกตการตอบคำถาม - สังเกตการปฏิบัติกิจกรรม - ตรวจสอบการทำและส่งใบกิจกรรม - สังเกตการตอบคำถาม - สังเกตการปฏิบัติกิจกรรม - ตรวจสอบการทำและส่งใบกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/เอกสาร	วัดและประเมินผล
2) วิทยากรอธิบายการแยกตัวประกอบของพหุนามที่เขียนได้ในรูป $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัว ที่ $a \neq 0$ และ x เป็นตัวแปร แบ่งเป็น 3 กรณี คือ กรณีที่ 1 เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ c = 0 ใช้สมบัติการแจกแจง กรณีที่ 2 เมื่อ a = 1, b และ c เป็นจำนวนเต็ม และ $c \neq 0$ ถ้าสามารถหาจำนวนเต็มสองจำนวนที่คูณกันได้เท่ากับพจน์ที่เป็นค่าคงตัวคือ c และบวกกันได้เท่ากับสัมประสิทธิ์ของ x คือ b ถ้าให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มสองจำนวน ซึ่ง mn = c และ m + n = b จะได้ว่า $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$ ถ้าไม่สามารถหาจำนวนเต็มสองจำนวนที่คูณกันได้เท่ากับ c และบวกกันได้เท่ากับ b ก็ไม่สามารถแยกตัวประกอบของ $x^2 + bx + c$ ออกเป็นตัวประกอบที่เป็นพหุนามดีกรีหนึ่ง ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม กรณีที่ 3 เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม และ $a \neq 0$, $b \neq 0$ และ $c \neq 0$ วิทยากรอธิบายการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ได้ว่า • $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ เรียก $(a + b)^2$ ว่า “ผลบวกทั้งหมดยกกำลังสอง” หรือ $(\text{หน้า})^2 + 2(\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2 = (\text{หน้า} + \text{หลัง})^2$ • $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ เรียก $(a - b)^2$ ว่า “ผลต่างทั้งหมดยกกำลังสอง” หรือ $(\text{หน้า})^2 - 2(\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2 = (\text{หน้า} - \text{หลัง})^2$ • $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ เรียก $a^2 - b^2$ ว่า “ผลต่างของกำลังสอง” หรือ $(\text{หน้า})^2 - (\text{หลัง})^2 = (\text{หน้า} - \text{หลัง})(\text{หน้า} + \text{หลัง})$	- สื่อเรียนรู้จากอินเทอร์เน็ตที่เว็บไซต์ http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=216	

กิจกรรม	สื่อ/เอกสาร	วัดและประเมินผล
3) วิทยากรเน้นว่าการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง บางครั้งไม่สามารถหาจำนวนเต็มสองจำนวนมาคูณกันได้พจน์หลัง และมาบวกกันได้พจน์กลาง ดังนั้นการทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์และผลต่างกำลังสองจึงเป็นวิธีที่นำมาใช้ได้ เช่น $x^2 + 10x + 6 = [x^2 + 2(5)x + 5^2] - 5^2 + 6$ $= (x + 5)^2 - 19$ $= (x + 5)^2 - (\sqrt{19})^2$ $= (x + 5 + \sqrt{19})(x + 5 - \sqrt{19})$ หรือวิธีหนึ่งที่คิดสะดวก ได้แก่ จำนวนที่บวกเข้าและลบออกคือกำลังสองของ $\frac{1}{2}$ ของสัมประสิทธิ์พจน์กลาง $x^2 + 10x + 6 = [x^2 + 10x + (\frac{10}{2})^2] - (\frac{10}{2})^2 + 6$ สำหรับกรณีที่ $a \neq 1$ ให้ใช้สมบัติการแจกแจงทำสัมประสิทธิ์ของ x^2 ให้เป็น 1 ก่อน 4) วิทยากรนำเสนอการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสูงกว่าสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม ได้แก่ • พหุนามที่อยู่ในรูปผลบวกของกำลังสาม $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ • พหุนามที่อยู่ในรูปผลต่างของกำลังสาม $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ 5) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมแต่ละคนปฏิบัติกิจกรรม “การแยกตัวประกอบของพหุนาม” จากนั้นบันทึกในใบกิจกรรม 8 เรื่อง “การแยกตัวประกอบของพหุนาม” (เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 8) หลังจากนั้นวิทยากรขอตัวแทนผู้เข้ารับการอบรมจำนวน 3 คน ให้เฉลยคำตอบ โดยวิทยากรและผู้เข้ารับการอบรมทั้งหมดร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง 6) วิทยากรแนะนำเกมเพื่อฝึกทักษะในการแยก	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 8: ใบกิจกรรม 8 เรื่อง “การแยกตัวประกอบของพหุนาม” - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 9:	- สังเกตการตอบคำถาม - สังเกตการปฏิบัติกิจกรรม - ตรวจสอบการทำและส่งใบกิจกรรม - สังเกตการตอบคำถาม - สังเกตการปฏิบัติ

กิจกรรม	สื่อ/เอกสาร	วัดและประเมินผล
ตัวประกอบของพหุนาม เช่น เกมจิ๊กซอร์พหุนาม ให้ผู้เข้ารับการอบรมได้ลองสร้าง แล้วบันทึกในใบกิจกรรม 9 เรื่อง “เกมจิ๊กซอร์การแยกตัวประกอบของพหุนาม” (เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 9)	ใบกิจกรรม 9 เรื่อง “เกมจิ๊กซอร์การแยกตัวประกอบของพหุนาม”	กิจกรรม - ตรวจสอบการทำและส่งใบกิจกรรม
2. การปฏิบัติตามเนื้อหาสาระ (35 นาที) 1) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมจับคู่เลือกเนื้อหา เรื่อง พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม มาออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ จำนวน 1 คาบ โดยอาจเลือกใช้สื่อการเรียนรู้ที่ผู้เข้ารับการอบรมสร้าง หรือสื่อการเรียนรู้ที่วิทยากรแนะนำ โดยบันทึกในใบกิจกรรม 10 เรื่อง “ออกแบบกิจกรรม/เกม เรื่อง พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม” (เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 10) โดยใช้เวลาประมาณ 20 นาที 2) วิทยากรขออาสาสมัครให้ผู้เข้ารับการอบรมจำนวน 3 คู่ นำเสนอกิจกรรมหรือเกมที่ตนออกแบบ พร้อมสาธิตวิธีการจัดกิจกรรม โดยวิทยากรและผู้เข้ารับการอบรมที่เหลือร่วมกันอภิปรายพร้อมให้ข้อเสนอแนะ ใช้เวลาประมาณ 15 นาที	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 10: ใบกิจกรรม 10 เรื่อง “ออกแบบกิจกรรม/เกม เรื่อง พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม”	- สังเกตการตอบคำถาม - สังเกตการปฏิบัติกิจกรรม - ตรวจสอบการทำและส่งใบกิจกรรม - สังเกตจากการสะท้อนผลการเรียนรู้และการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ - ตรวจสอบความถูกต้องและเหมาะสมในการออกแบบกิจกรรม - ตรวจสอบการส่งใบกิจกรรม
3. การสรุปบทเรียน (10 นาที) 1) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมทำใบกิจกรรมที่ 11 เรื่อง “การสรุปองค์ความรู้” (เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 11) ใช้เวลาทำ 5 นาที 2) วิทยากรนำอภิปรายเพื่อสรุปสาระสำคัญที่ได้ และเน้นย้ำเรื่องความเข้าใจคลาดเคลื่อน 3) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมซักถามในประเด็นที่สงสัยเพิ่มเติม	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 11: ใบกิจกรรม 11 เรื่อง “การสรุปองค์ความรู้”	- สังเกตการสรุปสาระสำคัญที่ได้และประเด็นในการซักถาม - ตรวจสอบการส่งใบกิจกรรม

เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม

ใบกิจกรรม 1

เรื่อง “การบวกและการลบพหุนาม”

---

1. จงหาผลบวกและผลลบของพหุนามต่อไปนี้โดยใช้พหุนามแรกที่กำหนดให้เป็นตัวตั้ง

ข้อ	พหุนาม	ผลบวกของพหุนาม	ผลลบของพหุนาม
1	$12x -1$ กับ $6x^2$		
2	$-12x+15$ กับ $5x$		
3	$7xy-st$ กับ $-10st+3xy$		
4	$13r-2t-2s$ กับ $-14r+11s-7t$		
5	$2x +3r$ กับ $-4x+r-y$		
6	$-9x-14$ กับ $(3-7x-5x^2)+(2x^2-6)$		

2. กำหนดให้ A แทนพหุนาม $3x^2+2x-5$

B แทนพหุนาม $-5x^2-4x+7$

C แทนพหุนาม $6x^2-x+8$

จะได้ $A + B = (3x^2+2x-5) + (-5x^2-4x+7)$

$= 3x^2+2x-5-5x^2-4x+7$

$= -2x^2-2x+2$

จงหาพหุนามต่อไปนี้

1) $A + C =$ .....

2) $A – C =$ .....

3) $(A – B) – C =$ .....

4) $A – (B + C) =$ .....

5) $A – (B + A) =$ .....

ใบกิจกรรม 2

เรื่อง “การคูณพหุนาม”

จงหาผลคูณของพหุนามต่อไปนี้

1. $(x + 3)(x + 6)$ = ...
2. $(x + 2)(x - 1)$ = ...
3. $(x - 3)(x - 5)$ = ...
4. $(x - 2)(x + 3)$ = ...
5. $(x + 3)(x + 3)$ = ...
6. $(x - 1)(x + 1)$ = ...
7. $(x - 5)(x + 5)$ = ...
8. $(x - 2)(2x)$ = ...
9. $(2 - 3x)(1 + 5x)$ = ...
10. $(x + 2)(7x^2 + 4)$ = ...
11. $(x - 1)(x^2 - 1)$ = ...
12. $(x - 1)(x - 1)^2$ = ...
13. $(x+y)^2(x + y)$ = ...
14. $(x - y)^2(x + y)$ = ...
15. $(x^2 - xy + y^2)(x+y)$ = ...
16. $(x^2 + xy + y^2)(x - y)$ = ...

ใบกิจกรรม 3

เรื่อง “การหารพหุนาม”

จงหาผลหารพหุนามต่อไปนี้

1. $(3x^2+8x) \div x$ = ...
2. $(-12x^2+28x) \div (-4x)$ = ...
3. $\frac{4x^2-x}{5x}$ = ...
4. $\frac{-18x^2-36}{-9}$ = ...
5. $\frac{-12x^3+10x^2-6x}{-2x}$ = ...
6. $\frac{-4x+6}{2x-3}$ = ...
7. $\frac{3x+5}{x-1}$ = ...
8. $\frac{4x^2-7x-15}{x-3}$ = ...
9. $\frac{8x^2-7x-6}{2x^2-x}$ = ...
10. $\frac{12x^3-23x^2+23x-30}{3x-5}$ = ...

ทด

ใบกิจกรรม 4

เรื่อง “เศษส่วนของพหุนาม”

จงหาผลลัพธ์ของเศษส่วนของพหุนามต่อไปนี้

1. $\frac{-12x^2y}{5y^3} \times \frac{5xy}{3y^2}$ = ...

2. $\frac{x+1}{4x-5} \times \frac{8x-10}{7x+7}$ = ...

3. $\frac{3x^5y^2}{x^2} \div \frac{-5x^3y^3}{y}$ = ...

4. $\frac{3x^2-9x}{x-1} \div \frac{4x+12}{x+3}$ = ...

5. $\frac{x+1}{5} + \frac{x-1}{3}$ = ...

6. $\frac{x+1}{x} - \frac{x-1}{x}$ = ...

7. $\frac{x-y}{2} + \frac{x^2+xy}{x+y}$ = ...

8. $\frac{3}{x-y} + \frac{4}{x+y}$ = ...

9. $\frac{2y}{5} - \frac{y+1}{2y} + \frac{5}{y}$ = ...

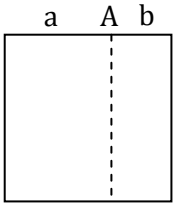
10. $\frac{2x-1}{2} - \frac{1}{3x} + \frac{x+1}{3}$ = ...

ใบกิจกรรม 5

เรื่อง “การพิสูจน์สูตร $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$”

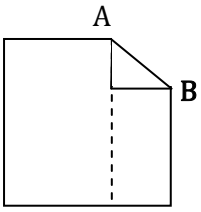
แนวการดำเนินกิจกรรม

1. ตัดกระดาษเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสความยาวตามต้องการ พับตามแนวตั้งผ่านจุด A โดยแบ่งพื้นที่เป็นสองส่วนที่ไม่เท่ากัน ให้ส่วนหนึ่งยาว a และส่วนที่เหลือยาว b ดังรูป

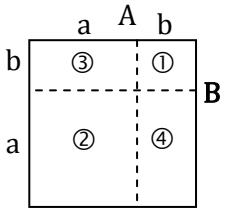


พื้นที่ของกระดาษรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่ากับ $(a+b)^2$

2. พับกระดาษที่มุมขวามือด้านบน แล้วกำหนดจุดที่ได้จากการพับด้านขวามือด้านบนเป็น B



3. พับกระดาษตามแนวนอนผ่านจุด B ดังรูป จะได้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 2 รูป คือ รูป ① และรูป ② และรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 2 รูป คือรูป ③และรูป ④



พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อพิจารณาจากพื้นที่ทั้งสี่รูป เท่ากับ $a^2+2ab+b^2$

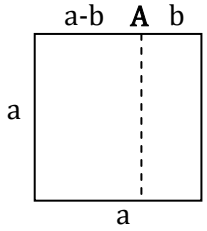
ฉะนั้นความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของรูปในข้อ 1 และข้อ 3 ในรูปการแยกตัวประกอบของพหุนาม จะได้ $(a+b)^2= a^2+2ab+b^2$

ใบกิจกรรม 6

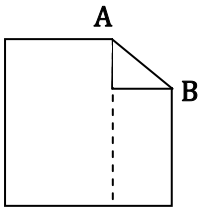
เรื่อง “การพิสูจน์สูตร $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$”

แนวการดำเนินกิจกรรม

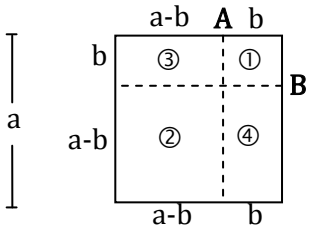
1. ตัดกระดาษเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสความยาวตามต้องการ กำหนดให้แต่ละด้านยาว a พับตามแนวตั้งผ่านจุด A โดยแบ่งพื้นที่เป็นสองส่วนที่ไม่เท่ากัน ให้ส่วนหนึ่งยาว b และส่วนที่เหลือยาว a-b ดังรูป



2. พับกระดาษที่มุมขวามือด้านบน แล้วกำหนดจุดที่ได้จากการพับด้านขวามือด้านบนเป็น B



3. พับกระดาษตามแนวนอนผ่านจุด B ดังรูป จะได้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 2 รูป คือ รูป ① และ รูป ② และรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 2 รูป คือรูป ③ และรูป ④



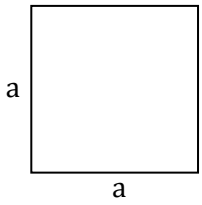
พิจารณาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูป ②เท่ากับ a^2-b(a-b) -b(a-b)-b^2= a^2-2ab+b^2 ฉะนั้นความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ในข้อ 3 ในรูปการแยกตัวประกอบของพหุนาม จะได้ $(a-b)^2$=a^2-2ab+b^2

ใบกิจกรรม 7

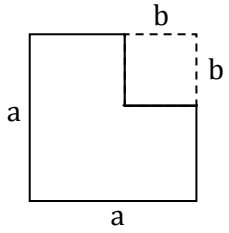
เรื่อง “การพิสูจน์สูตร $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$”

แนวการดำเนินกิจกรรม

1. ตัดกระดาษเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสความยาวตามต้องการ กำหนดให้แต่ละด้านยาว a ดังรูป

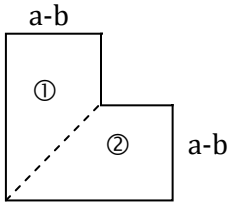


2. ตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเล็กที่มุมหนึ่ง ให้มีความยาวตามต้องการ กำหนดแต่ละด้านยาว b

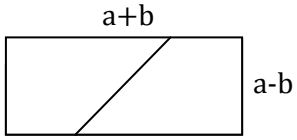


พื้นที่ของกระดาษส่วนที่เหลือเท่ากับ a^2-b^2

3. ตัดกระดาษส่วนที่เหลือให้มีพื้นที่สองส่วนเท่า ๆ กัน โดยตัดตามแนวเส้นทแยงมุม



4. นำกระดาษที่ตัดแล้ว (สังเกตเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู) มาต่อกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า จะได้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีด้านกว้างยาว a-b หน่วย และมีด้านยาวยาว a+b หน่วย



พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจากรูปที่ประกอบได้เท่ากับ $(a+b)(a-b)$

ฉะนั้นความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของรูปในข้อ 2 และข้อ 4 ในรูปการแยกตัวประกอบของพหุนาม จะได้ $a^2-b^2= (a+b)(a-b)$

ใบกิจกรรม 8

เรื่อง “การแยกตัวประกอบของพหุนาม”

จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1. $x^2+9x+14$ = ...
2. $x^2+9x-10$ = ...
3. x^2-81 = ...
4. $x^2+15x-54$ = ...
5. $m^2-12x-85$ = ...
6. $9y^2-6y+1$ = ...
7. $5x^2+14x-3$ = ...
8. $4+10x+6x^2$ = ...
9. $4y^2-36$ = ...
10. $x^2+16x+64$ = ...
11. $x^2-60x+900$ = ...
12. $(4a^2-12a+9)-(5a+1)^2$ = ...
13. $x^2+8x+10$ = ...
14. $3x^2+5x-1$ = ...
15. $27x^3+64$ = ...

ชวนคิด

1. 997^2 = ...
2. $2{,}547^2-453^2$ = ...

ใบกิจกรรม 9

เรื่อง “เกมจิ๊กซอว์การแยกตัวประกอบของพหุนาม”

$x^2+4x-21$	x^2+3x-4	x^2-64	x^2+8x+7
x^2+6x+9	x^2	$(x-2)(x+2)$	x^2+6x
$(x)(3x)$	x^2-4	$x^2+7x+10$	$(x)(x)$
$(x+4)(x-1)$	$(x+5)(x+2)$	$(x+10)(x+2)$	$(x-2)(x+4)$
$(x+2)(x+10)$	$x^2+9x+20$	$x^2+20x+100$	$(x+5)(x+4)$
$x^2-7x-18$	$x^2+10x+25$	x^2-1	x^2+4x+4
$(x+3)^2$	$(3x)(x)$	$(5x)(3x)$	x^2+3x-4
$(x+10)(x+2)$	$(x+4)(x-1)$	$(x+4)(x+3)$	$(x+7)(x-3)$
x^2+2x-8	$x^2+7x+10$	$x^2+12x+20$	x^2-4x-5
$3(x+2)$	$x(x+6)$	$(x+2)^2$	$(x+5)(x+2)$
$(x+10)^2$	$(x-10)(x-4)$	$x^2+12x+20$	$x^2+9x+20$
x^2-5x	$3x+6$	x^2+6x	$(x+6)(x+10)$
$x(x+1)$	x^2+3x-4	$(5x)(3x)$	$3x+6$
$(x-8)(x+8)$	$3x^2$	x^2+x	$x^2+20x+100$
$(x+2)(x-9)$	$(x-8)(x+8)$	$(x+9)(x-6)$	$(x+5)^2$
$15x^2$	$(x+2)(x-9)$	$(x+1)(x-5)$	$(x+7)(x+1)$
$x^2-14x+40$	$(x+1)(x-5)$	$(5x)(3x)$	
$(x+10)^2$	$(x+2)(x-9)$	$(x+1)(x-5)$	
$x^2+12x+20$	$(x+1)(x-5)$	$(x+1)(x-5)$	

ใบกิจกรรม 10

เรื่อง “ออกแบบกิจกรรม/เกม เรื่อง พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม”

จากการเรียนรู้เนื้อหา สื่อ และการปฏิบัติกิจกรรมต่าง ๆ ในครั้งนี้ ให้ผู้เข้ารับการอบรมเลือกเนื้อหาในสาระที่ 2 เรื่อง พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนามมาออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ หรือเกมการศึกษา โดยย่อเพื่อใช้ในหนึ่งคาบเรียน โดยมีประเด็นดังนี้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

2. ลักษณะของกิจกรรมการเรียนรู้ หรือ ลักษณะของเกม

ใบกิจกรรม 11

เรื่อง “การสรุปองค์ความรู้”

การเข้ารับการอบรบ เรื่องพหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนามในครั้งนี้ ขอให้ผู้เข้ารับการอบรมสรุปองค์ความรู้ที่ได้ในประเด็นต่อไปนี้

1. เนื้อหาความรู้ในเรื่อง พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนามที่ได้รับเพิ่มเติมก่อนเข้ารับการอบรม
2. เกร็ดความรู้/เทคนิควิธีการจัดการเรียนรู้ที่ได้รับ
3. สิ่งที่จะนำไปประยุกต์และปรับใช้กับการสอนของตนเอง

ใบความรู้ 1

เรื่อง “พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม”

สาระสำคัญ

1. ข้อความที่เขียนในรูปสัญลักษณ์ เช่น $6x, -\frac{3}{2}x, 4x^2$ ประกอบด้วยตัวเลขและตัวอักษร เรียกตัวเลขว่า **ค่าคงตัว** และเรียกตัวอักษรว่า **ตัวแปร**
2. ข้อความที่เขียนอยู่ในรูปสัญลักษณ์ เช่น $3, 7^2, 2x, x + 4, \frac{x}{5}, x - 7, x^8, \frac{x+2}{3x-1}, x + y - 6$ เรียกว่า **นิพจน์**
3. นิพจน์ที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปการคูณของค่าคงตัวกับตัวแปรตั้งแต่หนึ่งตัวขึ้นไป และเลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวเป็นศูนย์หรือจำนวนเต็มบวก เรียกว่า **เอกนาม** (monomial)

   นิพจน์ที่เป็นเอกนาม เช่น $2x, -\frac{3}{2}x, 5, 0$

   นิพจน์ที่ไม่เป็นเอกนาม เช่น $4x^{-2}, 3x + 4, \frac{2x}{y^2}, 4 - ab^2$

   เอกนามประกอบด้วยสองส่วน คือ ส่วนที่เป็นค่าคงตัว และส่วนที่อยู่ในรูปตัวแปรหรือการคูณกันของตัวแปร เรียกส่วนที่เป็นค่าคงที่ว่า **สัมประสิทธิ์** ของเอกนาม และเรียกผลบวกของเลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวในเอกนามว่า **ดีกรี** ของเอกนาม เช่น

   $2x$ เป็นเอกนามที่มี 2 เป็นสัมประสิทธิ์ มี x เป็นตัวแปร และมีดีกรี 1

   $5x^8y^2$ เป็นเอกนามที่มี 5 เป็นสัมประสิทธิ์ มี x และ y เป็นตัวแปร และมีดีกรี 10

   4 เป็นเอกนามที่มี 4 เป็นสัมประสิทธิ์ มีดีกรี 0 เนื่องจาก $4 = 4x^0$ หรือ $4 = 4y^0$ ตัวแปรเป็นตัวอักษรใดก็ได้ จึงไม่กล่าวถึงตัวแปรในกรณีที่เอกนามนั้นเป็นค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์

   0 เป็นเอกนามที่ไม่สามารถบอกดีกรีได้ เนื่องจาก $0 = 0x^2$ หรือ $0 = 0x^5$ หรือ $0 = 0x^n$ และไม่กล่าวถึงตัวแปรของเอกนามศูนย์
4. เอกนามสองเอกนาม **คล้ายกัน** ก็ต่อเมื่อ เอกนามทั้งสองมีตัวแปรชุดเดียวกัน และเลขชี้กำลังของตัวแปรเดียวกันในแต่ละเอกนามเท่ากัน เช่น $2x$ คล้ายกันกับ $-3x$, $5a^2bc^3$ คล้ายกันกับ $7a^2bc^3$
5. ผลบวกของเอกนามที่คล้ายกัน

   = (ผลบวกของสัมประสิทธิ์) x (ส่วนที่อยู่ในรูปของตัวแปรหรือการคูณกันของตัวแปร)
6. ผลลบของเอกนามที่คล้ายกัน

   = (ผลลบของสัมประสิทธิ์) x (ส่วนที่อยู่ในรูปของตัวแปรหรือการคูณกันของตัวแปร)
7. นิพจน์ที่อยู่ในรูปเอกนาม หรือเขียนอยู่ในรูปการบวกของเอกนามตั้งแต่สองเอกนามขึ้นไป เรียกว่า **พหุนาม** (polynomial) เช่น $2, -\frac{3}{5}, 4r, 3x^2y, 2x + 4y, 2ab^3 + 4c^2d - 3e^4$

7.1 สำหรับพหุนามใด ๆ จะเรียกแต่ละเอกนามที่อยู่ในพหุนามนั้นว่า **พจน์** ของพหุนาม

7.2 กรณีที่พหุนามนั้นมีเอกนามที่คล้ายกัน จะเรียกเอกนามที่คล้ายกันว่า **พจน์ที่คล้ายกัน**

7.3 พหุนามที่ไม่มีพจน์คล้ายกันเลย เรียกว่า **พหุนามในรูปผลสำเร็จ** โดยจะเรียกดีกรีสูงสุดของพจน์ของพหุนามในรูปผลสำเร็จว่า **ดีกรี** ของพหุนาม

8. การหาผลบวกของพหุนามทำได้โดยนำพหุนามมาเขียนในรูปการบวก และถ้ามีพจน์ที่คล้ายกันให้บวกพจน์ที่คล้ายกันเข้าด้วยกัน

9. การหาผลลบของพหุนามสองพหุนาม ทำตามข้อตกลงดังนี้

พหุนามตัวตั้ง – พหุนามตัวลบ = พหุนามตัวตั้ง + พหุนามตรงข้ามของพหุนามตัวลบ

10. การหาผลคูณระหว่างพหุนามกับพหุนามทำได้โดย คูณแต่ละพจน์ของพหุนามหนึ่งกับทุก ๆ พจน์ของอีกพหุนามหนึ่ง แล้วนำผลคูณเหล่านั้นมาบวกกัน

11. การหารพหุนามสามารถเขียนความสัมพันธ์ของตัวตั้ง ตัวหาร ผลหาร และเศษได้ดังนี้

ตัวตั้ง = (ตัวหาร x ผลหาร) + เศษ

12. เศษส่วนของพหุนาม ถ้า P และ Q เป็นพหุนาม โดยที่ $Q \neq 0$ จะเรียก $\frac{P}{Q}$ ว่า **เศษส่วนของพหุนาม** ที่มี P เป็น **ตัวเศษ** และ Q เป็น **ตัวส่วน**

12.1 การคูณเศษส่วนของพหุนาม

เมื่อ P, Q, R และ S เป็นพหุนาม โดยที่ $Q \neq 0$ และ $S \neq 0$ จะได้ว่า $\frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{P \times R}{Q \times S}$

12.2 การหารเศษส่วนของพหุนาม

เมื่อ P, Q, R และ S เป็นพหุนาม โดยที่ $Q \neq 0$ และ $S \neq 0$ จะได้ว่า $\frac{P}{Q} \div \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \times \frac{S}{R}$

12.3 การบวกและการลบเศษส่วนของพหุนาม

เมื่อ P, Q และ R เป็นพหุนาม โดยที่ $Q \neq 0$ จะได้ว่า $\frac{P}{Q} + \frac{R}{Q} = \frac{P+R}{Q}$

และ $\frac{P}{Q} - \frac{R}{Q} = \frac{P-R}{Q}$

นิยมเขียนผลบวก ผลลบ ผลคูณ และผลหาร ที่ได้ให้เป็นเศษส่วนของพหุนามในรูปผลสำเร็จ

13. การแยกตัวประกอบของพหุนามใด คือการเขียนพหุนามนั้นในรูปการคูณกันของพหุนามที่มีดีกรีต่ำกว่า

14. รูปทั่วไปของพหุนามที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ คือ $a^2 + 2ab + b^2$ และ $a^2 - 2ab + b^2$ เมื่อ a และ b เป็นพหุนาม แยกตัวประกอบได้ดังนี้

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ และ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

15. รูปทั่วไปของพหุนามที่อยู่ในรูปผลต่างกำลังสอง คือ $a^2 - b^2$ เมื่อ a และ b เป็นพหุนาม แยกตัวประกอบได้ดังนี้

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

16. รูปทั่วไปของพหุนามที่อยู่ในรูปผลบวกของกำลังสาม คือ $a^3 + b^3$ เมื่อ a และ b เป็นพหุนาม แยกตัวประกอบได้ดังนี้

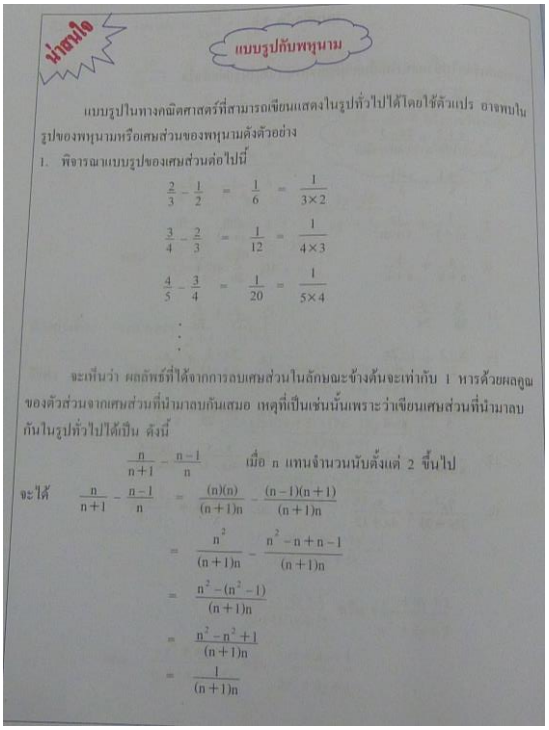
    $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

17. รูปทั่วไปของพหุนามที่อยู่ในรูปผลต่างของกำลังสาม คือ $a^3 - b^3$ เมื่อ a และ b เป็นพหุนาม แยกตัวประกอบได้ดังนี้

    $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

ใบความรู้ 2

เรื่อง “แบบรูปกับพหุนาม”



น่ารู้

แบบรูปกับพหุนาม

แบบรูปในทางคณิตศาสตร์ที่สามารถเขียนแสดงในรูปทั่วไปได้โดยใช้ตัวแปร อาจพบในรูปของพหุนามหรือเศษส่วนของพหุนามดังตัวอย่าง

1. พิจารณาแบบรูปของเศษส่วนต่อไปนี้

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{2} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3\times 2}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{3} = \frac{1}{12} = \frac{1}{4\times 3}$$

$$\frac{4}{5}-\frac{3}{4} = \frac{1}{20} = \frac{1}{5\times 4}$$

$$\vdots$$

จะเห็นว่า ผลลัพธ์ที่ได้จากการลบเศษส่วนในลักษณะข้างต้นจะเท่ากับ 1 หารด้วยผลคูณของตัวส่วนจากเศษส่วนที่นำมาลบกันเสมอ เหตุที่เป็นเช่นนั้นเพราะว่าเขียนเศษส่วนที่นำมาลบกันในรูปทั่วไปได้เป็น ดังนี้

$$\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}$$ เมื่อ n แทนจำนวนนับตั้งแต่ 2 ขึ้นไป

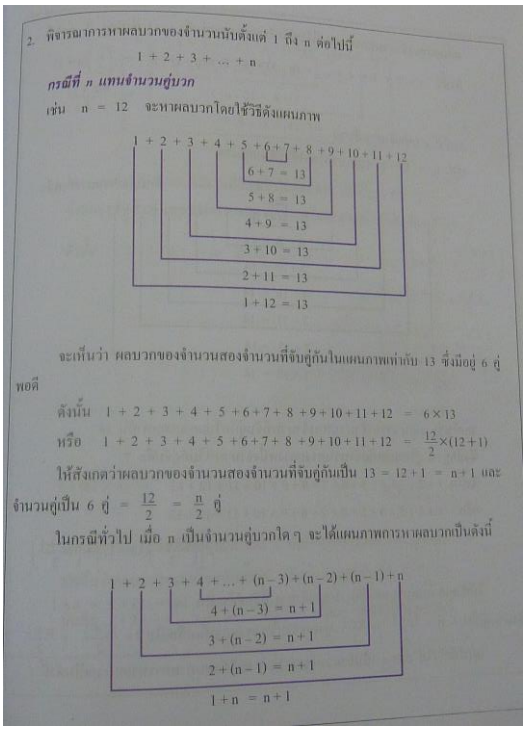
จะได้ $$\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n} = \frac{(n)(n)}{(n+1)n}-\frac{(n-1)(n+1)}{(n+1)n}$$

$$= \frac{n^2}{(n+1)n}-\frac{n^2-n+n-1}{(n+1)n}$$

$$= \frac{n^2-(n^2-1)}{(n+1)n}$$

$$= \frac{n^2-n^2+1}{(n+1)n}$$

$$= \frac{1}{(n+1)n}$$



2. พิจารณาการหาผลบวกของจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง n ต่อไปนี้

$$1+2+3+\ldots+n$$

กรณีที่ n แทนจำนวนคู่บวก

เช่น n = 12 จะหาผลบวกโดยใช้วิธีดังแผนภาพ

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12$$

$6+7 = 13$

$5+8 = 13$

$4+9 = 13$

$3+10 = 13$

$2+11 = 13$

$1+12 = 13$

จะเห็นว่า ผลบวกของจำนวนสองจำนวนที่จับคู่กันในแผนภาพเท่ากับ 13 ซึ่งมีอยู่ 6 คู่ พอดี

ดังนั้น $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 = 6\times 13$

หรือ $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 = \frac{12}{2}\times(12+1)$

ให้สังเกตว่าผลบวกของจำนวนสองจำนวนที่จับคู่กันเป็น $13 = 12+1 = n+1$ และจำนวนคู่เป็น 6 คู่ $= \frac{12}{2} = \frac{n}{2}$ คู่

ในกรณีทั่วไป เมื่อ n เป็นจำนวนคู่บวกใด ๆ จะได้แผนภาพการหาผลบวกเป็นดังนี้

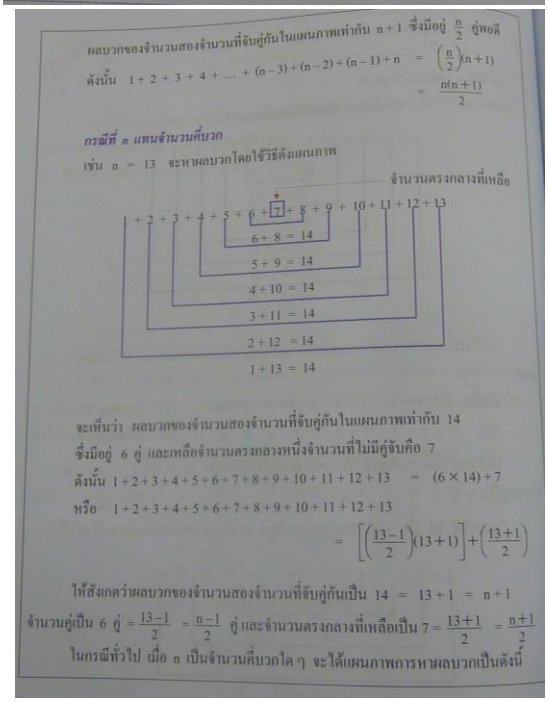
$$1+2+3+4+\ldots+(n-3)+(n-2)+(n-1)+n$$

$4+(n-3) = n+1$

$3+(n-2) = n+1$

$2+(n-1) = n+1$

$1+n = n+1$



ผลบวกของจำนวนสองจำนวนที่จับคู่กันในแผนภาพเท่ากับ $n+1$ ซึ่งมีอยู่ $\frac{n}{2}$ คู่พอดี

ดังนั้น $1+2+3+4+\ldots+(n-3)+(n-2)+(n-1)+n = \left(\frac{n}{2}\right)(n+1)$

$= \frac{n(n+1)}{2}$

กรณีที่ n แทนจำนวนคี่บวก

เช่น n = 13 จะหาผลบวกโดยใช้วิธีดังแผนภาพ

จำนวนตรงกลางที่เหลือ

$$1+2+3+4+5+6+\boxed{7}+8+9+10+11+12+13$$

$6+8 = 14$

$5+9 = 14$

$4+10 = 14$

$3+11 = 14$

$2+12 = 14$

$1+13 = 14$

จะเห็นว่า ผลบวกของจำนวนสองจำนวนที่จับคู่กันในแผนภาพเท่ากับ 14

ซึ่งมีอยู่ 6 คู่ และเหลือจำนวนตรงกลางหนึ่งจำนวนที่ไม่มีคู่จับคือ 7

ดังนั้น $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13 = (6\times 14)+7$

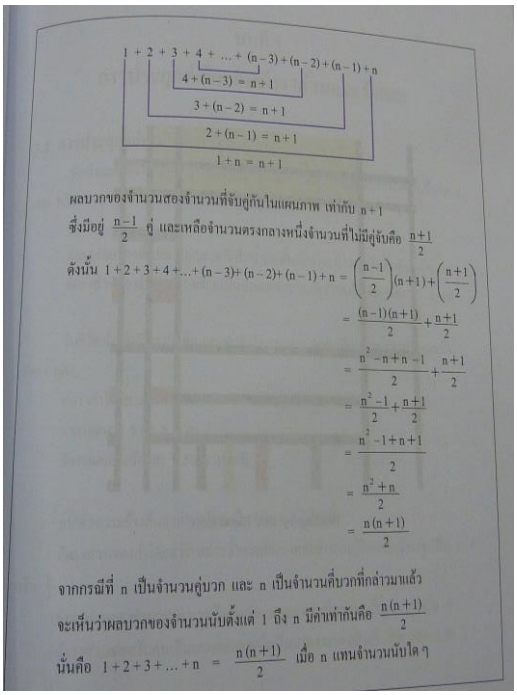
หรือ $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13$

$= \left[\left(\frac{13-1}{2}\right)(13+1)\right]+\left(\frac{13+1}{2}\right)$

ให้สังเกตว่าผลบวกของจำนวนสองจำนวนที่จับคู่กันเป็น $14 = 13+1 = n+1$

จำนวนคู่เป็น 6 คู่ $= \frac{13-1}{2} = \frac{n-1}{2}$ คู่ และจำนวนตรงกลางที่เหลือเป็น $7 = \frac{13+1}{2} = \frac{n+1}{2}$

ในกรณีทั่วไป เมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวกใด ๆ จะได้แผนภาพการหาผลบวกเป็นดังนี้



$$1+2+3+4+\ldots+(n-3)+(n-2)+(n-1)+n$$

$4+(n-3) = n+1$

$3+(n-2) = n+1$

$2+(n-1) = n+1$

$1+n = n+1$

ผลบวกของจำนวนสองจำนวนที่จับคู่กันในแผนภาพ เท่ากับ $n+1$

ซึ่งมีอยู่ $\frac{n-1}{2}$ คู่ และเหลือจำนวนตรงกลางหนึ่งจำนวนที่ไม่มีคู่จับคือ $\frac{n+1}{2}$

ดังนั้น $1+2+3+4+\ldots+(n-3)+(n-2)+(n-1)+n = \left(\frac{n-1}{2}\right)(n+1)+\left(\frac{n+1}{2}\right)$

$= \frac{(n-1)(n+1)}{2}+\frac{n+1}{2}$

$= \frac{n^2-n+n-1}{2}+\frac{n+1}{2}$

$= \frac{n^2-1}{2}+\frac{n+1}{2}$

$= \frac{n^2-1+n+1}{2}$

$= \frac{n^2+n}{2}$

$= \frac{n(n+1)}{2}$

จากกรณีที่ n เป็นจำนวนคู่บวก และ n เป็นจำนวนคี่บวกที่กล่าวมาแล้ว

จะเห็นว่าผลบวกของจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง n มีค่าเท่ากันคือ $\frac{n(n+1)}{2}$

นั่นคือ $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ เมื่อ n แทนจำนวนนับใด ๆ

อ้างอิง: หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หน้า 72

เอกสารสำหรับวิทยากร

เฉลยใบกิจกรรม 1

เรื่อง “การบวกและการลบพหุนาม”

---

1. จงหาผลบวกและผลลบของพหุนามต่อไปนี้โดยใช้พหุนามแรกที่กำหนดให้เป็นตัวตั้ง

ข้อ	พหุนาม	ผลบวกของพหุนาม	ผลลบของพหุนาม
1	$12x-1$ กับ $6x^2$	$6x^2+12x-1$	$-6x^2+12x-1$
2	$-12x+15$ กับ $5x$	$-7x+15$	$-17x+15$
3	$7xy-st$ กับ $-10st+3xy$	$10xy-11st$	$4xy+9st$
4	$13r-2t-2s$ กับ $-14r+11s-7t$	$-r+9s-9t$	$27r+5t-13s$
5	$2x+3r$ กับ $-4x+r-y$	$4r-2x-y$	$6x-2r+y$
6	$-9x-14$ กับ $(3-7x-5x^2)+(2x^2-6)$	$-3x^2-16x-17$	$3x^2-2x-11$

2. กำหนดให้ A แทนพหุนาม $3x^2+2x-5$

B แทนพหุนาม $-5x^2-4x+7$

C แทนพหุนาม $6x^2-x+8$

จะได้ $A + B = (3x^2+2x-5) + (-5x^2-4x+7)$

$= 3x^2+2x-5-5x^2-4x+7$

$= -2x^2-2x+2$

จงหาพหุนามต่อไปนี้

1) $A + C =$ $9x^2+x+3$

2) $A - C =$ $-3x^2+3x-13$

3) $(A - B) - C =$ $2x^2+7x-20$

4) $A - (B + C) =$ $2x^2+7x-20$

5) $A - (B + A) =$ $5x^2+4x-7$

เฉลยใบกิจกรรม 2

เรื่อง “การคูณพหุนาม”

จงหาผลคูณของพหุนามต่อไปนี้

1. $(x + 3)(x + 6)$ = $x^2+9x+18$
2. $(x + 2)(x-1)$ = x^2+x-2
3. $(x-3)(x-5)$ = $x^2-8x+15$
4. $(x -2)(x + 3)$ = x^2+x-6
5. $(x + 3)(x + 3)$ = x^2+6x+9
6. $(x-1)(x + 1)$ = x^2-1
7. $(x-5)(x + 5)$ = x^2-25
8. $(x-2)(2x)$ = $2x^2-4x$
9. $(2-3x)(1+5x)$ = $-15x^2+7x+2$
10. $(x + 2)(7x^2 + 4)$ = $7x^3+14x^2+4x+8$
11. $(x -1)(x^2-1)$ = x^3-x^2-x+1
12. $(x -1)(x-1)^2$ = x^3-3x^2+3x-1
13. $(x+y)^2(x + y)$ = $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
14. $(x-y)^2(x + y)$ = $x^3-x^2y-xy^2+y^3$
15. $(x^2-xy+y^2)(x+y)$ = x^3+y^3
16. $(x^2+xy+y^2)(x-y)$ = x^3-y^3

เฉลยใบกิจกรรม 3

เรื่อง “การหารพหุนาม”

จงหาผลหารพหุนามต่อไปนี้

1. $(3x^2+8x) \div x$ = 3x+8
2. $(-12x^2+28x) \div (-4x)$ = 3x-7
3. $\frac{4x^2-x}{5x}$ = $\frac{4x}{5}-\frac{1}{5}$
4. $\frac{-18x^2-36}{-9}$ = $2x^2+4$
5. $\frac{-12x^3+10x^2-6x}{-2x}$ = $6x^2-5x+3$
6. $\frac{-4x+6}{2x-3}$ = -2
7. $\frac{3x+5}{x-1}$ ได้ 3 เศษ 8
8. $\frac{4x^2-7x-15}{x-3}$ = 4x+5
9. $\frac{8x^2-7x-6}{2x^2-x}$ ได้ 4 เศษ -3x-6
10. $\frac{12x^3-23x^2+23x-30}{3x-5}$ = $4x^2-x+6$

<u>ทด</u>

เฉลยใบกิจกรรม 4

เรื่อง “เศษส่วนของพหุนาม”

จงหาผลลัพธ์ของเศษส่วนของพหุนามต่อไปนี้

1. $\frac{-12x^2y}{5y^3} \times \frac{5xy}{3y^2} = \frac{-4x^3}{y^3}$

2. $\frac{x+1}{4x-5} \times \frac{8x-10}{7x+7} = \frac{2}{7}$

3. $\frac{3x^5y^2}{x^2} \div \frac{-5x^3y^3}{y} = -\frac{3}{5}$

4. $\frac{3x^2-9x}{x-1} \div \frac{4x+12}{x+3} = \frac{3x^2-9x}{4x-4}$

5. $\frac{x+1}{5} + \frac{x-1}{3} = \frac{8x-2}{15}$

6. $\frac{x+1}{x} - \frac{x-1}{x} = \frac{2}{x}$

7. $\frac{x-y}{2} + \frac{x^2+xy}{x+y} = \frac{3x-y}{2}$

8. $\frac{3}{x-y} + \frac{4}{x+y} = \frac{7x-y}{x^2-y^2}$

9. $\frac{2y}{5} - \frac{y+1}{2y} + \frac{5}{y} = \frac{4y^2-5y+45}{10y}$

10. $\frac{2x-1}{2} - \frac{1}{3x} + \frac{x+1}{3} = \frac{8x^2-x-2}{6x}$

เฉลยใบกิจกรรม 8

เรื่อง “การแยกตัวประกอบของพหุนาม”

จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1. $x^2+9x+14$ = $(x+7)(x+2)$
2. $x^2+9x-10$ = $(x+10)(x-1)$
3. x^2-81 = $(x+9)(x-9)$
4. $x^2+15x-54$ = $(x+18)(x-3)$
5. $m^2-12x-85$ = $(m-17)(m+5)$
6. $9y^2-6y+1$ = $(3y-1)(3y-1)$
7. $5x^2+14x-3$ = $(5x-1)(x+3)$
8. $4+10x+6x^2$ = $2(2+3x)(1+x)$
9. $4y^2-36$ = $4(y+3)(y-3)$
10. $x^2+16x+64$ = $(x+8)^2$
11. $x^2-60x+900$ = $(x-30)^2$
12. $(4a^2-12a+9)-(5a+1)^2$ = $(7a-2)(-3a-4)$ หรือ $(-1)(7a-2)(3a+4)$
13. $x^2+8x+10$ = $(x+4+\sqrt{6})(x+4-\sqrt{6})$
14. $3x^2+5x-1$ = $3(x+\frac{5+\sqrt{37}}{6})(x+\frac{5-\sqrt{37}}{6})$
15. $27x^3+64$ = $(3x+4)(9x^2-12x+16)$

ชวนคิด

1. 997^2 = 994,009
2. $2,547^2-453^2$ = 6,282,000

แบบสังเกตการมีส่วนร่วมในกิจกรรม

คำชี้แจง ทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องเมื่อผู้เข้ารับการอบรมแต่ละคนเข้าร่วมกิจกรรมต่าง ๆ (กิจกรรมที่ 1 ถึงกิจกรรมที่ 11)

เลขที่	ชื่อ-สกุล	กิจกรรมที่											รวมคะแนน (3 คะแนน)
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
25													

เลขที่	ชื่อ-สกุล	กิจกรรมที่											รวม คะแนน (3 คะแนน)
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
26													
27													
28													
29													
30													
31													
32													
33													
34													
35													
36													
37													
38													
39													
40													

ลงชื่อ.....วิทยากร

วันที่สังเกต.....

<u>หมายเหตุ</u>

รายการประเมิน “การมีส่วนร่วมในกิจกรรม” (3 คะแนน)

พิจารณาจาก การเข้าร่วมกิจกรรม

เกณฑ์การให้คะแนน:

ได้ 3 คะแนน เมื่อเข้าร่วมกิจกรรมครบทุกกิจกรรมย่อย และมีส่วนร่วมในการแสดงความคิดเห็นในกิจกรรม

ได้ 2 คะแนน เมื่อเข้าร่วมกิจกรรมครบทุกกิจกรรมย่อย

ได้ 1 คะแนน เมื่อเข้าร่วมกิจกรรมไม่ครบทุกกิจกรรมย่อย

ได้ 0 คะแนน เมื่อไม่เข้าร่วมกิจกรรมย่อย

แบบบันทึกการส่งใบกิจกรรม 1-11

คำชี้แจง ทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องเมื่อผู้เข้ารับการอบรมแต่ละคนปฏิบัติงานและส่งใบกิจกรรมต่าง ๆ (กิจกรรมที่ 1 ถึงกิจกรรมที่ 11)

เลขที่	ชื่อ-สกุล	กิจกรรมที่											รวม คะแนน (1 คะแนน)
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
25													

เลขที่	ชื่อ-สกุล	กิจกรรมที่											รวม คะแนน (1 คะแนน)
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
26													
27													
28													
29													
30													
31													
32													
33													
34													
35													
36													
37													
38													
39													
40													

ลงชื่อ.....วิทยากร

วันที่สังเกต.....

<u>หมายเหตุ</u>

รายการประเมิน “ชิ้นงาน” (1 คะแนน)

พิจารณาจาก การปฏิบัติและส่งใบกิจกรรม 1-11

เกณฑ์การให้คะแนน:

ได้ 1 คะแนน เมื่อปฏิบัติงานและส่งใบกิจกรรมครบ 11 ใบกิจกรรม

ได้ 0 คะแนน เมื่อปฏิบัติงานและส่งใบกิจกรรมน้อยกว่า 11 ใบกิจกรรม

แบบประเมินการนำเสนอผลงาน

คำชี้แจง ทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องเมื่อผู้เข้ารับการอบรมแต่ละคนปฏิบัติตามตัวชี้วัดต่าง ๆ ที่กำหนด

เลขที่	ชื่อ-สกุล	ประเด็นการประเมินที่			รวม คะแนน (5 คะแนน)
		เป็นตัวแทนนำเสนอผลงานกลุ่มของในกิจกรรม 1 ถึงในกิจกรรม 11 อย่างน้อย 1 กิจกรรม	เป็นผู้อภิปรายหรือแสดงความคิดเห็นต่อการนำเสนอผลงานเดี่ยว หรือกลุ่มตนเองหรือกลุ่มอื่นของในกิจกรรม 1 ถึงในกิจกรรม 11 อย่างน้อย 1 กิจกรรม	เข้าร่วมรับฟังการนำเสนอผลงานของในกิจกรรม 1 ถึงในกิจกรรม 11	
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					
21					
22					

เลขที่	ชื่อ-สกุล	ประเด็นการประเมินที่			รวม คะแนน (5 คะแนน)
		เป็นตัวแทนนำเสนอผลงานกลุ่มของใบกิจกรรม 1 ถึงใบกิจกรรม 11 อย่างน้อย 1 กิจกรรม	เป็นผู้อภิปรายหรือแสดงความคิดเห็นต่อการนำเสนอผลงานเดี่ยว หรือกลุ่มตนเอง หรือกลุ่มอื่นของใบกิจกรรม 1 ถึงใบกิจกรรม 11 อย่างน้อย 1 กิจกรรม	เข้าร่วมรับฟังการนำเสนอผลงานของใบกิจกรรม 1 ถึงใบกิจกรรม 11	
23					
24					
25					
26					
27					
28					
29					
30					
31					
32					
33					
34					
35					

ลงชื่อ.....วิทยากร

วันที่สังเกต.....

<u>หมายเหตุ</u>

รายการประเมิน “การนำเสนอผลงานกลุ่ม” (5 คะแนน)

พิจารณาจาก 1. เป็นตัวแทนนำเสนอผลงานกลุ่มของใบกิจกรรม 1 ถึงใบกิจกรรม 11 อย่างน้อย 1 กิจกรรม

2. เป็นผู้อภิปรายหรือแสดงความคิดเห็นต่อการนำเสนอผลงานเดี่ยวหรือกลุ่มตนเอง หรือกลุ่มอื่นของใบกิจกรรม 1 ถึงใบกิจกรรม 11 อย่างน้อย 1 กิจกรรม

3. เข้าร่วมรับฟังการนำเสนอผลงานของใบกิจกรรม 1 ถึงใบกิจกรรม 11

เกณฑ์การให้คะแนน:

ได้ 5 คะแนน เมื่อปฏิบัติครบ 3 ข้อ ได้ 4 คะแนน เมื่อปฏิบัติ 2 ข้อ

ได้ 3 คะแนน เมื่อปฏิบัติ 1 ข้อ ได้ 0 คะแนน เมื่อไม่ปฏิบัติทั้งสามข้อ

แบบประเมินการสรุปองค์ความรู้ตามใบกิจกรรม 11

คำชี้แจง ทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องเมื่อผู้เข้ารับการอบรมแต่ละคนปฏิบัติตามประเด็นต่าง ๆ ที่กำหนด

เลขที่	ชื่อ-สกุล	ประเด็นการประเมินที่		รวมคะแนน (2 คะแนน)
		ได้สะท้อนผลการเรียนรู้หรือแลกเปลี่ยนเรียนรู้ในการปฏิบัติใบกิจกรรม 11	ส่งใบกิจกรรม 11 และปฏิบัติครบทุกประเด็นคำถามในใบกิจกรรม 11	
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				

เลขที่	ชื่อ-สกุล	ประเด็นการประเมินที่		รวมคะแนน (2 คะแนน)
		ได้สะท้อนผลการเรียนรู้หรือแลกเปลี่ยนเรียนรู้ในการปฏิบัติใบกิจกรรม 11	ส่งใบกิจกรรม 11 และปฏิบัติครบทุกประเด็นคำถามในใบกิจกรรม 11	
23				
24				
25				
26				
27				
28				
29				
30				
31				
32				
33				
34				
35				

ลงชื่อ.....วิทยากร

วันที่สังเกต.....

<u>หมายเหตุ</u>

รายการประเมิน “การสรุปองค์ความรู้” (2 คะแนน)

พิจารณาจาก 1. ได้สะท้อนผลการเรียนรู้หรือแลกเปลี่ยนเรียนรู้ในการปฏิบัติใบกิจกรรม 11

2. ส่งใบกิจกรรม 11 และปฏิบัติครบทุกประเด็นคำถามในใบกิจกรรม 11

เกณฑ์การให้คะแนน:

ได้ 2 คะแนน เมื่อปฏิบัติครบ 2 ข้อ

ได้ 1 คะแนน เมื่อปฏิบัติ 1 ข้อ

ได้ 0 คะแนน เมื่อไม่ปฏิบัติทั้งสองข้อ

แบบกรอกคะแนน เรื่อง พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม

เลขที่	ชื่อ-สกุล	รายการประเมิน				รวม 11 คะแนน
		การมีส่วนร่วมในกิจกรรม	ชิ้นงาน (1 คะแนน)	การนำเสนอผลงาน (5 คะแนน)	การสรุปองค์ความรู้ (2 คะแนน)	
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						
23						
24						
25						
26						

เลขที่	ชื่อ-สกุล	รายการประเมิน				รวม 11 คะแนน
		การมีส่วนร่วมในกิจกรรม	ชิ้นงาน (1 คะแนน)	การนำเสนอผลงาน (5 คะแนน)	การสรุปองค์ความรู้ (2 คะแนน)	
27						
28						
29						
30						
31						
32						
33						
34						
35						
36						
37						
38						
39						
40						

ลงชื่อ.....วิทยากร

วัน/เดือน/ปี.....

เรื่อง การพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

แผนการอบรม

แผนการอบรมครูคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น สำหรับครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่
เรื่อง การพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์
เวลา 3 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรม

1. ได้รับความรู้ ความเข้าใจ และแนวคิดเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์
2. ได้ฝึกทักษะการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์
3. สามารถออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

สาระการเรียนรู้

การพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

สาระสำคัญ

ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลาง พุทธศักราช 2551 ได้แก่ การแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอ การเชื่อมโยง ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ มีความสำคัญในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ให้เหมาะสมสอดคล้องกับสาระการเรียนรู้ และระดับความสามารถของนักเรียน

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน / ยาก

ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์มีหลากหลาย แต่ที่สำคัญมีดังนี้

1. ครูคณิตศาสตร์บางท่านคิดว่านักเรียนควรต้องมีทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์หลังจากการสอน ที่จริงแล้วทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถหรือความชำนาญซึ่งไม่อาจสอนหรือพัฒนาได้ในระยะเวลาสั้น ๆ แต่ต้องอาศัยประสบการณ์ในการคิดและการทำงานที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์มากพอ ครูจึงต้องเน้นให้นักเรียนได้คิดและลงมือทำงานมาก ๆ และอย่างต่อเนื่อง ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์จึงจะได้รับการพัฒนาขึ้นอย่างค่อยเป็นค่อยไป
2. ครูคณิตศาสตร์บางท่านเข้าใจว่าการพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนต้องทำหลังจากนักเรียนเรียนเนื้อหา หรือมีความรู้ในเรื่องที่จะใช้ จึงควรสอนเนื้อหาทั้งหมดก่อน ความเข้าใจดังกล่าวคลาดเคลื่อน เพราะทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์อาจเกิดขึ้นได้ระหว่างการทำกิจกรรมเพื่อเรียนรู้เนื้อหาใหม่ ดังนั้น ครูอาจใช้กิจกรรมเป็นเครื่องมือในการพัฒนา

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เพื่อเรียนรู้เนื้อหาใหม่ก็ได้ หรือจะใช้เพื่อฝึกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์หลังเรียนเนื้อหาแล้วก็ได้เช่นกัน

3. ครูคณิตศาสตร์บางท่านเข้าใจทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไม่ได้มีความสำคัญมาก เมื่อเทียบกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เคยสอนมา จึงมุ่งเน้นที่การสอนเนื้อหาและการทำแบบฝึกหัด

สื่อและแหล่งการเรียนรู้

1. สำหรับผู้เข้ารับการอบรม

1.1 เอกสารผู้เข้ารับการอบรม 1 : ใบกิจกรรม 1 พหุนาม

1.2 เอกสารผู้เข้ารับการอบรม 2 : ใบกิจกรรม 2 กระป๋องลูกเทนนิส

1.3 เอกสารผู้เข้ารับการอบรม 3 : ใบกิจกรรม 3 ออกแบบกิจกรรม

1.4 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม มัธยมศึกษาตอนต้น

1.5 คู่มือครูสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม มัธยมศึกษาตอนต้น

2. เอกสารสำหรับวิทยากร

2.1. เอกสารสำหรับวิทยากร 1 : เฉลยใบกิจกรรม 1 พหุนาม

2.2. เอกสารสำหรับวิทยากร 2 : เฉลยใบกิจกรรม 2 กระป๋องลูกเทนนิส

2.3. เอกสารสำหรับวิทยากร 3 : PowerPoint แนวการจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอ การเชื่อมโยง และความสร้างสรรค์

การประเมินผล

รายการประเมิน	**เกณฑ์การให้คะแนน (คะแนนเต็ม 5 คะแนน)**	**เครื่องมือ**
การมีส่วนร่วมในกิจกรรม พิจารณาจาก เข้าร่วมกิจกรรม	**คะแนนเต็ม 5 คะแนน โดย** ได้ 5 คะแนน เมื่อเข้าร่วมกิจกรรมครบทุกกิจกรรมย่อยและมีส่วนร่วมในการแสดงความคิดเห็นในกิจกรรม ได้ 4 คะแนน เมื่อเข้าร่วมกิจกรรมครบทุกกิจกรรมย่อย	- แบบสังเกตการมีส่วนร่วมในกิจกรรม

รายการประเมิน	**เกณฑ์การให้คะแนน (คะแนนเต็ม 5 คะแนน)**	**เครื่องมือ**
	ได้ 3 คะแนน เมื่อเข้าร่วมกิจกรรมไม่ครบทุกกิจกรรมย่อย ได้ 0 คะแนน ไม่เข้าร่วมกิจกรรมย่อย	

แนวทางปฏิบัติสำหรับวิทยากร

1. ศึกษาเอกสารสำหรับวิทยากรและเอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรมทุกเอกสารในเรื่องการพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

2. จัดเตรียมและทดลองใช้โปรแกรม PowerPoint เอกสารสำหรับวิทยากร 3 : เรื่อง แนวการจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอ การเชื่อมโยง และความสร้างสรรค์

3. ทำสำเนาเอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1-3 (ใบกิจกรรม 1-3) ตามจำนวนผู้เข้ารับการอบรม

4. แจ้งให้ผู้เข้ารับการอบรมทราบเกี่ยวกับจุดประสงค์ในการอบรมและการประเมินผล (ตัวชี้วัดและเกณฑ์การให้คะแนน) ในช่วงเริ่มต้นของการอบรม

5. ให้ผู้เข้ารับการอบรมบอกชื่อและเลขที่ของตนเองทุกครั้งก่อนนำเสนอผลงานหรืออภิปรายแสดงความคิดเห็น เพื่อความสะดวกของวิทยากรในการให้คะแนนและประเมินผล

6. ดำเนินการจัดการอบรมตามแนวทางการจัดกิจกรรม พร้อมทั้งประเมินผลผู้เข้ารับการอบรมตามรายการประเมินและเครื่องมือที่กำหนด

แนวทางการจัดกิจกรรม

กิจกรรม	**สื่อ / เอกสาร**	**วัดและประเมินผล**
ช่วงที่ 1 (30 นาที) วิทยากรให้ความรู้ ความเข้าใจ และแนวคิดเกี่ยวกับการพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งแนะนำแนวการจัดการจัดการเรียนรู้และตัวอย่างที่พัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ Power Point แนวการจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอ การเชื่อมโยง และความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	- เอกสารสำหรับวิทยากร 1 : Power Point แนวการจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอ	- สังเกตการมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ / เอกสาร	วัดและประเมินผล
	การเชื่อมโยง และความสร้างสรรค์	
ช่วงที่ 2 (1 ชั่วโมง 30 นาที) 1. ในช่วงนี้วิทยากรผู้เข้ารับการอบรมทำกิจกรรมที่ 1 และ 2 ทีละกิจกรรม โดยศึกษาสาระในแต่ละกิจกรรม เตรียมคำถาม – คำตอบ และแนวคิดในการขยายความรู้ / แนวคิดของแต่ละกิจกรรม 2. วิทยากรดำเนินกิจกรรมตามที่แนะนำไว้ในแต่ละกิจกรรม เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรมได้เห็นแนวทางในการทำกิจกรรมเหล่านั้นกับนักเรียน อาจใช้การแบ่งผู้เข้ารับการอบรมเป็นกลุ่มย่อย ๆ โดยแต่ละกลุ่มจัดให้มีผู้ที่มีความรู้และประสบการณ์การสอนคละกัน และจัดให้มีการนำเสนอ เพิ่มเติมการนำเสนอให้สมบูรณ์ รวมทั้งการขยายแนวคิดของกิจกรรมนั้น 3. วิทยากรอาจเสริมให้แต่ละกิจกรรมมีความสมบูรณ์มากขึ้น ไว้ในแต่ละกิจกรรมก็ได้ โดยชี้ให้ ผู้เข้ารับการอบรมเห็นว่า ในแต่ละกิจกรรมมีแนวคิดหรือเหตุผลใดในการออกแบบกิจกรรมในลักษณะนั้นๆ แต่ละกิจกรรมมีขั้นตอนใดหรือเนื้อหาใดบ้าง ที่สะท้อนให้เห็นแนวการพัฒนาทักษะ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ในแต่ละด้าน	- เอกสารผู้เข้ารับการอบรม 3 : ใบกิจกรรม 1 พหุนาม - เอกสารผู้เข้ารับการอบรม 4 : ใบกิจกรรม 2 กระป๋องลูกเทนนิส	- สังเกตการมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรม - สังเกตการนำเสนอและอภิปรายให้เหตุผลในการทำกิจกรรม - ตรวจผลงานจากใบกิจกรรม
ช่วงที่ 3 (45 นาที) 1. วิทยากรให้แต่ละกลุ่มทำกิจกรรมที่ 3 โดยออกแบบกิจกรรม หรือสร้างสถานการณ์ / โจทย์ปัญหาที่พัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ใช้เวลาประมาณ 30 นาที วิทยากรสังเกตผลงานของแต่ละกลุ่ม และเลือกผลงานของกลุ่มที่น่าสนใจประมาณ 2 – 3 กลุ่ม ให้ออกมานำเสนอเพื่อให้เกิดแนวคิดและให้มีการอภิปรายร่วมกัน	- เอกสารผู้เข้ารับการอบรม 5 : ใบกิจกรรม 3 ออกแบบกิจกรรม	- สังเกตการมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรม - สังเกตการนำเสนอและอภิปรายให้เหตุผลในการทำกิจกรรม - ตรวจผลงานจากใบกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ / เอกสาร	วัดและประเมินผล
2. วิทยากรสรุปผลงานของทุกกลุ่มพร้อมเสนอความคิดเห็นหรือให้ข้อเสนอแนะในการดำเนินกิจกรรมเพื่อฝึกและพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เพิ่มเติม อาจชี้ให้เห็นข้อดีและข้อที่ควรแก้ไขที่ผู้เข้ารับการอบรมได้นำเสนอไปแล้ว		
ช่วงที่ 4 (15 นาที) 1. วิทยากรและผู้เข้ารับการอบรมสรุปร่วมกันเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ โดยเชื่อมโยงแนวคิดและประสบการณ์จากการทำ 2 กิจกรรมมาประกอบการวิเคราะห์ 2. วิทยากรทำความเข้าใจกับผู้เข้ารับการอบรมว่า กิจกรรมที่เสนอในการอบรมครั้งนี้ เป็นเพียงตัวอย่างที่ต้องการให้ผู้เข้ารับการอบรมได้เห็นแนวคิดในการจัดกิจกรรมที่นำไปสู่การพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ครูควรฝึกออกแบบกิจกรรมสร้างสถานการณ์ / โจทย์ปัญหาที่เหมาะสมกับนักเรียนและท้องถิ่น เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรมเกิดการเรียนรู้และพัฒนา ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ได้มากที่สุด		- สังเกตการสรุปสาระสำคัญที่ได้และประเด็นในการซักถาม

เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม

ใบกิจกรรม 1
พหุนาม

คำชี้แจง

กิจกรรมนี้มีเจตนาให้ผู้เข้ารับการอบรมได้พัฒนาทักษะและกระบวนการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ รู้จักการสังเกต การเชื่อมโยงความรู้และแนวคิด การวิเคราะห์แบบรูปและการให้เหตุผล ผ่านเนื้อหาสาระเกี่ยวกับจำนวนเต็มและพหุนาม กิจกรรมนี้มี 2 ตอน ตอนที่ 1 เป็นกิจกรรมนำ และตอนที่ 2 เป็นกิจกรรมหลัก

จุดประสงค์

เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรมมีความสามารถ

1. ใช้ทักษะในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการทำความเข้าใจปัญหา และการปฏิบัติการตามวิธีที่โจทย์กำหนดให้
2. ใช้ทักษะในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ และการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ โดยนำความรู้ที่ได้ในกิจกรรมตอนที่ 1 ไปใช้แก้ปัญหาในกิจกรรมตอนที่ 2 ได้

สื่อ / อุปกรณ์

1. กระดาษ A4
2. กรรไกร
3. เครื่องคิดเลข

วิธีดำเนินกิจกรรม

1. วิทยากรแจกกระดาษ A4 และใบกิจกรรมตอนที่ 1 ให้กับผู้เข้ารับการอบรมทุกคน และแจกกรรไกรให้ทุกกลุ่ม กลุ่มละ 1 อัน พร้อมให้ผู้เข้ารับการอบรมแต่ละคนทำกิจกรรมตามลำดับ

2. ครูให้ผู้เข้ารับการอบรมในแต่ละกลุ่มร่วมกันอภิปรายเพื่อหาข้อสรุปของคำถามข้อ 5 และข้อ 6 ครูให้นักเรียนใช้เวลาตอนที่ 1 ประมาณ 10 นาที

ในขั้นสรุปผลของกิจกรรมตอนที่ 1 นี้ ครูให้ข้อสังเกตกับนักเรียนว่า n แทนความยาวของด้านซึ่ง n แทนจำนวนบวกใด ๆ ใช่หรือไม่ ดังนั้นเมื่อกำหนดให้ n ในข้อ 6 แทนจำนวนเต็มบวก จึงทำให้ข้อสรุปนี้เป็นจริงด้วย

3. ครูแจกใบกิจกรรมตอนที่ 2 ให้นักเรียนทุกคนและแจกเครื่องคิดเลขให้ทุกกลุ่ม กลุ่มละ 2 – 3 เครื่อง พร้อมให้นักเรียนทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม

4. ครูให้นักเรียนใช้เครื่องคิดเลขหาคำตอบในข้อ 2 ได้ และให้ใช้เวลาทำกิจกรรมตอนที่ 2 ประมาณ 15 นาที

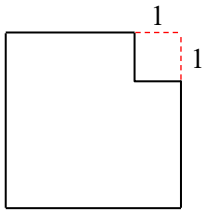
5. ครูสุ่มตัวแทนกลุ่มประมาณ 2 – 3 กลุ่ม นำเสนอผลงานและร่วมกันอภิปรายหาข้อสรุปของข้อ 3 สำหรับการพิสูจน์ข้อความที่สรุปได้ในข้อ 3 ครูควรสังเกตว่านักเรียนสามารถเชื่อมโยงความรู้จากกิจกรรมตอนที่ 1 มาเขียนแสดงการแยกตัวประกอบของ $n^2 - 1$ ได้ทันทีหรือไม่

ใบกิจกรรม 1 “พหุนาม”

ให้นักเรียนทำกิจกรรมตามลำดับขั้นตอนและตอบคำถามต่อไปนี้

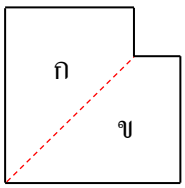
ตอนที่ 1

1. ตัดกระดาษแผ่นหนึ่งให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส กำหนดให้แต่ละด้านยาว n หน่วย กระดาษแผ่นนี้มีพื้นที่กี่ตารางหน่วย.....
2. จากกระดาษรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ได้ในข้อ 1 ตัดมุมกระดาษออกหนึ่งมุมให้รูปที่ตัดออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และกำหนดให้แต่ละด้านของรูปที่ตัดออกยาว 1 หน่วย ดังรูป



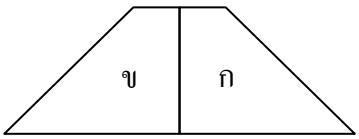
กระดาษที่ตัดมุมออกแล้วมีพื้นที่กี่ตารางหน่วย

.....

3. 

จากกระดาษที่ได้ในข้อ 2 พับครึ่งตามแนวเส้นทแยงมุมให้ได้รอยพับเป็นด้านร่วมของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู รูป ก และรูป ข ดังรูป

การตัดแบ่งครึ่งตามรอยพับ ทำให้รูปสี่เหลี่ยมคางหมูแต่ละรูปมีส่วนสูงยาวกี่หน่วย.....

4. 

นำรูป ก และรูป ข มาวางต่อกันโดยใช้ส่วนสูงเป็นด้านร่วมให้ได้รูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว ดังรูป ให้นักเรียนหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วนี้ โดยใช้สูตร

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู = $\frac{1}{2}$ × สูง×ผลบวกของความยาวของด้านคู่ขนาน

.....

5. นักเรียนสามารถเขียนแสดงพื้นที่ของรูปที่ได้ในข้อ 2 กับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูในข้อ 4 ได้เป็นอย่างไร จงอธิบาย.....

.....

6. นักเรียนคิดว่า ถ้า n แทนจำนวนเต็มบวกแล้ว $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ เสมอใช่หรือไม่

.....

ตอนที่ 2

1. จงพิจารณาแบบรูปในตาราง แล้วเติมตัวเลขตามแบบรูปในช่องว่างต่อไปนี้

x	ค่าของ x	เขียนค่าของ x ในรูปการคูณ
$1^3 - 1$	0	$0 \times 1 \times 2$
$2^3 - 2$	6	$1 \times 2 \times 3$
$3^3 - 3$	24	$2 \times 3 \times 4$
$4^3 - 4$	.....	.....
$5^3 - 5$	.....	.....

2. ให้นักเรียนตรวจสอบดูว่าจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้ สามารถเขียนได้ตามแบบรูปในข้อ 1 หรือไม่

1) $10^3 - 10$
2) $67^3 - 67$
3) $230^3 - 230$
4) $885^3 - 885$
5) $1250^3 - 1250$

3. นักเรียนคาดการณ์ว่า ถ้า $x = n^3 - n$ เมื่อ n แทนจำนวนเต็มบวกและศูนย์ แล้วยังสามารถเขียนค่า x ตามแบบรูปที่แสดงการคูณของจำนวนสามจำนวนในรูปของ n ได้หรือไม่ ถ้าได้ เขียนได้เป็นอย่างไร

   .....

   .....

   .....

4. จงพิสูจน์ว่าข้อความคาดการณ์ในข้อ 3 ของนักเรียนเป็นจริง

   .....

   .....

   .....

   .....

   .....

   .....

ใบกิจกรรม 2
กระป๋องลูกเทนนิส

คำชี้แจง

กิจกรรมนี้มีจุดมุ่งหมายให้นักเรียนใช้ความรู้สึกเชิงปริภูมิ การคาดคะเน การประมาณ และเชื่อมโยงความรู้เรื่องทรงกระบอกและทรงกลมไปใช้ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์

เพื่อให้นักเรียน

1. ใช้ความรู้สึกเชิงปริภูมิประกอบการคาดคะเนและการประมาณ
2. ใช้ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ และการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์

สื่อ / อุปกรณ์

1. ใบกิจกรรม “กระป๋องลูกเทนนิส”

วิธีดำเนินกิจกรรม

1. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรม โดยช่วยกันคิดเป็นคู่ ๆ ครูใช้คำถามเพื่อเชื่อมโยงให้นักเรียนนึกถึงกระป๋องพลาสติกทรงกระบอกบรรจุลูกเทนนิสขนาด 3 ลูกที่วางขายทั่วไป แล้วให้นักเรียนลองวาดภาพสามมิติของทรงกระบอกดังกล่าว

2. จากภาพที่ได้ในข้อ 1 ครูให้นักเรียนลองใช้ความรู้สึกเชิงปริภูมิเปรียบเทียบความสูงของกระป๋องกับความยาวรอบกระป๋อง ว่าส่วนใดยาวกว่ากัน นักเรียนจะใช้การคาดคะเนและการประมาณช่วยในการทำงาน

3. ครูอาจตั้งประเด็นคำถามว่าความหนาของพลาสติกมีผลอย่างไรต่อความสูงของกระป๋องและความยาวรอบกระป๋อง และมีผลต่อส่วนใดมากกว่ากัน เพราะเหตุใด จากนั้น ให้นักเรียนเชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์เรื่องทรงกลมและทรงกระบอกเกี่ยวกับการเปรียบเทียบความสูงของกระป๋องกับความยาวรอบกระป๋อง ซึ่งครูอาจตั้งประเด็นคำถามให้คิดก่อนทำว่า จำเป็นต้องทราบความยาวของรัศมีหรือเส้นผ่านศูนย์กลางของลูกเทนนิสก่อนหรือไม่ เพื่อเป็นประเด็นให้นักเรียนได้อธิบายเหตุผล ซึ่งจะเน้นการพัฒนาทักษะการสื่อสารและการให้เหตุผลด้วย

4. ครูพิจารณาคำตอบในข้อ 3 ของนักเรียน เพื่อดูว่านักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้หรือไม่ ครูอาจให้นักเรียนลองย้อนกลับไปเปรียบเทียบคำตอบที่ได้จากการประมาณในข้อ 2 และที่ได้จากการคิดคำนวณในข้อ 3 ว่าใกล้เคียงกันหรือแตกต่างกันอย่างไร

5. ครูให้ข้อมูลเบื้องต้นกับนักเรียนว่า ลูกเทนนิสที่ผลิตจากแต่ละบริษัทอาจมีขนาดไม่เท่ากัน แต่ทุกลูกที่ผลิตจากบริษัทเดียวกันจะเท่ากันเนื่องจากมาตรฐานการผลิตเดียวกัน ให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายว่าความแตกต่างระหว่างความสูงของกระป๋องกับความยาวรอบกระป๋องจะเปลี่ยนแปลงไปตามขนาดลูกเทนนิสของแต่ละบริษัทหรือไม่ เพราะเหตุใด ซึ่งนักเรียนจะต้องใช้ทั้งความรู้และเหตุผลในการตอบคำถามนี้

ใบกิจกรรม 2 “กระป๋องลูกเทนนิส”

กระป๋องพลาสติกใสทรงกระบอกแต่ละใบสามารถบรรจุลูกเทนนิสที่มีขนาดเท่ากันได้เพียง 3 ลูก ให้ทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. วาดรูปเรขาคณิตแทนทรงกระบอกที่บรรจุลูกเทนนิส

   .....

   .....

2. จากการมองภาพ ความสูงของกระป๋องกับความยาวรอบกระป๋อง ส่วนใดน่าจะยาวมากกว่า.....
   และมากกว่ากันประมาณกี่เซนติเมตร.....

3. ถ้าไม่พิจารณาความหนาของพลาสติกที่ใช้ทำกระป๋อง เนื่องจากมีความหนาน้อยมาก ให้ใช้รัศมีของฐานและความสูงของกระป๋องประกอบการคิดเปรียบเทียบความสูงของกระป๋องกับความยาวรอบกระป๋องเทนนิส

   .....

   .....

   .....

   .....

   .....

   .....

4. จากการคิดในข้อ 3 ความสูงของกระป๋องกับความยาวรอบกระป๋องจำนวนใดมากกว่ากัน

   .....
   และถ้ามากกว่ากัน มากกว่ากันอยู่ประมาณกี่เซนติเมตร.....
   เพราะเหตุใด.....

5. ถ้าลูกเทนนิสที่ผลิตจากแต่ละบริษัทต่างมีขนาดไม่เท่ากัน และกระป๋องมีขนาดเปลี่ยนไปตามขนาดของลูกเทนนิส ผลที่ได้ตามข้อ 4 จะเปลี่ยนไปหรือไม่ เพราะเหตุใด

   .....

   .....

   .....

   .....

   .....

ใบกิจกรรม 3
ออกแบบกิจกรรม

วิธีดำเนินกิจกรรม

1. ให้ผู้เข้ารับการอบรมออกแบบกิจกรรมที่พัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น กลุ่มละ 1 กิจกรรม
2. ให้ส่งตัวแทนกลุ่มออกมานำเสนอแนวคิดอย่างคร่าว ๆ โดยใช้เวลาประมาณ 5 นาที

ข้อสังเกตสำหรับวิทยากร

เนื่องจากผู้เข้ารับการอบรมได้เห็นการจัดเป็นกิจกรรมการเรียนรู้ที่มุ่งพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์มาแล้ว สำหรับกิจกรรมนี้ ผู้เข้ารับการอบรมจะได้ประสบการณ์เกี่ยวกับการนำสาระหรือความรู้คณิตศาสตร์มาทำเป็นกิจกรรมเพื่อพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์โดยได้ลองออกแบบกิจกรรมด้วยตนเอง อีกทั้งยังได้มีโอกาสอภิปรายหรือวิพากษ์วิจารณ์เกี่ยวกับแนวคิดในการออกแบบกิจกรรมร่วมกัน

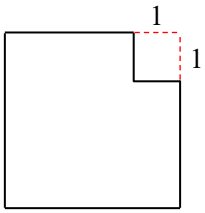
เอกสารสำหรับวิทยากร

เฉลยใบกิจกรรม 1 พหุนาม

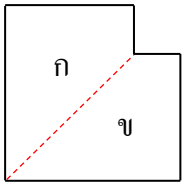
ให้นักเรียนทำกิจกรรมตามลำดับขั้นตอนและตอบคำถามต่อไปนี้

ตอนที่ 1

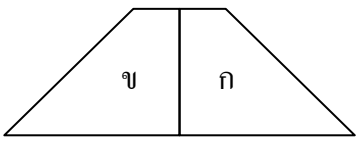
1. ตัดกระดาษแผ่นหนึ่งให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส กำหนดให้แต่ละด้านยาว n หน่วย กระดาษแผ่นนี้มีพื้นที่กี่ตารางหน่วย (n^2 ตารางหน่วย)
2. จากกระดาษรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ได้ในข้อ 1 ตัดมุมกระดาษออกหนึ่งมุมให้รูปที่ตัดออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และกำหนดให้แต่ละด้านของรูปที่ตัดออกยาว 1 หน่วย ดังรูป



กระดาษที่ตัดมุมออกแล้วมีพื้นที่กี่ตารางหน่วย
($n^2 - 1$ ตารางหน่วย)

3. 

จากกระดาษที่ได้ในข้อ 2 พับครึ่งตามแนวเส้นทแยงมุมให้ได้รอยพับเป็นด้านร่วมของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู รูป ก และรูป ข ดังรูป
การตัดแบ่งครึ่งตามรอยพับ ทำให้รูปสี่เหลี่ยมคางหมูแต่ละรูปมีส่วนสูงยาวกี่หน่วย (n – 1 ตารางหน่วย)

4. 

นำรูป ก และรูป ข มาวางต่อกันโดยใช้ส่วนสูงเป็นด้านร่วมให้ได้รูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว ดังรูป
ให้นักเรียนหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วนี้โดยใช้สูตร

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู = $\frac{1}{2}$ × สูง×ผลบวกของความยาวของด้านคู่ขนาน

(พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู = $\frac{1}{2}(n-1)(2n+2)$ ตารางหน่วย)

5. นักเรียนสามารถเขียนแสดงพื้นที่ของรูปที่ได้ในข้อ 2 กับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูในข้อ 4 ได้เป็นอย่างไร จงอธิบาย $n^2 - 1 = \frac{1}{2}(n-1)(2n+2)$
จะได้ $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$
6. นักเรียนคิดว่า ถ้า n แทนจำนวนเต็มบวกแล้ว $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ เสมอใช่หรือไม่
(ใช่)

ตอนที่ 2

1. จงพิจารณาแบบรูปในตาราง แล้วเติมตัวเลขตามแบบรูปในช่องว่างต่อไปนี้

x	ค่าของ x	เขียนค่าของ x ในรูปการคูณ
$1^3 - 1$	0	$0 \times 1 \times 2$
$2^3 - 2$	6	$1 \times 2 \times 3$
$3^3 - 3$	24	$2 \times 3 \times 4$
$4^3 - 4$	60	$3 \times 4 \times 5$
$5^3 - 5$	120	$4 \times 5 \times 6$

2. ให้นักเรียนตรวจสอบดูว่าจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้ สามารถเขียนได้ตามแบบรูปในข้อ 1 หรือไม่ (ได้)
   1) $10^3 - 10$
   2) $67^3 - 67$
   3) $230^3 - 230$
   4) $885^3 - 885$
   5) $1250^3 - 1250$
3. นักเรียนคาดการณ์ว่า ถ้า $x = n^3 - n$ เมื่อ n แทนจำนวนเต็มบวกและศูนย์ แล้วยังสามารถเขียนค่า x ตามแบบรูปที่แสดงการคูณของจำนวนสามจำนวนในรูปของ n ได้หรือไม่ ถ้าได้เขียนได้เป็นอย่างไร (ได้ และเขียนได้เป็น $x = (n - 1) \times n \times (n + 1)$)
4. จงพิสูจน์ว่าข้อความคาดการณ์ในข้อ 3 ของนักเรียนเป็นจริง

   พิสูจน์

   เนื่องจาก $x = n^3 - n$ (กำหนดให้)

   $= n(n^2 - 1)$ (สมบัติการแจกแจง)

   เนื่องจาก $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ (ผลสรุปจากตอนที่ 1)

   ดังนั้น $x = n(n - 1)(n + 1)$ (สมบัติของการเท่ากัน)

   นั่นคือ $n^3 - n = n(n - 1)(n + 1)$ (สมบัติการสลับที่)

ข้อสังเกตสำหรับวิทยากร

กิจกรรมพหุนามแสดงให้เห็นการเชื่อมโยงเนื้อหาระหว่างสาระ จำนวนและการดำเนินการ การวัดและพีชคณิตได้ โดยใช้ความรู้พื้นฐานที่นักเรียนได้เรียนมาแล้วเป็นฐานในการทำกิจกรรมเพื่อสร้างความรู้ใหม่ที่น่าสนใจเพิ่มเติม

ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมสำหรับวิทยากรมีดังนี้

1. วิทยากรชี้ให้ผู้เข้ารับการอบรมเห็นว่าในการสร้างกิจกรรม อาจมีประเด็นที่สนใจดังสาระตอนที่ 2 แต่เนื่องจากพื้นความรู้เดิมของนักเรียนที่ได้เรียนเฉพาะสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน ซึ่งไม่มีเนื้อหาเกี่ยวกับพหุนาม นักเรียนบางคนอาจไม่รู้ว่าการแยกตัวประกอบของ $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ จึงต้องทำกิจกรรมตอนที่ 1 นำมาเสริมให้เป็นฐานความรู้ก่อน เพื่อให้นักเรียนได้นำไปใช้ในกิจกรรมตอนที่ 2 กิจกรรมทั้งหมดนี้มีเจตนาที่ต้องการพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มิได้เป็นกิจกรรมสอนสาระการแยกตัวประกอบของ $n^3 - n$ แต่ถ้านักเรียนบางคนได้เรียนสาระการเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติมมาแล้ว การพิสูจน์ว่า $n^3 - n = n(n - 1)(n + 1)$ นั้นอาจพิสูจน์ได้เองทันทีโดยไม่ต้องอาศัยกิจกรรมนำตอนที่ 1 ก็ได้

2. วิทยากรอาจให้ผู้เข้ารับการอบรมอภิปรายร่วมกัน เพื่อวิเคราะห์ในแต่ละขั้นตอนของการทำกิจกรรมนี้ว่าแต่ละข้อสะท้อนให้เห็นหรือสอดคล้องกับทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านใดบ้าง

3. วิทยากรสรุปเป็นภาพรวมร่วมกันกับผู้เข้ารับการอบรมว่าถ้าต้องการสร้างกิจกรรม หรือสร้างสถานการณ์ปัญหาที่ต้องการพัฒนาด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ควรมีการศึกษาเนื้อหาวางแผนการเขียนคำถาม การเชื่อมโยงคำตอบ การหาข้อสรุปว่าควรดำเนินกิจกรรมอย่างไรบ้าง ทั้งนี้เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรมเห็นแนวทางในการสร้างกิจกรรมได้ด้วยตนเอง

เฉลยใบกิจกรรม 2 “กระป๋องลูกเทนนิส”

กระป๋องพลาสติกใสทรงกระบอกแต่ละใบสามารถบรรจุลูกเทนนิสที่มีขนาดเท่ากันได้เพียง 3 ลูก ให้ทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. วาดรูปเรขาคณิตแทนทรงกระบอกที่บรรจุลูกเทนนิส



2. จากการมองภาพความสูงของกระป๋องกับความยาวรอบกระป๋องส่วนใดน่าจะยาวมากกว่า ความสูง และมากกว่ากันประมาณกี่เซนติเมตร ตามที่นักเรียนประมาณได้
3. ถ้าไม่พิจารณาความหนาของพลาสติกที่ใช้ทำกระป๋อง เนื่องจากมีความหนาน้อยมาก ให้ใช้รัศมีของฐานและความสูงของกระป๋องประกอบการคิดเปรียบเทียบความรู้กับความยาวรอบกระป๋องเทนนิส



ความสูงของกระป๋อง	ความยาวรอบกระป๋อง
6r หน่วย	$2\pi r$ หน่วย
3(2r) หน่วย	$\pi(2r)$ หน่วย

เมื่อ r แทนรัศมีของลูกเทนนิส

4. จากการคิดในข้อ 3 ความสูงของกระป๋องกับความยาวรอบกระป๋องจำนวนใดมากกว่ากัน ความยาวรอบกระป๋อง และถ้ามากกว่ากัน มากกว่ากันอยู่ประมาณกี่เซนติเมตร

   0.14r เซนติเมตร เพราะ $\pi \approx 3.14$ ซึ่งมากกว่า 3 ประมาณ 0.14 เซนติเมตร

5. ถ้าลูกเทนนิสที่ผลิตจากแต่ละบริษัทต่างมีขนาดไม่เท่ากัน และกระป๋องมีขนาดเปลี่ยนไปตามขนาดของลูกเทนนิส ผลที่ได้ตามข้อ 4 จะเปลี่ยนไปหรือไม่ เพราะเหตุใด

   ไม่เปลี่ยน เพราะถ้าขนาดหรือรัศมีของลูกเทนนิสเปลี่ยนไปความยาวรอบกระป๋องและความสูงของกระป๋อง ยังคงเป็น $2\pi r$ และ $6r$ หน่วย ตามลำดับเช่นเดิม ดังนั้นไม่ว่า r จะเป็นค่าใด ผลที่ได้ตามข้อ 4 ยังคงเป็นเช่นเดิม

ข้อสังเกตสำหรับวิทยากร

นักเรียนได้เคยเรียนเรื่องรูปทรงเรขาคณิตและพื้นที่ผิวและปริมาตรตลอดจนได้พัฒนาความรู้สึกเชิงปริภูมิมาแล้วการเชื่อมโยงความรู้ความสามารถเหล่านี้ไปใช้แก้ปัญหาจึงมีความสำคัญสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมสำหรับวิทยากรมีดังนี้

1. วิทยากรควรชี้แจงให้ผู้เข้ารับการอบรมเห็นความสำคัญของการสร้างกิจกรรมที่นักเรียนจะได้เชื่อมโยงความรู้ที่เรียนมาแล้วมาใช้ เพื่อพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ตลอดจนความสามารถทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ เช่น ความรู้สึกเชิงปริภูมิ

2. วิทยากรควรชี้ให้ผู้เข้ารับการอบรมค่อย ๆ ดำเนินกิจกรรมตามขั้นตอนซึ่งสร้างขึ้นตามลำดับความคิดของนักเรียนจากสิ่งที่เป็นรูปธรรมในข้อ 1 จนถึงสิ่งที่เป็นนามธรรมในข้อสุดท้ายการดำเนินการในแต่ละขั้นผู้เข้ารับการอบรมอาจปรับเปลี่ยนคำถามหรือประเด็นได้ตามลักษณะและธรรมชาติของนักเรียนและบริบทของการเรียนรู้ และควรให้ความสำคัญกับความคิดและคำถามของนักเรียน

3. วิทยากรควรสนทนากับผู้เข้ารับการอบรมถึงประเด็นหรือคำถามที่ใช้ในกิจกรรมเพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรมเห็นแนวทางการใช้ตั้งประเด็นหรือคำถาม เพื่อให้ผู้เรียนพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์จากการพยายามตอบคำถามหรือตอบสนองประเด็นเหล่านั้น

Power Point แนวการจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

แนวการจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะการแก้ปัญหา

1. จัดสถานการณ์ปัญหาที่มีแนวคิดและใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาได้หลากหลาย
2. นำเสนอปัญหาที่มีคำตอบได้หนึ่งคำตอบ หลายคำตอบ มากมายนับไม่ถ้วน และไม่มีคำตอบ
3. นำเสนอปัญหาแบบปลายเปิด เพื่อดูกระบวนการคิดในการแก้ปัญหา

แนวการจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะการให้เหตุผล

1. จัดปัญหาที่น่าสนใจ ไม่ยากเกินความสามารถของเด็กที่จะอธิบายและให้เหตุผล
2. ควรให้เป็นปัญหาปลายเปิด เพื่อดูกระบวนการคิดและการให้เหตุผล
3. ระหว่างการเรียนรู้ ครูใช้คำถามกระตุ้นความคิดด้วยคำว่า ทำไม อย่างไร เพราะเหตุใด
4. จัดการสอนให้มีการนำเสนอแนวคิดของตนเพื่อครูและเพื่อนักเรียนจะได้มีโอกาสเติมเต็ม

แนวการจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะการสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

1. จัดกิจกรรมที่ให้นักเรียนสังเกตได้ว่าคณิตศาสตร์เป็นภาษาสากล ใช้สัญลักษณ์ ใช้แบบจำลองต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์สื่อความหมายเดียวกัน
2. จัดปัญหาที่นักเรียนสามารถนำเสนอวิธีการแก้ปัญหาด้วยรูปแบบต่าง ๆ กันได้ เช่น ใช้ตาราง กราฟ สมการ แผนภาพ
3. จัดกิจกรรมหรือปัญหาที่ให้มีการอ่าน แปลความหมาย และวิพากษ์วิจารณ์

แนวการจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะการเชื่อมโยง

1. จัดกิจกรรมโดยใช้แหล่งการเรียนรู้นอกห้องเรียน หรือใช้สื่อการเรียนรู้ต่าง ๆ
2. จัดสถานการณ์ปัญหาที่ส่งเสริมให้นำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้เชื่อมโยงวิชาต่าง ๆ
3. จัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบบูรณาการ
4. จัดให้มีการทำโครงงาน ภาระงาน หรือชิ้นงานตามความเหมาะสม

แนวการจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

1. จัดกิจกรรมให้นักเรียนได้มีอิสระในการคิด
2. จัดให้มีการลงมือปฏิบัติจริง
3. จัดกิจกรรมเป็นปัญหาแบบปลายเปิด
4. จัดสถานการณ์ที่เอื้อต่อการพัฒนาความรู้เดิมให้เกิดการสร้างองค์ความรู้ใหม่
5. จัดให้มีการนำเสนอผลงาน เช่น ป้ายนิเทศ หรือนิทรรศการทางวิชาการ

เรื่อง โครงงานคณิตศาสตร์

แผนการอบรม

แผนการอบรมครูคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น สำหรับครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่

เรื่อง โครงงานคณิตศาสตร์

เวลา 4 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์ เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรม

1. มีความรู้ความเข้าใจในเรื่อง โครงงานคณิตศาสตร์
2. สามารถจัดกิจกรรมการเรียนรู้เกี่ยวกับโครงงานคณิตศาสตร์

สาระการเรียนรู้

1. ความหมาย และประเภทของโครงงานคณิตศาสตร์
2. ขั้นตอนในการทำโครงงานคณิตศาสตร์
3. การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กิจกรรมโครงงานคณิตศาสตร์
4. การประเมินโครงงานคณิตศาสตร์
5. กิจกรรมส่งเสริมการทำโครงงานคณิตศาสตร์

สาระสำคัญ

1. โครงงานคณิตศาสตร์ เป็นกิจกรรมที่ส่งเสริมการเรียนรู้สาระคณิตศาสตร์ เปิดโอกาสให้นักเรียนได้สืบเสาะแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง ตามความถนัด ความสนใจ และตามศักยภาพ ด้วยการเชื่อมโยงความรู้สาระที่เกี่ยวข้อง กับประเด็นปัญหาที่สนใจ โดยใช้กระบวนการทางวิทยาศาสตร์ การแบ่งประเภทของโครงงานขึ้นอยู่กับเกณฑ์ที่ใช้ในการแบ่ง
2. ขั้นตอนที่สำคัญของการทำโครงงานคณิตศาสตร์ประกอบด้วย การเลือกหัวข้อเรื่องของโครงงาน การกำหนดจุดประสงค์ของโครงงาน การศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้อง การวางแผนการทำโครงงาน การปฏิบัติงานตามแผน การเขียนรายงานโครงงาน และการนำเสนอโครงงาน
3. การจัดการเรียนรู้โดยใช้กิจกรรมโครงงานทำได้โดยสอดแทรกการทำโครงงานเข้าไปเป็นส่วนหนึ่งของบทเรียน เริ่มต้นด้วยการแนะนำและให้นักเรียนได้ลงมือทำโครงงานอย่างง่ายที่มีองค์ประกอบน้อยๆ ที่สอดรับกับกิจกรรมการเรียนรู้ แล้วค่อยๆ เพิ่มองค์ประกอบของโครงงานให้มากขึ้นในลักษณะค่อยเป็นค่อยไปจนกระทั่งมีความสมบูรณ์ตามรูปแบบของการเขียนรายงานการจัดทำโครงงาน
4. การประเมินโครงงานคณิตศาสตร์ พิจารณาได้จากกระบวนการจัดทำโครงงาน และผลสัมฤทธิ์ของโครงงาน สามารถใช้การประเมินผลรวมและการประเมินโดยใช้การวิเคราะห์ ตามเกณฑ์ที่กำหนด

5. ในการจัดการเรียนรู้สามารถสอดแทรกกิจกรรมส่งเสริมการทำโครงงานได้แก่ การใช้กิจกรรมฝึกทักษะคณิตศาสตร์ การทำแบบฝึกหัด การใช้ใบกิจกรรม การสรุปสาระสำคัญของบทเรียนในรูปโครงงาน การขยายฐานความรู้จากบทเรียน การนำคณิตศาสตร์ไปอธิบายสิ่งต่าง ๆ รอบตัว การประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์ รวมทั้งการศึกษาจากตัวอย่างโครงงาน และแหล่งการเรียนรู้ต่าง ๆ

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน / ยาก

1. การจัดกิจกรรมให้นักเรียนเริ่มต้นเรียนรู้และทำโครงงานคณิตศาสตร์ มักสอนในเชิงทฤษฎีก่อน เช่น ความหมาย ประเภทของโครงงานคณิตศาสตร์ ขั้นตอนในการทำโครงงานคณิตศาสตร์ การนำเสนอโครงงาน การประเมินโครงงานคณิตศาสตร์ แล้วจึงให้นักเรียนลงมือทำโครงงานคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นเรื่องยากสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา อาจทำให้ไม่ประสบความสำเร็จ นักเรียนไม่สามารถทำโครงงานได้

แนวทางหนึ่งในการจัดกิจกรรมคือให้นักเรียนเรียนรู้โครงงานอย่างง่ายที่สอดคล้องกับบทเรียนด้วยการลงมือปฏิบัติเรียนรู้โครงงานจากเค้าโครงของโครงงานที่กำหนดให้ก่อนโดยมีส่วนร่วมในการทำโครงงานนั้นให้สมบูรณ์ จากนั้นจึงให้นักเรียนทำโครงงานคณิตศาสตร์ตามความสนใจ โดยอาศัยขั้นตอนของการทำโครงงาน

2. โครงงานคณิตศาสตร์ ต้องมีสมมติฐานที่ถูกต้องคือ โครงงานคณิตศาสตร์ประเภททดลอง ซึ่งมีการจัดกระทำ และศึกษาผลที่เกิดขึ้น ดังนั้นจึงต้องมีการกำหนดสมมติฐานเพื่อคาดเดาผลที่เกิดขึ้น สำหรับโครงงานประเภทอื่นๆ อาจมีการกำหนดสมมติฐานหรือไม่ก็ได้

สื่อและแหล่งการเรียนรู้

1. สำหรับผู้เข้ารับการอบรม

1.1 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1 : ใบความรู้ 1 แนวคิดของโครงงานคณิตศาสตร์

1.2 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 2 : ใบความรู้ 2 การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กิจกรรมโครงงาน

1.3 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 3 : ใบความรู้ 3 การประเมินโครงงานคณิตศาสตร์

1.4 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 4 : ใบความรู้ 4 กิจกรรมส่งเสริมการทำโครงงานและแหล่งที่มาของโครงงาน

1.5 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 5 : ใบกิจกรรม 1 การฝึกทำโครงงานอย่างง่าย

1.6 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 6 : ใบกิจกรรม 2 โครงงานอย่างง่ายสู่โครงงานเต็มรูป

1.7 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 7 : ใบกิจกรรม 3 การฝึกทำโครงงานจากเค้าโครง

2. สำหรับวิทยากร

2.1 เอกสารสำหรับวิทยากร 1 : แบบกรอกคะแนน เรื่อง โครงงานคณิตศาสตร์

การประเมินผล

รายการประเมิน	**เกณฑ์การให้คะแนน (คะแนนเต็ม 20 คะแนน)**	**เครื่องมือ**
1. การมีส่วนร่วมในกิจกรรม พิจารณาจาก เข้าร่วมกิจกรรม	**คะแนนเต็ม 15 คะแนน โดย** ได้ 15 คะแนน เมื่อเข้าร่วมกิจกรรมครบทุกกิจกรรมย่อยและมีส่วนร่วมในการแสดงความคิดเห็นในกิจกรรม ได้ 12 คะแนน เมื่อเข้าร่วมกิจกรรมครบทุกกิจกรรมย่อย ได้ 7 คะแนน เมื่อเข้าร่วมกิจกรรมไม่ครบทุกกิจกรรมย่อย ได้ 0 คะแนน ไม่เข้าร่วมกิจกรรมย่อย	- แบบสังเกตการมีส่วนร่วมในกิจกรรม
2. การนำเสนอผลงาน พิจารณาจาก ข้อ 2.1 – 2.3 ดังนี้ 2.1. เป็นตัวแทนนำเสนอผลงานเดี่ยวหรือกลุ่มของใบกิจกรรม 2.2. เป็นผู้อภิปรายหรือแสดงความคิดเห็นต่อการนำเสนอผลงานเดี่ยว หรือกลุ่มตนเองหรือกลุ่มอื่นของใบกิจกรรม 2.3. เข้าร่วมรับฟังการนำเสนอผลงานของใบกิจกรรม	**คะแนนเต็ม 5 คะแนน โดย** ได้ 5 คะแนน เมื่อปฏิบัติครบ 3 ข้อ ได้ 4 คะแนน เมื่อปฏิบัติ 2 ข้อ ได้ 3 คะแนน เมื่อปฏิบัติ 1 ข้อ ได้ 0 คะแนน เมื่อไม่ปฏิบัติทั้งสามข้อ	- แบบประเมินการนำเสนอผลงาน

แนวทางปฏิบัติสำหรับวิทยากร

1. ศึกษาเอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม เอกสารสำหรับวิทยากร และสื่อประกอบการอบรมโดยละเอียด

2. จัดเตรียมทำสำเนาเอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม ตามจำนวนผู้เข้ารับการอบรม

3. วิทยากรอาจใช้ PowerPoint ประกอบการบรรยาย หรือการสรุปเนื้อหาการอบรม

แนวทางการจัดกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/เอกสาร	วัดและประเมินผล
ขั้นนำ (10 นาที) 1. วิทยากร นำเสนอกิจกรรมที่ผู้เข้าอบรมคุ้นเคย หรือสิ่งที่อยู่รอบตัวที่สามารถนำไปสู่การศึกษาให้ลุ่มลึกและสามารถจัดทำเป็นโครงงานคณิตศาสตร์ได้ เช่น การหาแบบรูปของจำนวนสิ่งต่างๆ ที่วางเรียงกันเป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า นำไปสู่การหารูปทั่วไปของความสัมพันธ์ของจำนวนในแบบรูป  การประมาณความสูงของสิ่งต่างๆ โดยใช้ตัวอ้างอิง การสร้างกราฟของสมการที่สอดคล้องกับสิ่งรอบตัว เช่น น้ำพุ	- ภาพการวางสิ่งของที่วางเรียงกันเป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า	

กิจกรรม	สื่อ/เอกสาร	วัดและประเมินผล
 **ขั้นดำเนินกิจกรรม** (3 ชั่วโมง) 1. วิทยากรอธิบาย ความหมายและประเภทของโครงงานคณิตศาสตร์ ขั้นตอนในการทำโครงงานคณิตศาสตร์ โดยยกตัวอย่างประกอบ และให้ผู้เข้ารับการอบรมศึกษาเอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1: ใบความรู้ 1 แนวคิดของโครงงานคณิตศาสตร์ เพิ่มเติม (20 นาที) 2. วิทยากรแนะนำ “การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กิจกรรมโครงงานคณิตศาสตร์” และกล่าวถึงความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับองค์ประกอบของโครงงานคณิตศาสตร์ และการสอนโครงงานคณิตศาสตร์กับนักเรียน โดยใช้เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 2: ใบความรู้ 2 การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กิจกรรมโครงงานคณิตศาสตร์ (30 นาที)	- ภาพพญานาคพ่นน้ำที่สวนสองทะเล จังหวัดสงขลา - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1 : ใบความรู้ 1 โครงงานคณิตศาสตร์ - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 2 : ใบความรู้ 2 การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กิจกรรมโครงงานคณิตศาสตร์	- ประเมินจากผลการทำโครงงานอย่างง่าย

กิจกรรม	สื่อ/เอกสาร	วัดและประเมินผล
3. วิทยากรแนะนำ “โครงงานอย่างง่าย” แบ่งกลุ่มผู้เข้ารับการอบรมเป็นกลุ่มละ 4 – 6 คน แต่ละกลุ่มฝึกสร้างโครงงานอย่างง่าย โดยใช้เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 3 : ใบกิจกรรม 1 ฝึกทำโครงงานอย่างง่าย จากนั้นให้นำเสนอหน้าห้องประชุม วิทยากรสรุปและให้ข้อเสนอแนะ (60 นาที)	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 5 : ใบกิจกรรม 1 ฝึกทำโครงงานอย่างง่าย	
4. วิทยากรแนะนำการขยายแนวคิดของโครงงานอย่างง่ายไปสู่โครงงานเต็มรูป โดยแนะนำการหาผลบวกของเลขโดดในแต่ละหลักของจำนวนโดยไม่คิดค่าประจำหลักจนกระทั่งได้เลขโดดตัวหนึ่ง เช่น 24 $\longrightarrow$ 2+4 = **6** 57 $\longrightarrow$ 5+7 = 12 $\longrightarrow$ 1+2 = **3** 169 $\longrightarrow$ 1+6+9 = 16 $\longrightarrow$ 1+6 = **7** ซึ่งจะพบว่าได้ผลลัพธ์เป็นเลขโดดได้ตั้งแต่ 1 ถึง 9 โดยไม่มี 0 ให้ผู้เข้ารับการอบรมใช้วิธีการนี้กับผลคูณในสูตรคูณแม่ต่างๆ เช่น สูตรคูณแม่ 4 ให้หาผลบวกของเลขโดดของจำนวนที่เป็นผลคูณเรียงตามลำดับ โดยไม่คิดค่าประจำหลักจนกระทั่งได้เลขโดดตัวหนึ่ง จากนั้นลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมตำแหน่งของเลขโดด บนวงกลมที่มีตัวเลข 1 ถึง 9 ดังตัวอย่างในเอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 4: ใบกิจกรรม 2 โครงงานอย่างง่ายสู่โครงงานเต็มรูป วิทยากรแบ่งกลุ่มผู้เข้ารับการอบรมเป็นกลุ่มละ 4 – 6 คน แต่ละกลุ่มค้นหาแบบรูปของผลบวกของเลขโดดจากสูตรคูณแม่ต่างๆ ตามที่กลุ่มเลือก กลุ่มละ 3	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 6 : ใบกิจกรรม 2 โครงงานอย่างง่ายสู่โครงงานเต็มรูป	- ประเมินจากการทำโครงงานจากเค้าโครง

กิจกรรม	สื่อ/เอกสาร	วัดและประเมินผล
แม่สูตรคูณ โดยจัดทำในลักษณะโครงงานอย่างง่าย (10 นาที) วิทยากรแนะนำว่า จากกิจกรรมโครงอย่างง่ายที่ศึกษาเกี่ยวกับแบบรูปของผลบวกของเลขโดดจากสูตรคูณ ซึ่งศึกษาในเรื่องเดียวกัน แต่มีความแตกต่างกันในรายละเอียด สามารถนำมาหลอมรวมกันและขยายแนวคิดไปสู่การทำโครงงานที่สมบูรณ์ขึ้นในลักษณะโครงงานเต็มรูปได้ วิทยากรแนะนำส่วนประกอบของรายงานของโครงงานเต็มรูปจากนั้นให้แต่ละกลุ่มฝึกทำโครงงานโดยใช้เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 4: ใบกิจกรรม 2 จากโครงงานอย่างง่ายสู่โครงงานเต็มรูป โดยร่วมกันทำโครงงานในใบกิจกรรมให้สมบูรณ์จากนั้นวิทยากรสรุป (20 นาที)		
5. วิทยากรแนะนำเค้าโครงของโครงงานคณิตศาสตร์ โดยให้ผู้เข้ารับการอบรมศึกษาและมีส่วนร่วมในการทำให้เป็นโครงงานที่สมบูรณ์ โดยใช้เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 5: ใบกิจกรรม 3 ฝึกทำโครงงานจากเค้าโครง โดยให้แต่ละกลุ่มเลือกเพียง 1 เรื่อง เท่านั้น (20 นาที)	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 7: ใบกิจกรรม 3 ฝึกทำโครงงานจากเค้าโครง	
6. วิทยากรแนะนำ การประเมินโครงงานคณิตศาสตร์ และให้ผู้เข้ารับการอบรมศึกษาเอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 6: ใบความรู้ 3 การประเมินโครงงานคณิตศาสตร์ (10 นาที)	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 3: ใบความรู้ 3: การประเมินโครงงานคณิตศาสตร์	

กิจกรรม	สื่อ/เอกสาร	วัดและประเมินผล
7. วิทยากรสุ่มเลือกผู้เข้าการอบรมบางกลุ่มให้นำเสนอผลการดำเนินตามเอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 5 : ใบกิจกรรม 4 ฝึกทำโครงงานจากเค้าโครงและให้ผู้เข้ารับการอบรมกลุ่มอื่นๆ ฝึกประเมินโครงงาน สำหรับกลุ่มอื่นๆ ที่ไม่ได้นำเสนอหน้าห้องประชุม ให้นำเสนอโดยการติดป้ายนิเทศ (30 นาที) 8. วิทยากรแนะนำกิจกรรมส่งเสริมการทำโครงงานคณิตศาสตร์ พร้อมแสดงตัวอย่างประกอบเพิ่มเติม โดยใช้เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 7: ใบความรู้ 4 กิจกรรมส่งเสริมการทำโครงงานคณิตศาสตร์ จากนั้นสรุปกิจกรรมโครงงานคณิตศาสตร์ (20 นาที)	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 4 : ใบความรู้ 4 กิจกรรมส่งเสริมการทำโครงงานคณิตศาสตร์	

เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม

ใบความรู้ 1 แนวคิดของโครงงานคณิตศาสตร์

1.1 ความหมายของโครงงานคณิตศาสตร์

โครงงานคณิตศาสตร์ (mathematics project) ในความหมายที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอน เป็นกิจกรรมการเรียนรู้ที่นักเรียนร่วมกันสำรวจ สังเกต ค้นคว้าหาความรู้ด้านคณิตศาสตร์ในสิ่งที่สงสัยและอยากศึกษาหาคำตอบ หาคำอธิบายให้เข้าใจลึกซึ้งชัดเจน โดยบูรณาการองค์ความรู้ภายในขอบเขตทางเลือกที่ผู้จัดทำโครงงานคัดสรรเอง ใช้วิธีการศึกษาอย่างเป็นระบบและมีขั้นตอนต่อเนื่อง มีการวางแผนการทำงาน และลงมือปฏิบัติตามแผนที่วางไว้ จนได้ข้อค้นพบตามจุดประสงค์ที่กำหนดไว้ เป็นการเรียนรู้ที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์โดยใช้กิจกรรมการปฏิบัติเป็นฐาน (activity-based learning) โครงงานคณิตศาสตร์เป็นกิจกรรมที่ส่งเสริมการเรียนรู้ด้วยตนเองอย่างอิสระ (independent learning) อีกทั้งยังเอื้ออำนวยต่อการเสาะแสวงหาความรู้และเรียนรู้ร่วมกันเป็นกลุ่มหรือหมู่คณะ ส่งเสริมการคิดวิเคราะห์ การจัดการความรู้ และการสื่อสารถ่ายทอดแนวความคิดของตนเองให้ผู้อื่นเข้าใจได้

1.2 ประเภทของโครงงานคณิตศาสตร์

โครงงานคณิตศาสตร์เมื่อพิจารณาจากวิธีการศึกษาและผลที่เกิดขึ้น สามารถแบ่งได้เป็น 5 ประเภท ดังนี้

1. **โครงงานคณิตศาสตร์ประเภททดลอง** เป็นการศึกษาหาคำตอบของปัญหาใดปัญหาหนึ่งโดยการออกแบบทดลองและดำเนินการทดลองเพื่อหาคำตอบของปัญหาที่ต้องการทราบหรือเพื่อตรวจสอบสมมติฐานที่ตั้งไว้ ขั้นตอนของการทำโครงงานประเภทนี้ประกอบด้วย การกำหนดปัญหา การตั้งสมมติฐาน การออกแบบการทดลอง ซึ่งจะต้องมีการควบคุมตัวแปรต่างๆที่อาจส่งผลต่อตัวแปรที่ต้องการศึกษา แล้วดำเนินการทดลองโดยจัดกระทำกับตัวแปรอิสระหรือตัวแปรต้นเพื่อดูผลที่เกิดขึ้นกับตัวแปรตาม รวมทั้งการแปลผลและสรุปผลการทดลอง

2. **โครงงานประเภทสำรวจ** เป็นกิจกรรมการศึกษาและรวบรวมข้อมูลจากธรรมชาติและสิ่งแวดล้อมโดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาหาความรู้ที่มีอยู่หรือเป็นอยู่ในธรรมชาติและสิ่งแวดล้อมโดยใช้วิธีการสำรวจและรวบรวมข้อมูลแล้วนำข้อมูลเหล่านั้นมาจัดกระทำ เช่น จำแนกเป็นหมวดหมู่ แล้วนำเสนอในรูปแบบต่างๆ ตามความเหมาะสม

3. **โครงงานเชิงประวัติศาสตร์** เป็นโครงงานที่ศึกษาเกี่ยวกับประวัติความเป็นมาของเรื่องราวต่างๆทางคณิตศาสตร์ เช่น ประวัติของสัญลักษณ์ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ ประวัติของจำนวนและตัวเลข ประวัตินักคณิตศาสตร์และผลงานทางคณิตศาสตร์ การคิดค้นและการหาข้อค้นพบต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ เช่น ประวัติของจำนวนศูนย์ ประวัติของ π ประวัติของสามเหลี่ยมพาสคาลและการประยุกต์ใช้

4. โครงงานประเภทการพัฒนาหรือการประดิษฐ์ เป็นการพัฒนาหรือประดิษฐ์เครื่องมือ เครื่องใช้ หรืออุปกรณ์ต่างๆให้ใช้งานได้ตามวัตถุประสงค์ โดยการประยุกต์ทฤษฎีหรือหลักการของสาระที่เกี่ยวข้อง อาจเป็นการประดิษฐ์สิ่งใหม่ที่ยังไม่เคยมีมาก่อน หรือการปรับปรุงอุปกรณ์หรือสิ่งประดิษฐ์ที่มีอยู่แล้วให้ใช้งานได้ดีกว่าเดิม รวมทั้งอาจเป็นการเสนอหรือปรับสร้างแบบจำลองทางความคิดเพื่อแก้ปัญหาใดปัญหาหนึ่ง

5. โครงงานประเภทสร้างทฤษฎีหรือการอธิบาย โครงงานประเภทนี้เป็นโครงงานที่ผู้ทำจะต้องเสนอแนวคิดใหม่ๆในการอธิบายเรื่องใดเรื่องหนึ่งอย่างมีเหตุผล มีหลักการทางคณิตศาสตร์หรือทฤษฎีสนับสนุน หรือเป็นการอธิบายปรากฏการณ์เก่าในแนวใหม่ อาจเสนอในรูปคำอธิบาย สูตรหรือสมการ โดยมีข้อมูลหรือทฤษฎีอื่นสนับสนุน การทำโครงงานประเภทนี้ผู้ทำจะต้องมีพื้นฐานความรู้ในสาระที่เกี่ยวข้อง เป็นอย่างดี และต้องศึกษาค้นคว้าเรื่องราวที่เกี่ยวข้องอย่างมากจึงจะสามารถสร้างคำอธิบายหรือทฤษฎีได้

ประเภทของโครงงานต่างๆ ไม่ได้แบ่งแยกออกจากกันอย่างสิ้นเชิง โครงงานบางโครงงานอาจมีลักษณะเป็นโครงงานมากกว่าหนึ่งประเภทก็ได้ สำหรับในด้านที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ สามารถแบ่งการจัดการเรียนการสอนหรือการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับโครงงานคณิตศาสตร์ได้เป็น 3 แนวทางคือ

1. การจัดการเรียนรู้โดยใช้กิจกรรมโครงงาน (project activities) เป็นการจัดการเรียนรู้โดยสอดแทรกการทำโครงงานเข้าไปในกิจกรรมการเรียนรู้หลังจากเรียนรู้เนื้อหาสาระจากบทเรียนแล้ว เป็นการนำการทำโครงงานเข้ามาเป็นกิจกรรมเพื่อฝึกทักษะ เสริมสร้างความเข้าใจ เพิ่มพูนความรู้ และประยุกต์ใช้ความรู้ รวมทั้งการขยายฐานความรู้ที่สัมพันธ์สอดคล้องกับบทเรียน การจัดการเรียนรู้โดยใช้กิจกรรมโครงงานจัดว่าเป็นวิธีการจัดการเรียนรู้วิธีหนึ่ง

2. การสอนการทำโครงงาน (teaching for projects) มีจุดประสงค์หลักเพื่อสอนให้นักเรียนทำโครงงานได้ อาจเริ่มจาการเลือกหัวข้อเรื่องของโครงงาน การกำหนดจุดประสงค์ของโครงงาน การศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้อง การวางแผนการทำโครงงาน การปฏิบัติงานตามโครงงาน การเขียนรายงานโครงงาน และการนำเสนอโครงงาน เนื้อหาสาระที่เกี่ยวข้องกับโครงงานเปิดกว้างตามความสนใจของนักเรียน

3. การจัดการเรียนรู้แบบโครงงาน (project approach) หรือ การจัดการเรียนรู้โดยใช้โครงงานเป็นฐาน (project based learning) เป็นการจัดการเรียนรู้ที่ตอบสนองความสนใจของนักเรียนเป็นรายบุคคลหรือรายกลุ่ม นักเรียนได้เรียนรู้เนื้อหาสาระจากการทำโครงงานที่ริเริ่มโดยนักเรียนเองโดยมีครูผู้สอนหรือผู้รู้เป็นผู้ให้คำแนะนำ และให้คำปรึกษา

ในการจัดการเรียนรู้สามารถผสมผสานทั้งสามแนวทางเข้าด้วยกันก็ได้

1.3 ขั้นตอนในการทำโครงงานคณิตศาสตร์

การทำโครงงานของนักเรียนมีขั้นตอนทำนองเดียวกันกับการทำวิจัยของครู ขั้นตอนสำคัญของการทำโครงงานแบ่งได้เป็น 7 ขั้นตอน คือ การเลือกหัวข้อเรื่องโครงงาน การกำหนดจุดประสงค์โครงงาน การศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้อง การวางแผนการทำโครงงาน การปฏิบัติงานตามโครงงาน การเขียนรายงานโครงงาน และการนำเสนอโครงงาน ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 การเลือกหัวข้อเรื่องโครงงาน

การคิดหาหัวข้อเรื่องที่จะทำโครงงานเป็นขั้นตอนแรกที่มีความสำคัญ เป็นประตูไปสู่ขั้นตอนอื่นๆ นักเรียนอาจเริ่มต้นด้วยคำถามว่า มีความสนใจในเรื่องใด ทำไมจึงสนใจเรื่องดังกล่าว ต้องการค้นหาคำตอบเกี่ยวกับเรื่องใด สิ่งที่จะนำมากำหนดเป็นหัวข้อเรื่องของโครงงานจะได้มาจาก ปัญหา คำถาม ความสนใจ หรือความอยากรู้อยากเห็นในเรื่องต่างๆ ของนักเรียนเอง หัวข้อเรื่องของโครงงานต้องมีความเฉพาะเจาะจง มีความชัดเจน สื่อความหมายได้ว่าโครงงานนี้ทำอะไร ควรเป็นเรื่องที่นักเรียนผู้จัดทำสามารถศึกษาหาคำตอบได้โดยใช้ความรู้เนื้อหาที่มีอยู่เป็นฐานการคิดนำไปสู่เรื่องที่จะทำโครงงาน

ขั้นตอนที่ 2 การกำหนดจุดประสงค์โครงงาน

การกำหนดจุดประสงค์ของโครงงาน เป็นการกำหนดทิศทางของโครงงานตามหัวข้อเรื่องที่เลือกว่าต้องการคำตอบอะไร มีความลุ่มลึกเพียงใด จุดประสงค์ที่กำหนดต้องสามารถหาคำตอบได้จากการทำโครงงาน จุดประสงค์ของโครงงานไม่จำเป็นต้องมีหลายข้อ ประเด็นสำคัญคือจุดประสงค์ทุกข้อต้องหาคำตอบได้ครบถ้วนเมื่อโครงงานสิ้นสุดลง การกำหนดจุดประสงค์ของโครงงานมีความสัมพันธ์กับองค์ประกอบต่างๆ ของโครงงานที่สำคัญได้แก่ เนื้อหาสาระที่เกี่ยวข้อง วิธีดำเนินงาน และผลของการดำเนินงาน

ขั้นตอนที่ 3 การศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องแบ่งได้เป็นสามส่วนคือ ใน*ส่วนแรก*ผู้จัดทำโครงงานต้องพิจารณาว่าในโครงงานนั้นมีความเกี่ยวข้องกับเนื้อหาสาระใดบ้าง จะนำเนื้อหาสาระมาใช้ในแง่มุมใด เป็นการเชื่อมโยงความรู้กับงานในโครงงาน ใน*ส่วนที่สอง*ผู้จัดทำโครงงานต้องศึกษาทำความเข้าใจเนื้อหาสาระที่เกี่ยวข้องให้เข้าใจอย่างถ่องแท้ เพื่อให้สามารถนำมาใช้ในการทำโครงงานได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม *ส่วนที่สาม*เป็นการศึกษาขั้นตอนวิธีการในการค้นหาคำตอบของโครงงาน อาจศึกษาจากหนังสือ เอกสาร อินเทอร์เน็ต หรือศึกษาจากโครงงานที่เกี่ยวข้องซึ่งมีผู้เคยจัดทำมาก่อนแล้ว ศึกษาแนวทาง วิธีการ เครื่องมือในการเก็บรวบรวมข้อมูล เพื่อนำไปสู่ผลการดำเนินงานที่สอดคล้องจุดประสงค์ของโครงงาน

และขณะที่ทำโครงงานก็สามารถศึกษาเอกสารเพิ่มเติมได้ การศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องครอบคลุมถึงการขอคำปรึกษาจากคุณครู และผู้รู้อื่นๆ

ขั้นตอนที่ 4 การวางแผนการทำโครงงาน

ก่อนที่จะจัดทำโครงงานต้องมีการวางแผนการทำงานจากจุดเริ่มต้นไปจนกระทั่งได้แนวทางของการทำโครงงาน สามารถจัดทำในรูปเค้าโครงของโครงงานซึ่งจะทำให้เห็นภาพของโครงงานที่ชัดเจนขึ้น เป็นการสร้างแผนที่ความคิดของโครงงานที่จะจัดทำเพื่อนำไปสู่การทำโครงงานจริงๆให้ประสบความสำเร็จ เค้าโครงของโครงงานจะประกอบด้วยหัวข้อต่างๆ เช่นเดียวกับโครงการของงานวิจัย ได้แก่ ชื่อโครงงาน ผู้จัดทำโครงงาน ที่ปรึกษาโครงงาน ความเป็นมา จุดประสงค์โครงงาน สมมติฐาน(ถ้ามี) เนื้อหาสาระที่เกี่ยวข้อง ระยะเวลาดำเนินงาน วิธีดำเนินงาน ประโยชน์ของโครงงาน และ บรรณานุกรม สำหรับนักเรียนในชั้นเล็กๆ อาจให้นำเสนอโครงงานด้วยวาจา หรือนำเสนอเพียงบางหัวข้อที่สำคัญ เช่น ชื่อโครงงาน ผู้จัดทำโครงงาน คุณครูที่ปรึกษา จุดประสงค์ เนื้อหาสาระที่เกี่ยวข้อง วิธีดำเนินงาน

ขั้นตอนที่ 5 การปฏิบัติงานตามโครงงาน

เมื่อแผนการทำโครงงานของนักเรียนได้แก้ไขปรับปรุงตามคำแนะนำและได้รับความเห็นชอบจากคุณครูที่ปรึกษาแล้ว ผู้จัดทำโครงงานสามารถลงมือปฏิบัติงานตามแผนงานที่กำหนดไว้ในเค้าโครงของโครงงาน อาจต้องมีการศึกษาทำความเข้าใจเอกสารเพิ่มเติม จัดหาหรือสร้างเครื่องมือ ลงมือปฏิบัติงานและบันทึกผลที่เกิดขึ้น เก็บรวบรวมข้อมูลอย่างมีระบบเป็นระเบียบเพื่อให้ได้คำตอบตามที่กำหนดไว้ในจุดประสงค์โครงงาน และใช้เป็นข้อมูลสำหรับการปรับปรุงการดำเนินงานในโอกาสต่อไปด้วย การปฏิบัติกิจกรรมตามที่ระบุไว้ในขั้นตอนการดำเนินงานในเค้าโครงของโครงงาน เป็นการฝึกการทำงานตามแผนและศึกษาค้นคว้าหาคำตอบอย่างเป็นกระบวนการด้วยตนเอง

ขั้นตอนที่ 6 การเขียนรายงานโครงงาน

ถ้าเปรียบเทียบกับงานวิจัยขั้นตอนนี้ก็คือการเขียนรายงานการวิจัย เป็นการรายงานการดำเนินงานตามเค้าโครงของโครงงานและผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินงาน เป็นการสรุปรายงานผลการดำเนินงานโครงงานตั้งแต่เริ่มต้นจนสิ้นสุด เพื่อให้ผู้อื่นได้ทราบถึงผลที่ได้รับ และข้อเสนอแนะต่างๆ เกี่ยวกับโครงงานที่ได้จัดทำ การเขียนรายงานโครงงานเป็นการสื่อสารแนวคิดของตนเองให้ผู้อื่นเข้าใจ ควรใช้ภาษาที่เข้าใจง่าย กระชับรัดกุม ชัดเจนและครอบคลุมประเด็นสำคัญๆ ของโครงงานที่ปฏิบัติไปแล้ว การเขียนรายงานโครงงานควรมีส่วนประกอบ ได้แก่ หน้าปก และปกใน (ประกอบด้วย ชื่อโครงงาน ผู้จัดทำโครงงาน ระดับชั้น คุณครูที่ปรึกษาโครงงาน ภาคเรียนที่ ปีการศึกษา และอาจเพิ่มเติม โรงเรียน จังหวัด) บทคัดย่อ คำนำ สารบัญ ความเป็นมาของโครงงาน จุดประสงค์ของโครงงาน

สมมติฐาน (ถ้ามี) เนื้อหาสาระที่เกี่ยวข้อง ระยะเวลาดำเนินงาน วิธีดำเนินงาน ผลการดำเนินงาน สรุปและข้อเสนอแนะ บรรณานุกรม ภาคผนวก บางแห่งกำหนดให้มีการนำเสนอรายงานโครงงาน เป็น 5 บท เช่นเดียวกับการนำเสนอรายงานการวิจัย ได้แก่ ส่วนนำ ประกอบด้วย ชื่อโครงงาน ผู้จัดทำ บทคัดย่อ คำนำ สารบัญ บทที่ 1 ความเป็นมา จุดประสงค์ สมมติฐาน(ถ้ามี) บทที่ 2 เอกสารที่เกี่ยวข้อง กล่าวถึงเนื้อหาสาระ และทฤษฎีต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง บทที่ 3 วิธีดำเนินงาน บทที่ 4 ผลการดำเนินงาน บทที่ 5 สรุปและข้อเสนอแนะ (อาจมีการให้ระบุประโยชน์ที่ได้รับจากการทำโครงงาน) และบรรณานุกรม

ขั้นตอนที่ 7 การนำเสนอโครงงาน

โครงงานที่จัดทำเรียบร้อยแล้ว ผู้จัดทำต้องนำเสนอผลการดำเนินงานโครงงานทั้งหมด ซึ่งอาจอยู่ในรูปเอกสาร รายงาน ชิ้นงาน สิ่งประดิษฐ์ หรือ แบบจำลอง ตามประเภทของโครงงานที่ทำ นำเสนอให้ผู้เกี่ยวข้องได้รับทราบ เป็นการแสดงความสามารถในการนำเสนอ การสื่อสารแนวคิดของสิ่งที่ศึกษามาเพื่อนำเสนอต่อผู้อื่นให้รับรู้และเข้าใจ การนำเสนอโครงงานสามารถทำได้ในรูปแบบต่างๆ กัน เช่น การนำเสนอในที่ประชุม การจัดป้ายนิเทศ การแสดงในรูปนิทรรศการ การนำเสนอผ่านเครือข่ายอินเทอร์เน็ต เปิดช่องทางให้ผู้เข้าชมมีปฏิสัมพันธ์โดยถามคำถามและแสดงความคิดเห็น เพื่อนำผลไปปรับปรุงและพัฒนางานต่อไป

ในการแนะนำขั้นตอนการทำโครงงานกับนักเรียนที่กล่าวมานี้สามารถปรับให้เหมาะสมกับวัยของนักเรียนได้ นักเรียนในชั้นต้นๆ สามารถลดหัวข้อของการเขียนรายงานลงได้ การนำเสนอโครงงานก็อาจให้นักเรียนนำเสนอหน้าชั้นเรียนเป็นการฝึกการนำเสนอ หลังจากนั้นนำผลงานของนักเรียนมาจัดแสดงบนป้ายนิเทศเป็นการสร้างความภาคภูมิใจให้กับนักเรียน

ใบความรู้ที่ 2 การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กิจกรรมโครงงาน

สำหรับนักเรียนที่เริ่มต้นเรียนรู้การทำโครงงาน ถ้าเริ่มต้นด้วยการให้นักเรียนทำโครงงานและเขียนรายงานการทำโครงงานที่มีองค์ประกอบที่สมบูรณ์ครบถ้วนทำนองเดียวกันกับรายงานงานวิจัยจึงเป็นเรื่องที่ทำได้ยาก ในเอกสารนี้ขอเสนอแนวทางในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กิจกรรมโครงงานด้วยวิธีสอดแทรกกิจกรรมการทำโครงงานเข้าไปเป็นส่วนหนึ่งของบทเรียน เริ่มต้นด้วยการแนะนำให้นักเรียนได้ลงมือทำโครงงานอย่างง่าย หรือ โครงงานเล็กๆ (mini project) ที่มีองค์ประกอบน้อย ๆ ซึ่งสอดรับกับกิจกรรมการเรียน และการทำแบบฝึกหัดตามปกติของนักเรียนแล้วค่อยๆ เพิ่มงานและองค์ประกอบของการเขียนรายงานการจัดทำโครงงานให้มากขึ้นในลักษณะค่อยเป็นค่อยไปจนกระทั่งมีความสมบูรณ์ตามรูปแบบของการเขียนรายงานการจัดทำโครงงานคณิตศาสตร์เต็มรูป โดยมีจุดประสงค์เพื่อให้นักเรียนได้เพิ่มพูนความรู้ความเข้าใจสาระสำคัญของบทเรียนและการเชื่อมโยงความรู้ผ่านการทำโครงงาน ในขณะเดียวกันก็ได้เรียนรู้วิธีการทำโครงงานในลักษณะที่มีความเชื่อมโยงกับสาระในบทเรียนและครอบคลุมถึงการประยุกต์ใช้ความรู้ทางสาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับบทเรียน

แนวทางในการจัดการเรียนรู้โดยใช้กิจกรรมโครงงาน สามารถแบ่งได้เป็น 4 ขั้นตอน โดยที่ 2 ขั้นตอนแรกเป็นการฝึกทำโครงงานอย่างง่าย อีก 2 ขั้นตอนต่อไป เป็นการฝึกทำโครงงานคณิตศาสตร์ที่มีความสมบูรณ์ขึ้น โดยที่ขั้นตอนที่ 1 ถึง 3 เป็นการฝึกทำโครงงานที่อยู่ภายใต้กรอบของจุดประสงค์การเรียนรู้ของบทเรียน ซึ่งอาจมีการขยายแนวคิด หรือ ประยุกต์ใช้เนื้อหาจากบทเรียนก็ได้ เมื่อนักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับการทำโครงงานคณิตศาสตร์พอสมควรแล้ว ในขั้นตอนที่ 4 จึงเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ทำโครงงานอย่างอิสระภายใต้การให้คำแนะนำของครูที่ปรึกษา อาจเป็นโครงงานเชิงบูรณาการที่มีความเชื่อมโยงกับสาระการเรียนรู้อื่นๆ สามารถดำเนินการในลักษณะเป็นกิจกรรมเสริมนอกเหนือไปจากการเรียนการสอนตามปกติ ในขั้นตอนนี้ครูสามารถให้ความรู้เกี่ยวกับขั้นตอนในการทำโครงงานกับนักเรียนดังที่ได้กล่าวถึงใน เรื่องที่ 2 และครูควรให้ความรู้เกี่ยวกับโครงงานที่มีลักษณะแตกต่างไปจากเดิม เช่น โครงงานประเภททดลองที่ต้องเพิ่มองค์ประกอบของโครงงานในเรื่อง ตัวแปรต้น ตัวแปรตาม สมมติฐานของการทดลอง และแสดงผลการทดสอบสมมติฐานในผลการดำเนินงาน

แนวทางในการจัดการเรียนรู้โดยใช้กิจกรรมโครงงาน 4 ขั้นตอน แสดงด้วยแผนภาพได้ดังต่อไปนี้

เชื่อมโยงกิจกรรมในบทเรียนคณิตศาสตร์สู่โครงงาน ฝึก**การคิดแบบเปิด**

ขั้นตอนที่ 1 เริ่มเรียนรู้สู่โครงงานเบื้องต้น: ฝึกทำโครงงานอย่างง่าย ฝึกการตั้งชื่อ กำหนดจุดประสงค์ ระบุหัวข้อของเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง และเขียนผลการดำเนินงานที่สอดคล้องกับจุดประสงค์ พิจารณาความเข้ากันได้ของส่วนประกอบต่างๆ

นักเรียนทำแบบฝึกหัดทำกิจกรรมการเรียนที่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ของบทเรียน นำเสนอในรูป**โครงงานอย่างง่าย** ฝึกการเขียนรายงานโครงงาน

ขั้นตอนที่ 2 ฝึกฝนเติมสาระและระบุวิธีดำเนินงาน : ฝึกทำโครงงานอย่างง่าย โดยเพิ่มการเขียนรายละเอียดของเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง และเขียนวิธีดำเนินงานในการจัดทำโครงงาน

ฝึกทำโครงงานที่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ของบทเรียน

ขั้นตอนที่ 3 สอดประสานทำโครงงานที่สมบูรณ์: ฝึกทำโครงงานที่มีความลุ่มลึกขึ้นนำเสนอโดยเพิ่มเติมหัวข้อที่สำคัญของโครงงาน ให้สมบูรณ์ ได้แก่ ความเป็นมา ระยะเวลาดำเนินงาน สรุปและข้อเสนอแนะ และหัวข้ออื่นๆ ที่เห็นว่าเหมาะสม อาจให้เรียนรู้การทำโครงงานจากเค้าโครงของโครงงาน โดยให้ลงมือปฏิบัติตามเค้าโครง แสดงผลการดำเนินงาน สร้างข้อสรุปและให้

ทำกิจกรรมการเรียนขยายฐานความรู้จากบทเรียน นำเสนอในรูป**โครงงานคณิตศาสตร์เต็มรูป**

เป็นโครงงานตามความสนใจของนักเรียน

ขั้นตอนที่ 4 เพิ่มพูนประสบการณ์ทำโครงงานที่สนใจ : เพิ่มเติมความรู้เกี่ยวกับการจัดทำโครงงานประเภทต่าง ๆ ตามความสนใจของนักเรียน นอกเหนือไปจากการจัดทำโครงงานที่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนจัดทำโครงงานตามความสนใจ อาจมีความเชื่อมโยงกับสาระการเรียนรู้อื่นๆ ในลักษณะบูรณาการก็ได้

ใบความรู้ 3 การประเมินโครงงานคณิตศาสตร์

การประเมินโครงงานตามแนวทางของการประเมินตามสภาพจริงสามารถแบ่งได้เป็น 2 ตอน คือ การประเมินกระบวนการจัดทำโครงงาน และการประเมินผลสัมฤทธิ์ของโครงงาน ซึ่งในแต่ละตอนต้องกำหนดวิธีการและเครื่องมือในการประเมิน การประเมินกระบวนการจัดทำโครงงานเป็นการประเมินระหว่างการลงมือปฏิบัติทำโครงงานของนักเรียนทั้งที่เป็นรายบุคคลและการร่วมมือกันทำงานเป็นกลุ่ม ครอบคลุมการวางแผนการทำงาน การศึกษาค้นคว้า การเก็บรวบรวมข้อมูล การแปลความหมายซึ่งสามารถประเมินโดยครูที่ปรึกษาโครงงาน โดยทั่วไปการประเมินโครงงานมักให้ความสำคัญกับการประเมินผลสัมฤทธิ์ของโครงงานที่เป็นผลสำเร็จแล้ว เรียกว่า **การประเมินคุณภาพโครงงาน**

การประเมินคุณภาพโครงงานคณิตศาสตร์ ต้องกำหนดขอบข่ายหรือประเด็นของสิ่งที่ต้องการประเมินเพื่อนำมากำหนดตัวบ่งชี้ กำหนดวิธีการและเครื่องมือประเมิน ตัวอย่างเช่น สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ (2541 : 2–6) กำหนดประเด็นหลักในการประเมิน 4 ประเด็น คือ ความสำคัญของการจัดทำโครงงาน เนื้อหาของโครงงาน กระบวนการทำงาน และการนำเสนอโครงงานคณิตศาสตร์ นำแต่ละประเด็นมากำหนดตัวบ่งชี้เพื่อนำไปใช้สร้างแบบประเมินคุณภาพโครงงานซึ่งครูที่ปรึกษาโครงงานสามารถนำไปใช้ประเมินภาพรวมของคุณภาพโครงงานคณิตศาสตร์ ดังนี้

1) ความสำคัญของการจัดทำโครงงานคณิตศาสตร์ พิจารณาจากตัวบ่งชี้ต่อไปนี้

(1) การริเริ่มโครงงาน นักเรียนริเริ่มเองหรือครูช่วยแนะแนวทาง

(2) การมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

(3) การมีส่วนช่วยพัฒนาตนของผู้จัดทำโครงงาน

(4) ช่วยให้เกิดการร่วมมือกันทำงานเป็นกลุ่ม

(5) ความเชื่อมโยงกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ในบทเรียน

(6) ความมีประโยชน์ของโครงงาน

2) เนื้อหาของโครงงาน พิจารณาจากตัวบ่งชี้ต่อไปนี้

(1) ความถูกต้องของเนื้อหาทางคณิตศาสตร์

(2) ความเหมาะสมในการใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์

(3) การเลือกใช้ข้อมูลได้เหมาะสมตรงประเด็นปัญหา

(4) มีการอธิบายโดยใช้เนื้อหาคณิตศาสตร์ที่ชัดเจน

3) กระบวนการทำงาน พิจารณาจากตัวบ่งชี้ต่อไปนี้

(1) มีการวางแผนอย่างมีระบบ

(2) วิธีดำเนินงานอยู่ในแนวทางที่ทำให้บรรลุจุดประสงค์

(3) มีการดำเนินงานตามแผน

(4) มีการประเมินและปรับปรุงการดำเนินงานให้เหมาะสม

4) การนำเสนอโครงงานคณิตศาสตร์ พิจารณาจากตัวบ่งชี้ต่อไปนี้

(1) การรายงานสามารถสื่อความหมายได้ดี

(2) ความสมบูรณ์ของข้อมูล

(3) ความเหมาะสมของรูปแบบที่ใช้นำเสนอ

(4) ความน่าสนใจของวิธีการนำเสนอ

(5) ความสอดคล้องของผลการดำเนินงานกับจุดประสงค์ที่กำหนด

การประเมินคุณภาพโครงงานคณิตศาสตร์สามารถใช้วิธีการสังเกตการทำงาน การประเมินคุณภาพของชิ้นงาน และการวิเคราะห์จากรายงานโครงงาน โดยนำตัวบ่งชี้ของแต่ละประเด็นกำหนดเป็นรายการประเมิน และเกณฑ์กำหนดระดับคุณภาพของงานซึ่งอาจจัดแบ่งเป็น 4 ระดับคุณภาพ คือ ระดับ 1 หมายถึง ต้องปรับปรุง ระดับ 2 หมายถึง พอใช้ ระดับ 3 หมายถึง ดี และระดับ 4 หมายถึง ดีมาก ส่วนในกรณีที่ไม่มีหลักฐานหรือร่องรอยของผลงานที่ช่วยให้สามารถลงความเห็นได้ อาจต้องกำหนดให้มีระดับ 0 ซึ่งหมายถึงไม่มีผลงานให้ประเมิน อย่างไรก็ตามในการทำโครงงานคณิตศาสตร์จะต้องมีผลปฏิบัติงานหรือหลักฐานร่องรอยของผลงานเกิดขึ้น เกณฑ์ต่ำที่สุดในการประเมินคุณภาพของโครงงานคณิตศาสตร์จึงควรเป็นระดับ 1 ซึ่งถือเป็นระดับต่ำสุด

ตัวอย่างที่ 1

แบบประเมินการปฏิบัติ การทำโครงงานอย่างง่าย

คำชี้แจง ให้ผู้เข้าอบรมแบ่งเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4 คน แต่ละกลุ่มร่วมกันจัดทำ**โครงงานอย่างง่าย** (mini project) กลุ่มละ 1 โครงงาน ซึ่งมีความเกี่ยวข้องกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาเรื่องใดเรื่องหนึ่ง การนำเสนอรายงานโครงงานอย่างง่าย ให้ประกอบด้วยหัวข้อต่อไปนี้

1. **ชื่อโครงงาน** ควรตั้งชื่อให้น่าสนใจ และสื่อความหมายให้เห็นภาพรวมของโครงงานที่ทำ
2. **ชื่อผู้จัดทำ** ให้ระบุรายชื่อผู้จัดทำทุกคนหรือตั้งเป็นชื่อกลุ่มผู้จัดทำ อาจระบุชื่อครูที่ปรึกษาเป็นชื่อบุคคลที่ได้ขอคำปรึกษาในการทำโครงงาน
3. **จุดประสงค์** ระบุถึงสิ่งที่ต้องการศึกษา หรือต้องการหาคำตอบด้วยการทำโครงงาน
4. **สาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง** ให้ระบุเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่มีความเชื่อมโยง หรือนำมาใช้ในการจัดทำโครงงาน
5. **ผลการดำเนินงาน** ให้แสดงผลของการศึกษาที่สอดคล้องกับจุดประสงค์ของโครงงาน โดยหาวิธีการนำเสนอให้น่าสนใจ

ให้แต่ละกลุ่มช่วยกันจัดทำโครงงานอย่างง่ายโดยเขียนรายงานลงบนกระดาษ A4 จำนวน 1 – 2 หน้า ตกแต่งระบายสีให้สวยงามและน่าสนใจ ใช้เวลาประมาณ 30 นาที หลังจากนั้นส่งตัวแทนกลุ่ม จำนวน 1 – 2 คน นำเสนอรายงานหน้าห้องประชุมโดยใช้เครื่องฉายวัสดุทึบแสง ใช้เวลานำเสนอกลุ่มละประมาณ 3 – 5 นาที กลุ่มที่ไม่ได้นำเสนอ ฝึกประเมินโครงงาน โดยใช้ตัวอย่างแบบประเมินโครงงานต่อไปนี้

แบบประเมินการทำโครงงานอย่างง่าย (mini project)

ชื่อโครงงาน .....

ผู้จัดทำ .....

ระดับคุณภาพ 4 – ดีมาก 3 – ดี 2 – พอใช้ 1 – ควรปรับปรุง 0 – ปรับปรุงไม่ได้

ที่	รายการประเมิน	ระดับคุณภาพ				
		4	3	2	1	0
1	**ชื่อโครงงาน** มีความน่าสนใจ สื่อความหมายได้สอดคล้องกับสิ่งที่นำเสนอ					
2	**จุดประสงค์ของโครงงาน** มีความชัดเจน มีความเป็นไปได้ที่จะตอบสนองจุดประสงค์โดยการทำโครงงาน					
3	**สาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง** โครงงานมีความเชื่อมโยงกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่กล่าวถึง เนื้อหาคณิตศาสตร์มีความถูกต้อง					
4	**ผลการดำเนินงาน** มีความสอดคล้องกับจุดประสงค์ มีวิธีการแสดงผลการดำเนินงานที่น่าสนใจ					
5	**การนำเสนอโครงงาน** สื่อความหมายได้ชัดเจน เข้าใจง่าย วิธีการนำเสนอที่น่าสนใจ					
รวมคะแนน .....คะแนน (คะแนนเต็ม 20 คะแนน)						

ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อผู้ประเมิน .....

ตัวอย่างที่ 2

แบบประเมินการทำโครงงานคณิตศาสตร์(mathematics project)

คำชี้แจง ให้ผู้เข้าอบรมแต่ละกลุ่มเลือกศึกษาเค้าโครงของโครงงานคณิตศาสตร์ต่อไปนี้ กลุ่มละ 1 เรื่อง แล้วจัดทำเป็นโครงงานที่สมบูรณ์ พร้อมจัดทำรายงานโครงงานให้ครอบคลุมหัวข้อที่สำคัญต่อไปนี้

1. ชื่อโครงงาน
2. ชื่อผู้จัดทำ (หรือชื่อกลุ่ม) และชื่อครูที่ปรึกษา
3. ความเป็นมา
4. จุดประสงค์
5. สมมติฐาน (ถ้ามี)
6. สาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง
7. ระยะเวลาดำเนินงาน
8. วิธีดำเนินงาน
9. ผลการดำเนินงาน
10. สรุปและข้อเสนอแนะ

โดยให้ปรับปรุงรายละเอียดของเค้าโครงโครงงานให้เหมาะสม จัดทำรายงานโครงงานโดยเขียนบนกระดาษ A4 ตกแต่งระบายสีให้สวยงาม ใช้เวลาทำโครงงาน 45 นาที และส่งตัวแทนนำเสนอหน้าห้องประชุม กลุ่มละ 5 – 10 นาที กลุ่มที่ไม่ได้นำเสนอ ฝึกประเมินโครงงาน โดยใช้ตัวอย่างแบบประเมินโครงงาน ต่อไปนี้

แบบประเมินโครงงานคณิตศาสตร์

ชื่อโครงงาน .....

ผู้จัดทำ .....

ระดับคุณภาพ 4 – ดีมาก 3 – ดี 2 – พอใช้ 1 – ควรปรับปรุง 0 – ปรับปรุงไม่ได้

ที่	รายการประเมิน	ระดับคุณภาพ				
		4	3	2	1	0
1	ชื่อโครงงาน มีความน่าสนใจ สื่อความหมายได้สอดคล้องกับสิ่งที่นำเสนอ					
2	การกล่าวถึงความเป็นมาของโครงงาน ทำให้เห็นความสำคัญ หรือความน่าสนใจของโครงงานที่ทำ					
3	จุดประสงค์ของโครงงาน มีความชัดเจน มีความเป็นไปได้ที่จะตอบสนองจุดประสงค์โดยการทำโครงงาน					
4	ระบุเนื้อหาสาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องได้ถูกต้อง เนื้อหามีความเชื่อมโยงกับโครงงานที่ทำ					
5	มีการระบุวิธีดำเนินงานอย่างเป็นขั้นตอน ทำให้เห็นแนวทางการได้ข้อมูลที่สอดคล้องกับจุดประสงค์ของโครงงาน					
6	วิธีดำเนินงานมีความครอบคลุมจุดประสงค์ของโครงงาน					
7	ผลการดำเนินงาน มีความสอดคล้องกับจุดประสงค์ ตอบวัตถุประสงค์ได้ครบถ้วน					
8	คณิตศาสตร์ที่นำเสนอในผลการดำเนินงานมีความถูกต้อง ชัดเจน เข้าใจง่าย					
9	มีวิธีการแสดงผลการดำเนินงานที่น่าสนใจ					
10	มีวิธีการนำเสนอโครงงานต่อผู้ฟังได้น่าสนใจ ตอบข้อซักถามได้ชัดเจน หรือมีวิธีการนำเสนอที่ทำให้ผู้ฟังมีส่วนร่วม					
รวมคะแนน .....คะแนน (คะแนนเต็ม 40 คะแนน)						

ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

ลงชื่อผู้ประเมิน .....

ใบความรู้ 4 กิจกรรมส่งเสริมการทำโครงงาน และแหล่งที่มาของโครงงาน

1. กิจกรรมส่งเสริมการทำโครงงาน

ในการจัดการเรียนรู้ครูสามารถสอดแทรกกิจกรรมส่งเสริมการทำโครงงานได้แก่ การใช้กิจกรรมฝึกทักษะ การให้เรียนรู้โครงงานจากใบงานหรือใบกิจกรรม การส่งเสริมการทำโครงงานด้วยแบบฝึกหัดปลายเปิด และ การสรุปสาระสำคัญของบทเรียนในรูปโครงงาน และอื่นๆ ดังต่อไปนี้

1) การใช้กิจกรรมฝึกทักษะส่งเสริมการทำโครงงานคณิตศาสตร์

ในการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียน หลังจากที่จัดกิจกรรมให้นักเรียนได้เรียนรู้เนื้อหาใหม่แล้ว ขั้นตอนที่สำคัญอีกขั้นตอนหนึ่งคือ การฝึกทักษะเพื่อเสริมสร้างความรู้ความเข้าใจ ซึ่งอาจจะอยู่ในรูป เกม การเล่น แบบฝึกหัดหรือแบบฝึกทักษะ รวมทั้งการให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการสร้างโจทย์ในแบบฝึกทักษะในลักษณะที่นักเรียนสนใจ แล้วให้นักเรียนนำเสนอในรูปโครงงานอย่างง่าย

2) การให้เรียนรู้โครงงานจากใบงานหรือใบกิจกรรม

ในโครงงานที่ดัดแปลง ปรับเปลี่ยนมาจากใบงานหรือใบกิจกรรมนี้ นักเรียนได้มีโอกาสเห็นความสอดคล้องกันของจุดประสงค์ วิธีดำเนินงานที่จัดกระทำเพื่อให้บรรลุผลตามจุดประสงค์ มีโอกาสคุ้นเคยกับการเขียนแสดงผลการดำเนินงานที่สอดรับกับจุดประสงค์ ในส่วนของ **สาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง** นักเรียนได้เห็นความสอดคล้องของสาระความรู้ที่นำมาใช้ในการจัดทำโครงงาน สำหรับโครงงานที่เป็นการขยายฐานความรู้ไปจากบทเรียนปกติก็สามารถสร้างเป็นใบกิจกรรมให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติและคุ้นเคยกับการเขียนรายงานโครงงานไปด้วยพร้อม ๆ กัน

3) การส่งเสริมการทำโครงงานด้วยแบบฝึกหัดแบบเปิด

แบบฝึกหัดแบบเปิดเป็นแบบฝึกหัดที่ใช้คำถามปลายเปิดให้นักเรียนมีอิสระในการหาคำตอบตามมุมมองของนักเรียน รวมถึงการใช้คำถามที่มีคำตอบได้หลาย ๆ คำตอบ เช่น หลังจากนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 เรียนเรื่อง การวัดความยาวและความสัมพันธ์ของหน่วยการวัดความยาว ครูมีแบบฝึกหัดให้นักเรียนไปสำรวจสิ่งต่าง ๆ ในชีวิตประจำวันที่แสดงการนำหน่วยการวัดความยาวไปใช้หลาย ๆ อย่าง แล้วให้นำเสนอข้อความรู้ในรูปโครงงาน

4) การสรุปสาระสำคัญของบทเรียนในรูปโครงงาน

หลังจากเรียนจบบทเรียนแล้ว ผู้เรียนสามารถสรุปบทเรียนนั้นด้วยตนเอง อาจใช้วิธีการเขียนสรุปเชิงพรรณนา แผนภูมิต้นไม้ (tree diagram) หรือแสดงในรูปแผนที่ความคิด (mind mapping) ก็ได้ แล้วนำเสนอในรูปโครงงานอย่างง่ายที่มีองค์ประกอบหลักที่สำคัญ ได้แก่ ชื่อโครงงาน จุดประสงค์ สาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง และผลการดำเนินงาน

2. แหล่งที่มาของโครงงาน

โครงงานคณิตศาสตร์มีแหล่งที่มาอย่างหลากหลาย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

1) โครงงานคณิตศาสตร์จากโจทย์ปัญหา

หลังจากที่นักเรียนได้เรียนรู้เนื้อหาเกี่ยวกับบทนิยาม สมบัติต่าง ๆ รวมถึงทฤษฎีบททาง คณิตศาสตร์แล้ว เพื่อให้นักเรียนได้เห็นการนำความรู้นั้นไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ ในกิจกรรมการเรียนรู้ จึงมักตามด้วยการประยุกต์ใช้โดยนำเสนอในรูปของโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ซึ่งมีลักษณะเป็น สถานการณ์ เรื่องราวเป็นตัวอย่าง แล้วให้นักเรียนฝึกแก้โจทย์ปัญหาจากแบบฝึกหัด ถ้าเป็นโจทย์ปัญหาที่ มีความเกี่ยวข้องกับชีวิตจริง สถานการณ์หรือสิ่งต่าง ๆ ที่อยู่รอบตัว ก็ยิ่งช่วยทำให้บทเรียนนั้นมี ความหมายยิ่งขึ้น

2) โครงงานคณิตศาสตร์จากสิ่งรอบตัว

การเป็นคนช่างสังเกต สร้างข้อสงสัย และหาคำอธิบายข้อสงสัยนั้นซึ่งเป็นคุณลักษณะที่ควรสร้าง ให้มีในตัวนักเรียน การที่นักเรียนสามารถนำคณิตศาสตร์มาอธิบายเหตุการณ์ หรือนำมาใช้แก้ปัญหาช่วย ทำให้เห็นความเชื่อมโยงของคณิตศาสตร์ เห็นประโยชน์และคุณค่าของคณิตศาสตร์ และช่วยให้บทเรียน คณิตศาสตร์มีความหมายยิ่งขึ้น

3) โครงงานคณิตศาสตร์ที่เกิดจากความสนใจเป็นพิเศษ

ความสนใจในเรื่องใดเรื่องหนึ่งเป็นการเฉพาะ ต้องการศึกษาทำความเข้าใจในเรื่องนั้นอย่าง ชัดเจน ลุ่มลึก นำไปสู่การจัดทำโครงงานได้ โดยแสดงวิธีการศึกษา และแสดงผลของการศึกษาอย่างเป็น ระบบอธิบายได้อย่างมีเหตุผลตรงประเด็นที่สนใจ

4) โครงงานจากการทดลอง

มีชื่อเฉพาะว่าโครงงานเชิงทดลองเป็นการศึกษาผลที่เกิดขึ้นจากการจัดกระทำ ต่างจากโครงงาน เชิงสำรวจที่เป็นการศึกษาสภาพที่เป็นอยู่ตามปกติ โดยไม่มีการจัดกระทำ ในการทดลองต้องมีสิ่งทดลอง หรือตัวจัดกระทำ มีชื่อเฉพาะว่า **ตัวแปรต้น**หรือ**ตัวแปรอิสระ** ต้องมีการควบคุมสภาพการทดลอง ให้ผล ที่เกิดขึ้นนั้นเกิดจากการให้สิ่งทดลองจริง ๆ ไม่ใช่เกิดขึ้นเพราะเหตุอื่นซึ่งเรียกว่า **ตัวแปรเกิน** หรือ **ตัวแปร ควบคุม** จากนั้นศึกษาผลที่เกิดขึ้นจากการให้สิ่งทดลองนั้น ผลที่เกิดขึ้นเป็นสิ่งที่มุ่งศึกษาเรียกว่า **ตัวแปรตาม** ขั้นตอนต่าง ๆ ในการทำโครงการเชิงทดลองอาศัยกระบวนการทางวิทยาศาสตร์

ใบกิจกรรม 1 ฝึกทำโครงงานอย่างง่าย

1) โครงงานข้าวเหนียวในข้าวหลาม

ผู้จัดทำ ..... **ครูที่ปรึกษา** คุณครูปรีชา เนาว์เย็นผล

จุดประสงค์ เพื่อจัดกลุ่มผลบวกของจำนวนนับแยกเป็นจำนวนคี่ และจำนวนคู่

สาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง การบวก จำนวนคู่ และจำนวนคี่

จำนวนนับที่หารด้วย 2 ลงตัว เรียกว่า *จำนวนคู่* จำนวนนับที่หารด้วย 2 *ไม่*ลงตัว เรียกว่า *จำนวนคี่*

ผลการดำเนินงาน

ถ้าผลบวกเป็นจำนวนคู่ ข้าวหลามทำด้วยข้าวเหนียวดำ

ถ้าผลบวกเป็นจำนวนคี่ ข้าวหลามทำด้วยข้าวเหนียวขาว

13 + 17 ◯	24 + 32 ◯	34 + 11 ◯
25 + 19 ◯	36 + 44 ◯	25 + 32 ◯
41 + 25 ◯	18 + 36 ◯	43 + 26 ◯
29 + 43 ◯	30 + 56 ◯	19 + 48 ◯
51 + 67 ◯	52 + 68 ◯	66 + 37 ◯

สรุป .....

.....

.....

.....

.....

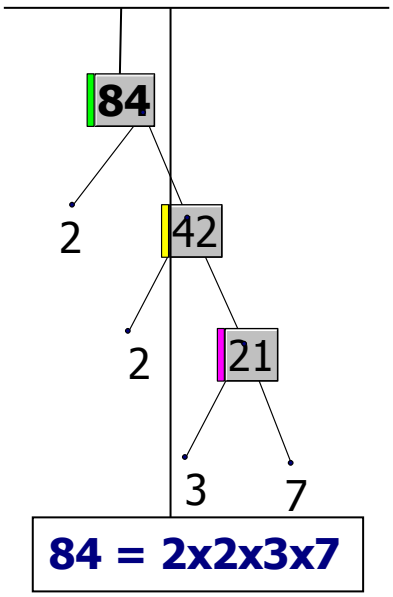
2) โครงงาน โมบายตัวประกอบ

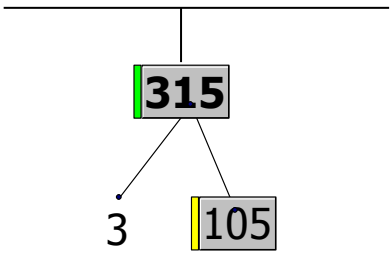
ผู้จัดทำ ..... **ครูที่ปรึกษา** .....

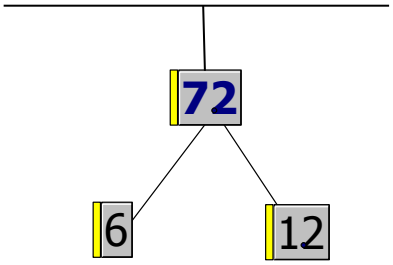
จุดประสงค์ เพื่อแสดงการแยกตัวประกอบของจำนวนนับ 84, 72, 315 และ 360

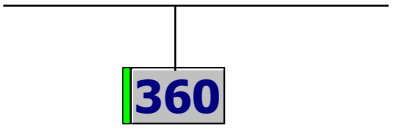
สาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง การแยกตัวประกอบของจำนวนนับ

ผลการดำเนินงาน









การแยกตัวประกอบของจำนวนนับ .....

.....

.....

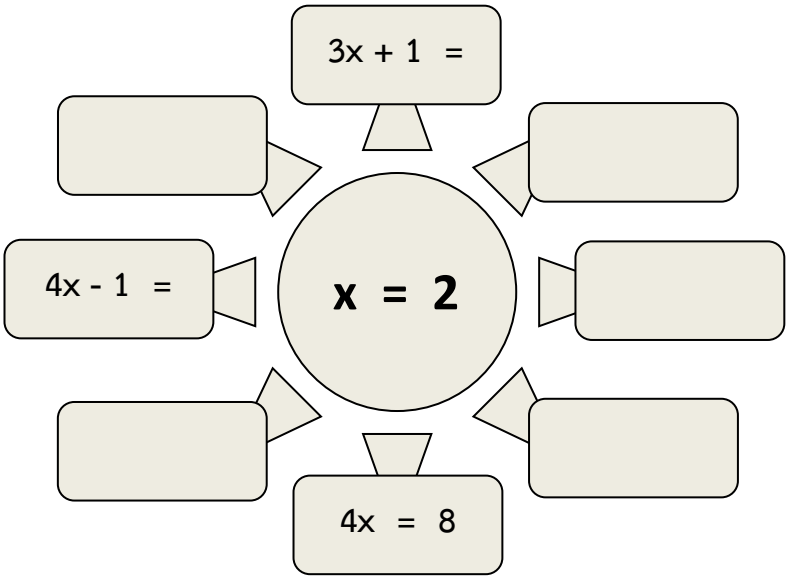
3) โครงงานสมการที่สมมูลกัน

ผู้จัดทำ ..... ***คุณครูที่ปรึกษา*** .....

จุดประสงค์ หาสมการที่สมมูลกับสมการ x= 2

สาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง สมการที่สมมูลกัน

ผลการดำเนินงาน สมการที่สมมูลกับสมการ x= 2 เป็นสมการที่มีคำตอบเป็น 2



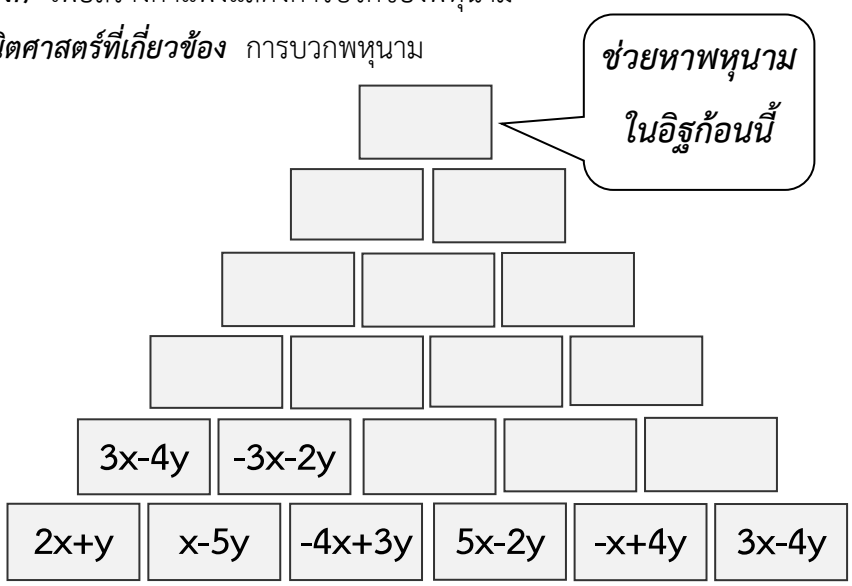
---

4) โครงงานก่อกำแพงผลบวกของพหุนาม

ผู้จัดทำ .....***คุณครูที่ปรึกษา*** .....

จุดประสงค์ เพื่อสร้างกำแพงแสดงการบวกของพหุนาม

สาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง การบวกพหุนาม



พหุนามในอิฐก้อนบนเป็นผลบวกของพหุนามในอิฐสองก้อนที่อยู่ข้างล่าง

5) ให้ผู้เข้ารับการอบรมทำโครงงานอย่างง่ายที่สอดคล้องกับเนื้อหาคณิตศาสตร์เรื่องใดเรื่องหนึ่งในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

ใบกิจกรรม 2 จากโครงงานอย่างง่ายสู่โครงงานเต็มรูป

4.1 โครงงานอย่างง่าย โครงงานแบบรูปจากผลบวกของเลขโดดจากสูตรคูณ

คำชี้แจง ให้ผู้เข้ารับการอบรมจัดทำโครงงานอย่างง่ายต่อไปนี้

โครงงานแบบรูปจากผลบวกของเลขโดดจากสูตรคูณ

ผู้จัดทำ ..... ครูที่ปรึกษา .....

จุดประสงค์ เพื่อศึกษาผลที่เกิดขึ้นจากการหาผลบวกของเลขโดดของผลคูณในสูตรคูณแม่ .... และ แม่ ....
โดยไม่คิดค่าประจำหลักจนกระทั่งได้เลขโดดตัวหนึ่ง ทั้งในเชิงจำนวนและเชิงรูปภาพ

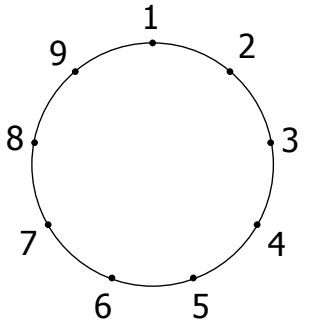
สาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง การคูณแบบรูป

ผลการดำเนินงาน

1. ผลคูณจากสูตรคูณแม่ ..... และผลบวกของเลขโดดของผลคูณจนกระทั่งได้เลขโดดตัวเดียว แสดงดังตาราง

ผลคูณจากสูตรคูณแม่												
ผลบวกของเลขโดด												

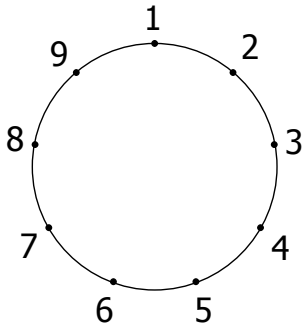
เขียนวงกลม และกำหนดจุด 9 จุดบนเส้นรอบวง ให้มีระยะห่างเท่าๆ กัน ให้แต่ละจุดเป็นตำแหน่งของเลขโดด 1, 2, 3, ... , 9 จากนั้นลากส่วนของเส้นตรงจากตำแหน่งของเลขโดดที่เป็นผลบวกของเลขโดดจากผลคูณในสูตรคูณแม่ ..... ตามลำดับผลคูณ จะได้รูปดังนี้



2. ผลคูณจากสูตรคูณแม่ ..... และผลบวกของเลขโดดของผลคูณจนกระทั่งได้เลขโดดตัวเดียว แสดงดังตาราง

ผลคูณจากสูตรคูณแม่												
ผลบวกของเลขโดด												

เขียนวงกลม และกำหนดจุด 9 จุดบนเส้นรอบวง ให้มีระยะห่างเท่าๆ กัน ให้แต่ละจุดเป็นตำแหน่งของเลขโดด 1, 2, 3, ... , 9 จากนั้นลากส่วนของเส้นตรงจากตำแหน่งของเลขโดดที่เป็นผลบวกของเลขโดดจากผลคูณในสูตรคูณแม่ ..... ตามลำดับผลคูณ จะได้รูปดังนี้



4.2 โครงงานดวงดาวจากสูตรคูณ

คำชี้แจง ให้ผู้เข้ารับการอบรมศึกษา **โครงงานดวงดาวจากสูตรคูณ** และช่วยกันทำโครงงานให้สมบูรณ์

โครงงานดวงดาวจากสูตรคูณ

ผู้จัดทำ ..... **ครูที่ปรึกษา** คุณครูปรีชา เนาว์เย็นผล

ความเป็นมา

จำนวนนับทั้งหลายเมื่อหาผลบวกของเลขโดดในแต่ละหลักโดยไม่คิดค่าประจำหลักจนกระทั่งได้เลขโดดตัวหนึ่ง เช่น

24 $\longrightarrow$ 2+4 = **6**

57 $\longrightarrow$ 5+7 = 12 $\longrightarrow$ 1+2 = **3**

169 $\longrightarrow$ 1+6+9 = 16 $\longrightarrow$ 1+6 = **7**

ผลลัพธ์เป็นเลขโดดได้ตั้งแต่ 1 ถึง 9 โดยไม่มี 0

จากผลคูณในสูตรคูณแม่ต่างๆ เช่น แม่ 4 เมื่อหาผลบวกของเลขโดดโดยไม่คิดค่าประจำหลักจนกระทั่งได้เลขโดดตัวหนึ่ง จะได้ผลลัพธ์ดังตาราง

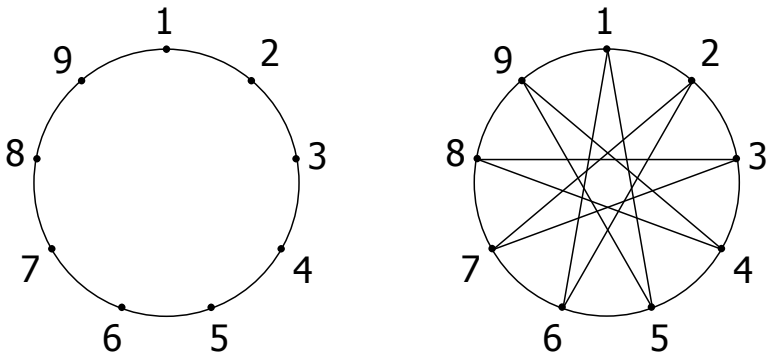
ผลคูณจากสูตรคูณแม่ 4	**ผลบวกของเลขโดดจากผลคูณจนกระทั่งได้เลขโดดตัวหนึ่ง**
1×4 = 4	4
2×4 = 8	8
3×4 = 12	1+2 = 3
4×4 = 16	1+6 = 7
5×4 = 20	2+0 = 2
6×4 = 24	2+4 = 6

ผลคูณจากสูตรคูณแม่ 4	**ผลบวกของเลขโดดจากผลคูณจนกระทั่งได้เลขโดดตัวหนึ่ง**
7×4 = 28	2+8 = 10; 1+0 = 1
8×4 = 32	3+2 = 5
9×4 = 36	3+6 = 9
10×4 = 40	4+0 = 4
10×4 = 44	4+4 = 8
12×4 = 48	4+8 = 12; 1+2 = 3

ต่อไปเขียนวงกลม และกำหนดจุด 9 จุดบนเส้นรอบวงให้มีระยะห่างเท่าๆ กัน ให้แต่ละจุดเป็นตำแหน่งของเลขโดด 1, 2, 3, ... , 9 ดังภาพซ้ายมือข้างล่าง

จากนั้นลากส่วนของเส้นตรงจากตำแหน่งของ 4 ไปยัง 8 ต่อไปยัง 3 ต่อไปยัง 7 ... เป็นการก้าวเดินครั้งละ 4 ก้าว เมื่อนับจุดที่อยู่บนเส้นรอบวง โดยเริ่มจากตำแหน่งของ 4 ไปยังตำแหน่งของเลขโดดที่เป็นผลบวกของเลขโดดจากผลคูณในสูตรคูณแม่ 4 กล่าวคือ ลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมโยงจุดตามลำดับดังต่อนี้

4 – 8 – 3 – 7 – 2 – 6 – 1 – 5 – 9 – 4 – 8 – 3 ... จะได้รูปดาวดังภาพขวามือ



ในโครงงานนี้จะศึกษาว่าเมื่อใช้วิธีการที่กระทำกับผลคูณในสูตรแม่ 4 ดังข้างต้น กระทำกับผลคูณในสูตรคูณแม่ต่างๆ จะเกิดผลเป็นอย่างไร

จุดประสงค์

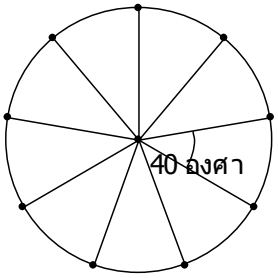
1. เพื่อศึกษาผลที่เกิดขึ้นจากการหาผลบวกของเลขโดดของผลคูณในสูตรคูณโดยไม่คิดค่าประจำหลักจนกระทั่งได้เลขโดดตัวหนึ่ง ทั้งในเชิงจำนวนและเชิงรูปภาพ
2. หาความสัมพันธ์ของสูตรคูณแม่ต่างๆ เมื่อพิจารณาจากผลบวกของเลขโดดของผลคูณโดยไม่คิดค่าประจำหลักจนกระทั่งได้เลขโดดตัวหนึ่ง

3. เพื่อสร้างงานประดิษฐ์จากผลบวกของเลขโดดของผลคูณจากสูตรคูณแม่ต่างๆ

สาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

การคูณ สูตรคูณ เลขโดด แบบรูปของจำนวน มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม

1. **การคูณ** การบวกจำนวนที่เท่ากันซ้ำๆ สามารถเขียนได้ในรูปการคูณ เช่น 3+3+3+3 = 4×3; 2+2+2+2+2 = 5×2 การหาผลคูณจึงหาได้จากการบวก เช่น 2×7 = 7+7 = 14; 5×6 = 6+6+6+6+6 = 30; 8×9 = 9+9+9+9+9+9+9+9 = 72
2. **สูตรคูณ** การหาผลคูณจากการบวกค่อนข้างใช้เวลา นักคณิตศาสตร์ตั้งแต่สมัยโบราณจึงได้คิดสร้างตารางสำเร็จรูปในการหาผลคูณของจำนวนนับ เรียกว่า **สูตรคูณ** เพื่อให้สามารถนำไปใช้ในการคิดคำนวณได้สะดวกและรวดเร็ว
3. **เลขโดด** ในการเขียนตัวเลขเพื่อบอกจำนวนต่างๆ ตัวเลขแต่ละตัวที่อยู่ในหลักต่างๆ เรียกว่า **"เลขโดด (digit)"** เช่น วันนี้ไก่ออกไข่ 36 ฟอง ในตัวเลข 36 มีเลขโดดสองตัว คือ 3 และ 6
4. **แบบรูปของจำนวน** เป็นการเขียนตัวเลขแสดงจำนวนอย่างมีกฎเกณฑ์ ทำให้สามารถคาดเดาได้ว่าจำนวนถัดไปควรเป็นจำนวนใด เช่น 1, 3, 5, 7, ... เป็นจำนวนที่เพิ่มขึ้นครั้งละ 2 จาก 1 คาดเดาได้ว่าจำนวนถัดไปควรเป็น 9, 11, ... 5, 10, 15, 20, ... เป็นจำนวนที่เพิ่มขึ้นครั้งละ 5 จาก 5 คาดเดาได้ว่าจำนวนถัดไปควรเป็น 25, 30,... จำนวนในสูตรคูณได้มาอย่างมีกฎเกณฑ์ทำให้เกิดแบบรูปของจำนวนที่น่าสนใจหลายอย่าง
5. **มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม** มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมมีขนาด 360 องศา ถ้าแบ่งเป็น 9 ส่วน ส่วนละเท่าๆ กัน จะได้ส่วนละ 360÷9 = 40 องศา แขนของมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม มุมละ 40 องศา จะตัดเส้นรอบวงของวงกลม 9 จุด โดยที่แต่ละจุดมีระยะห่างเท่าๆ กัน



วิธีดำเนินงาน

1. เขียนผลคูณในสูตรคูณแม่ต่างๆ เรียงตามลำดับ ทีละแม่
2. หาผลบวกของเลขโดดของผลคูณในสูตรคูณแต่ละแม่โดยไม่คิดค่าประจำหลักจนกระทั่งได้เลขโดดตัวหนึ่ง

3. เขียนวงกลม และกำหนดจุด 9 จุดบนเส้นรอบวงให้มีระยะห่างเท่าๆ กัน ให้แต่ละจุดเป็นตำแหน่งของเลขโดด 1, 2, 3, ... , 9 จากนั้นลากส่วนของเส้นตรงจากตำแหน่งของเลขโดดที่เป็นผลบวกของเลขโดดจากผลคูณในสูตรคูณแม่ต่างๆ
4. วิเคราะห์ความสัมพันธ์ของสูตรคูณแม่ต่างๆ เมื่อพิจารณาจากผลบวกของเลขโดดของผลคูณโดยไม่คิดค่าประจำหลักจนกระทั่งได้เลขโดดตัวหนึ่ง
5. สร้างงานประดิษฐ์โดยอาศัยแนวคิดจากข้อ 3

ผลการดำเนินงาน

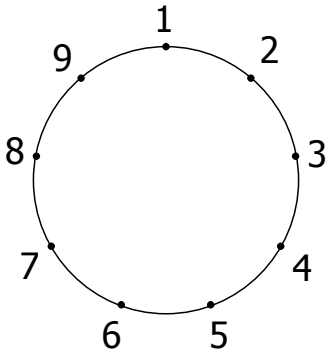
1. ผลที่เกิดขึ้นจากการหาผลบวกของเลขโดดของผลคูณในสูตรคูณโดยไม่คิดค่าประจำหลักจนกระทั่งได้เลขโดดตัวหนึ่ง ทั้งในเชิงจำนวนและเชิงรูปภาพ

1.1 **สูตรคูณแม่ 2**

ผลคูณจากสูตรคูณแม่ 2 และผลบวกของเลขโดดของผลคูณจนกระทั่งได้เลขโดดตัวเดียว แสดงดังตาราง

ผลคูณจากสูตรคูณแม่ 2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
ผลบวกของเลขโดด	2	4	6	8	1	3	5	7	9	2	4	6

เขียนวงกลม และกำหนดจุด 9 จุดบนเส้นรอบวงให้มีระยะห่างเท่าๆ กัน ให้แต่ละจุดเป็นตำแหน่งของเลขโดด 1, 2, 3, ... , 9 จากนั้นลากส่วนของเส้นตรงจากตำแหน่งของเลขโดดที่เป็นผลบวกของเลขโดดจากผลคูณในสูตรคูณแม่ 2 โดยเริ่มจากตำแหน่งของ 2 แล้วก้าวเดินไปครั้งละ 2 ก้าว เมื่อนับจุดที่อยู่บนเส้นรอบวง ไปยังตำแหน่งของเลขโดดที่เป็นผลบวกของเลขโดดจากผลคูณในสูตรคูณแม่ 2 จะได้รูปดังนี้

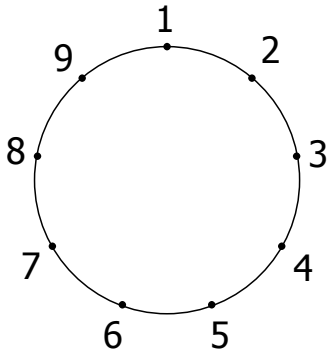


1.2 **สูตรคูณแม่ 3**

ผลคูณจากสูตรคูณแม่ 3 และผลบวกของเลขโดดของผลคูณจนกระทั่งได้เลขโดดตัวเดียว แสดงดังตาราง

ผลคูณจากสูตรคูณแม่ 3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
ผลบวกของเลขโดด	3	6	9	3	6	9	3	6	9	3	6	9

เขียนวงกลม และกำหนดจุด 9 จุดบนเส้นรอบวง ให้มีระยะห่างเท่าๆ กัน ให้แต่ละจุดเป็นตำแหน่งของเลขโดด 1, 2, 3, ... , 9 จากนั้นลากส่วนของเส้นตรงจากตำแหน่งของเลขโดดที่เป็นผลบวกของเลขโดดจากผลคูณในสูตรคูณแม่ 3 เรียงตามลำดับจากตาราง 3 – 6 – 9 – 3 – 6 – 9 ... โดยเริ่มจากตำแหน่งของ 3 แล้วก้าวเดินไปครั้งละ 3 ก้าว



เมื่อนับจุดที่อยู่บนเส้นรอบวง ไปยังตำแหน่งของเลขโดดที่เป็นผลบวกของเลขโดดจากผลคูณในสูตรคูณแม่ 3 จะได้ผลดังภาพ

1.3 **สูตรคูณแม่ 5, 6, 7**

ผลคูณจากสูตรคูณแม่ 5, 6, 7 และผลบวกของเลขโดดของผลคูณจนกระทั่งได้เลขโดดตัวเดียว แสดงดังตาราง

สูตรคูณแม่ 5

ผลคูณจากสูตรคูณแม่ 5												
ผลบวกของเลขโดด												

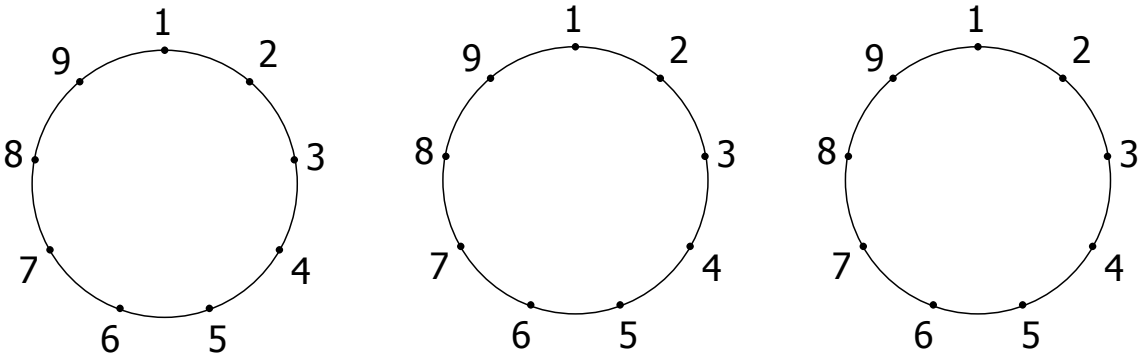
สูตรคูณแม่ 6

ผลคูณจากสูตรคูณแม่ 6												
ผลบวกของเลขโดด												

สูตรคูณแม่ 7

ผลคูณจากสูตรคูณแม่ 7												
ผลบวกของเลขโดด												

เขียนวงกลม และกำหนดจุด 9 จุดบนเส้นรอบวงให้มีระยะห่างเท่าๆ กัน ให้แต่ละจุดเป็นตำแหน่งของเลขโดด 1, 2, 3, ... , 9 จากนั้นลากส่วนของเส้นตรงจากตำแหน่งของเลขโดดที่เป็นผลบวกของเลขโดดจากผลคูณในสูตรคูณแม่ 5, 6, 7 เรียงตามลำดับจากตาราง จะได้รูปดังนี้



1.4 **สูตรคูณแม่ 8, 9, 10**

ผลคูณจากสูตรคูณแม่ 8, 9, 10 และผลบวกของเลขโดดของผลคูณจนกระทั่งได้เลขโดดตัวเดียว แสดงดังตาราง

สูตรคูณแม่ 8

ผลคูณจากสูตรคูณแม่ 8												
ผลบวกของเลขโดด												

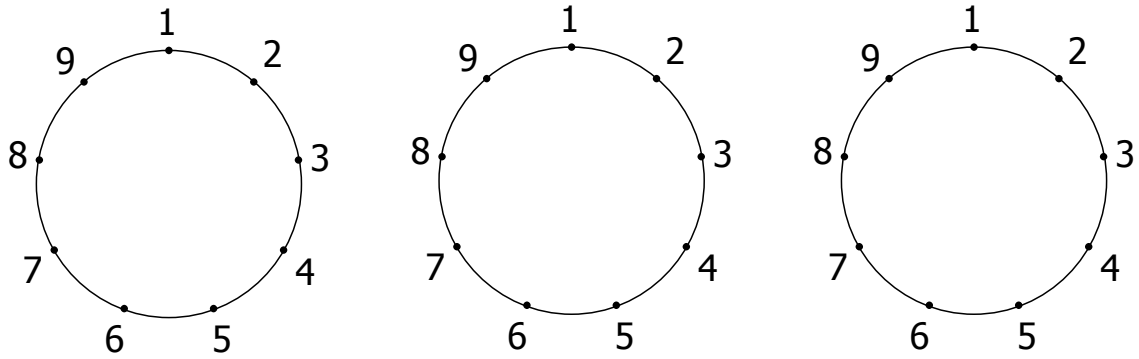
สูตรคูณแม่ 9

ผลคูณจากสูตรคูณแม่ 9												
ผลบวกของเลขโดด												

สูตรคูณแม่ 10

ผลคูณจากสูตรคูณแม่ 10												
ผลบวกของเลขโดด												

เขียนวงกลม และกำหนดจุด 9 จุดบนเส้นรอบวงให้มีระยะห่างเท่าๆ กัน ให้แต่ละจุดเป็นตำแหน่งของเลขโดด 1, 2, 3, ... , 9 จากนั้นลากส่วนของเส้นตรงจากตำแหน่งของเลขโดดที่เป็นผลบวกของเลขโดดจากผลคูณในสูตรคูณแม่ 8, 9, 10 เรียงตามลำดับจากตาราง จะได้รูปดังนี้



1.5 **สูตรคูณแม่ 11, 12, 13**

ผลคูณจากสูตรคูณแม่ 11, 12, 13 และผลบวกของเลขโดดของผลคูณจนกระทั่งได้เลขโดดตัวเดียว แสดงดังตาราง

สูตรคูณแม่ 11

ผลคูณจากสูตรคูณแม่ 11												
ผลบวกของเลขโดด												

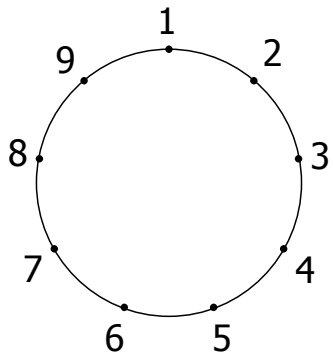
สูตรคูณแม่ 12

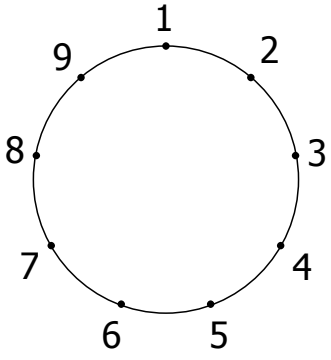
ผลคูณจากสูตรคูณแม่ 12												
ผลบวกของเลขโดด												

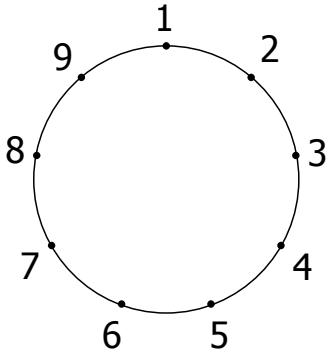
สูตรคูณแม่ 13

ผลคูณจากสูตรคูณแม่ 13												
ผลบวกของเลขโดด												

เขียนวงกลม และกำหนดจุด 9 จุดบนเส้นรอบวงให้มีระยะห่างเท่าๆ กัน ให้แต่ละจุดเป็นตำแหน่งของเลขโดด 1, 2, 3, ... , 9 จากนั้นลากส่วนของเส้นตรงจากตำแหน่งของเลขโดดที่เป็นผลบวกของเลขโดดจากผลคูณในสูตรคูณแม่ 11, 12, 13 เรียงตามลำดับจากตาราง จะได้รูปดังนี้







2. รูปจากสูตรคูณสามารถจัดเป็นกลุ่มตามรูปที่มีลักษณะเหมือนกัน ได้ดังนี้

1.1 **รูปดาวมุมป้าน** สร้างจากสูตรคูณแม่

_____

ข้อสังเกต

_____

สร้างข้อความคาดการณ์ได้ว่า

_____

_____

1.2 **รูปดาวมุมแหลม** สร้างจากสูตรคูณแม่

_____

ข้อสังเกต

_____

สร้างข้อความคาดการณ์ได้ว่า

_____

_____

1.3 **รูปสามเหลี่ยม** สร้างจากสูตรคูณแม่

_____

ข้อสังเกต

_____

สร้างข้อความคาดการณ์ได้ว่า

_____

_____

1.4 **รูปเก้าเหลี่ยม** สร้างจากสูตรคูณแม่

_____

ข้อสังเกต

_____

สร้างข้อความคาดการณ์ได้ว่า

_____

_____

1.5 **จุด** สร้างจากสูตรคูณแม่

_____

ข้อสังเกต

_____

สร้างข้อความคาดการณ์ได้ว่า

_____

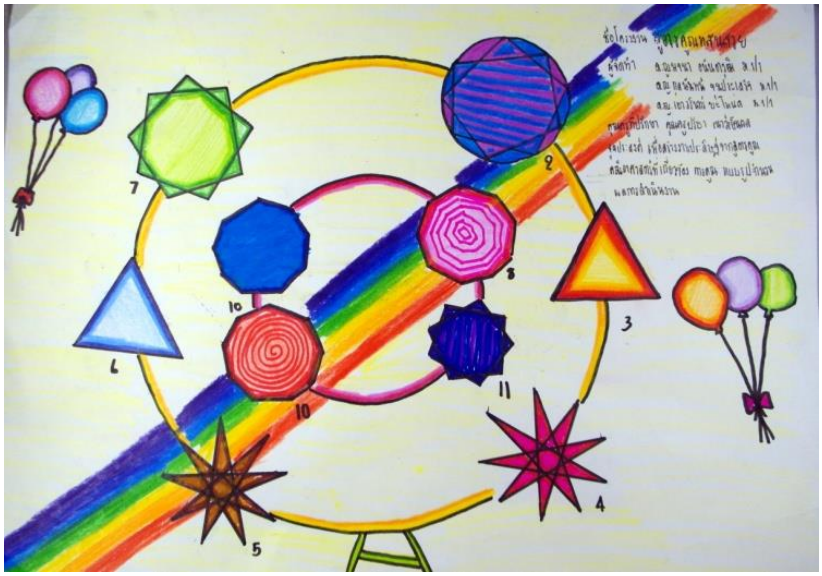
_____

ข้อสรุป จากข้อ 2.1 ถึง 2.5 _____

_____

_____

2. ตัวอย่างงานประดิษฐ์จากผลบวกของเลขโดดจากสูตรคูณ (เมื่อดำเนินการจนกระทั่งได้เลขโดดตัวเดียว) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนราชินีบูรณะ จังหวัดนครปฐม





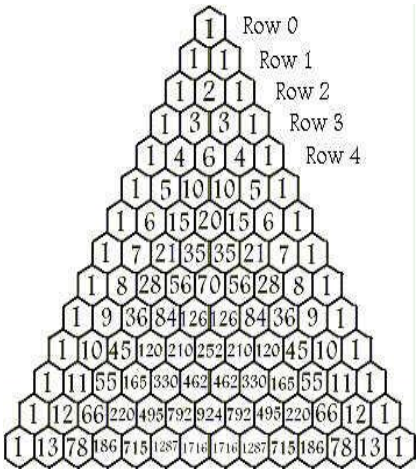
ใบกิจกรรม 3 ฝึกทำโครงงานจากเค้าโครงของโครงงาน

คำชี้แจง ให้ผู้เข้ารับการอบรมแต่ละกลุ่ม เลือกเค้าโครงของโครงงานต่อไปนี้***เพียง 1 โครงงาน*** แล้วลงมือปฏิบัติตามเค้าโครง จากนั้นนำเสนอผลการดำเนินงาน ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

1) โครงงาน จำนวนในสามเหลี่ยมปาสกาล

ผู้จัดทำ ..... **ครูที่ปรึกษา** .....

ความเป็นมา จำนวนในสามเหลี่ยมปาสกาลมีแบบรูปที่น่าสนใจ เช่น มีจำนวนแรกเป็น 1 จำนวน จำนวนแรกและจำนวนสุดท้ายของทุกแถวเป็น 1 จำนวนอื่นๆ เป็นผลบวกของจำนวนสองจำนวนในแถวข้างบนที่มาก่อน ข้อสังเกตเบื้องต้นคือ ผลบวกของจำนวนทุกจำนวนในแต่ละแถวจากแถวบนสุดเรียงตามลำดับลงมา ได้แก่ 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... เขียนได้ในรูป 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, ... มีรูปทั่วไปเป็น 2^n เมื่อ n = 0, 1, 2, 3, 4, 5,...ในโครงงานนี้จะศึกษาต่อไปว่า จำนวนในสามเหลี่ยมปาสกาลมีความสัมพันธ์กับเนื้อหาใดของคณิตศาสตร์อีกบ้าง



จุดประสงค์ วิเคราะห์ความเชื่อมโยงของจำนวนในสามเหลี่ยมปาสกาลกับเนื้อหาต่างๆ ของคณิตศาสตร์

สาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง การบวก การคูณ การหาร เลขยกกำลัง แบบรูปของจำนวน จำนวนสามเหลี่ยม จำนวนพีระมิด จำนวนฟีโบนัชชี ...

วิธีดำเนินงาน

1. วิเคราะห์จำนวนในสามเหลี่ยมปาสกาล
2. ศึกษาเนื้อหาคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการบวก การคูณ เลขยกกำลัง แบบรูปของจำนวน .....
.....
3. เชื่อมโยงจำนวนในสามเหลี่ยมปาสกาลกับเนื้อหาต่างๆ ของคณิตศาสตร์ที่ศึกษา

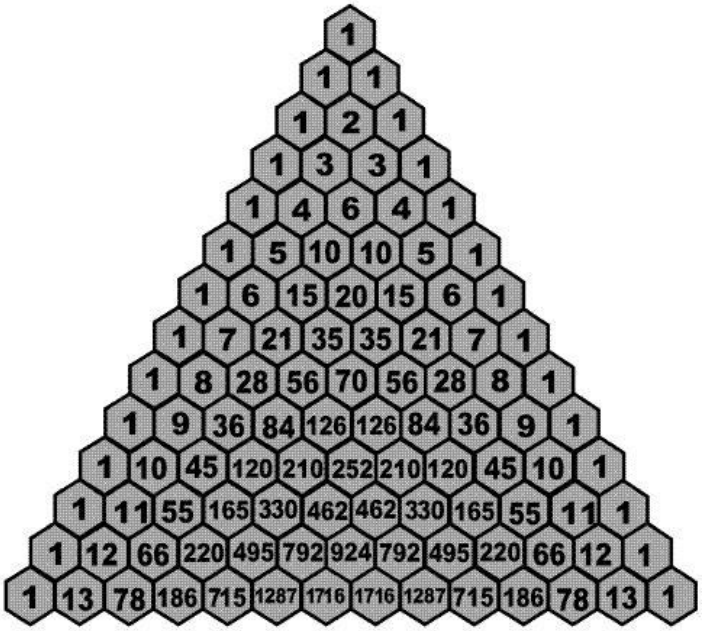
ผลการดำเนินงาน

.....

.....

.....

.....



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

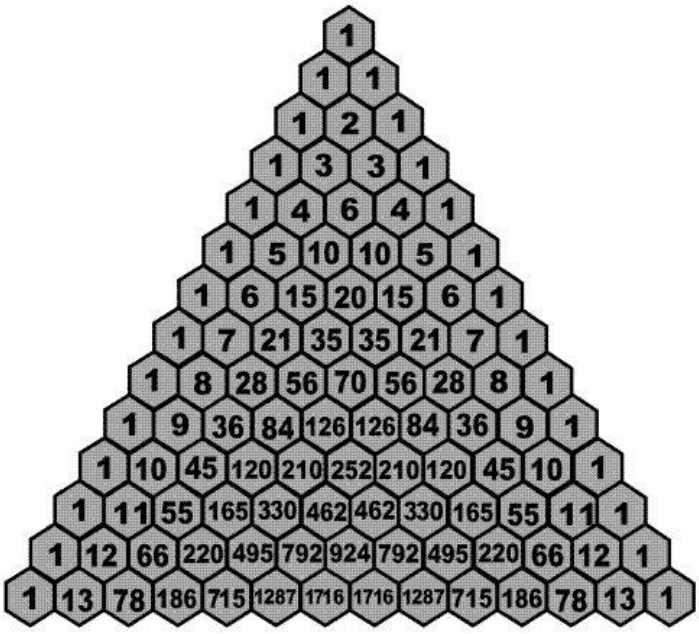
.....

.....

.....

.....

.....



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

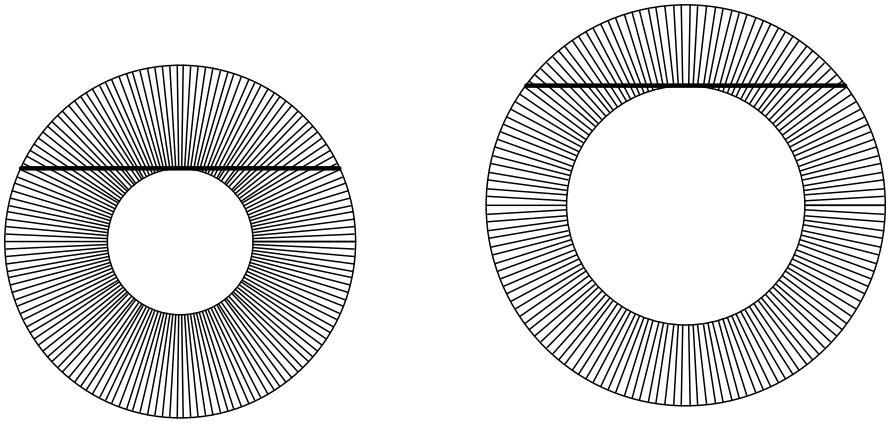
.....

2) โครงงานพื้นที่ของวงแหวน

ผู้จัดทำ ..... ครูที่ปรึกษา .....

ความเป็นมา

รูปเรขาคณิตที่อยู่ระหว่างรูปวงกลมสองวงที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน เรียกว่า รูปวงแหวน การหาพื้นที่ของรูปวงแหวนจึงหาได้จากผลต่างของรูปวงกลมสองวงที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกันนั้น ถ้าสร้างเส้นสัมผัสวงกลมรูปเล็กของรูปวงแหวนโดยให้จุดปลายทั้งสองข้างของเส้นสัมผัสอยู่ที่เส้นรอบวงของวงกลมรูปใหญ่ ดังรูป



ในโครงงานนี้จะศึกษาว่า เมื่อกำหนดความยาวของเส้นสัมผัสดังกล่าวนี้ให้เท่ากับค่าคงที่ค่าหนึ่งแล้ว เมื่อขนาดของวงกลมทั้งสองเปลี่ยนไป จะมีผลต่อพื้นที่ของรูปวงแหวนหรือไม่ อย่างไร

จุดประสงค์

เพื่อศึกษาพื้นที่ของรูปวงแหวนเมื่อกำหนดความยาวของเส้นสัมผัสวงกลมรูปเล็กของวงแหวนเป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง

คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง พื้นที่ของรูปวงกลม เส้นสัมผัสวงกลม คอร์ด และทฤษฎีบทพีทาโกรัส

พื้นที่รูปวงกลม เท่ากับ πr^2 ตารางหน่วย เมื่อวงกลมมีรัศมียาว r หน่วย

เส้นสัมผัส ย่อมตั้งฉากกับรัศมี

คอร์ด .....

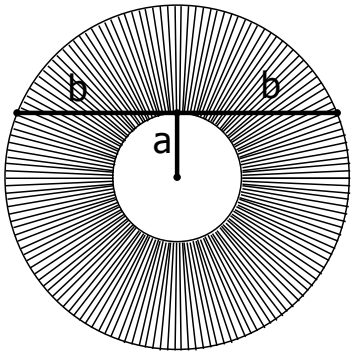
ทฤษฎีบทพีทาโกรัส มีใจความสำคัญว่า “สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ ผลบวกของกำลังสองของความยาวด้านประกอบมุมฉาก เท่ากับ กำลังสองของความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก”

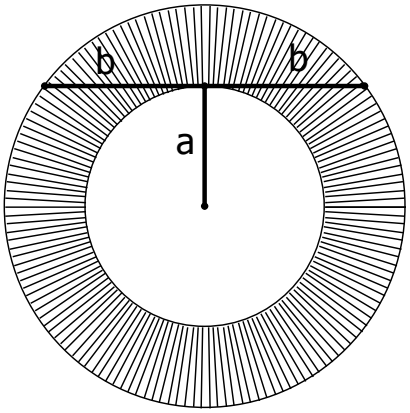
วิธีดำเนินงาน

1. สร้างรูปวงกลมวงหนึ่งรัศมียาว a หน่วย สร้างเส้นสัมผัสยาว 2b หน่วย ให้จุดสัมผัสเป็นจุดกึ่งกลางของเส้นสัมผัส
2. สร้างรูปวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกันกับวงกลมวงแรกให้ผ่านจุดปลายทั้งสองข้างของเส้นสัมผัส วงกลมวงนี้จะล้อมรอบวงกลมวงแรก
3. คำนวณหารัศมีของรูปวงกลมรูปใหญ่ และคำนวณหาพื้นที่ของรูปวงแหวน
4. เปลี่ยนความยาวรัศมีวงกลมวงใน แต่ให้เส้นสัมผัสยาว 2b หน่วย เท่าเดิม สร้างรูปวงกลมวงใหญ่ใหม่ คำนวณหารัศมีของรูปวงกลมรูปใหญ่ และคำนวณหาพื้นที่ของรูปวงแหวนใหม่
5. เปรียบเทียบพื้นที่ของรูปวงแหวนที่หาได้
6. ทำซ้ำข้อ 1 ถึง 5 ใหม่
7. วิเคราะห์ผลที่เกิดขึ้นและหาคำอธิบายให้เหตุผล

ผลการดำเนินงาน

จากรูป





---

3) โครงงานกลไพ่กับคณิตศาสตร์

ความเป็นมา

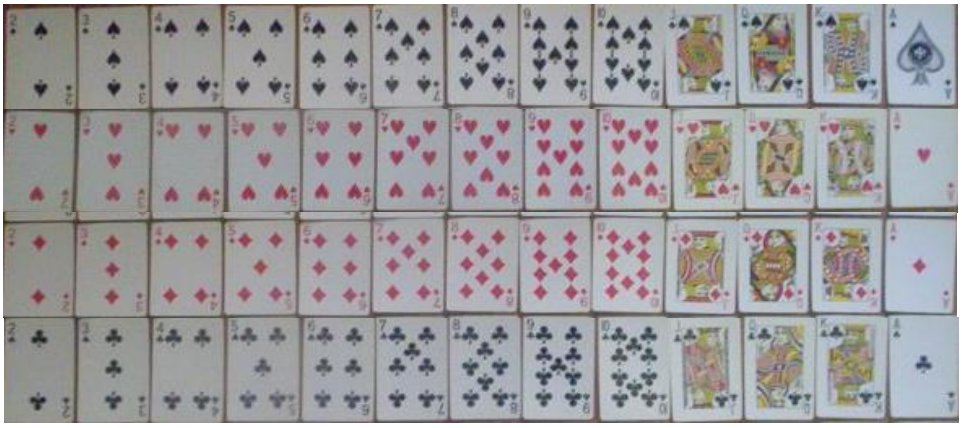
ไพ่หนึ่งสำรับประกอบด้วยไพ่ทั้งหมด 52 ใบ แบ่งได้เป็น 4 กลุ่ม ตามรูปหรือดอกของไพ่คือ กลุ่มที่ 1โพดำ กลุ่มที่ 2โพแดง กลุ่มที่ 3 ข้าวหลามตัด และ กลุ่มที่ 4 ดอกจิก แต่ละกลุ่มมี 13 ใบ มีแต้มเป็น A , 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K สำหรับ A คิดเป็น 1 แต้ม สำหรับ J, Q, K คิดเป็นใบละ 11, 12, 13 แต้ม ตามลำดับ กลไพ่เป็นกิจกรรมที่น่าสนใจ สร้างความพิศวงให้กับผู้ชมไม่น้อย กลไพ่บางอย่างมีความมหัศจรรย์อยู่ในตัวเอง ในโครงงานนี้จะสนใจกลไพ่ที่อาศัยสมบัติต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์

กลุ่มที่ 1 โพดำ

กลุ่มที่ 2 โพแดง

กลุ่มที่ 3 ข้าวหลามตัด

กลุ่มที่ 4 ดอกจิก



จุดประสงค์

1. เพื่อสำรวจและศึกษากลไพ่ที่ทำงานโดยอาศัยสมบัติทางคณิตศาสตร์
2. เพื่ออธิบายสมบัติทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ในกลไพ่
3. เพื่อสร้างกลไพ่ที่ทำงานโดยอาศัยสมบัติทางคณิตศาสตร์

สาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง ตัวแปร สมการ พหุนาม

ตัวแปร จำนวนที่ไม่ทราบค่าสามารถใช้ตัวแปรแทนได้ โดยทั่วไปนิยมเขียนแสดงตัวแปรโดยใช้ตัวอักษรในภาษาอังกฤษ เช่น a, b, c, x, y, z

พหุนาม สิ่งที่ใช้แทนจำนวนซึ่งประกอบด้วย จำนวนและ/หรือตัวแปร กับการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เรียกว่า ***พหุนาม*** เช่น 3, x, 2 + x, y^2, $5x^3$, $x^2 + y^2$

ในการกล่าวถึงจำนวนบางอย่างสามารถเขียนแทนได้ในรูปพหุนาม เช่น

สองเท่าของจำนวนจำนวนหนึ่ง เขียนแทนได้ด้วย 2x เมื่อ x เป็นจำนวนจำนวนนั้น

จำนวนจำนวนหนึ่งบวกกับสองเท่าของจำนวนอีกจำนวนหนึ่ง เขียนแทนได้ด้วย a + 2b เมื่อ a เป็นจำนวนแรก และ b เป็นจำนวนที่สอง

พหุนามกำลังสอง $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ และ $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

ระยะเวลาดำเนินงาน .... สัปดาห์

วิธีดำเนินงาน

1. สำรวจกลไพ่ต่างๆ จากผู้มีประสบการณ์ในการเล่น
2. ศึกษาหนังสือ เอกสาร เกี่ยวกับกลไพ่
3. คัดเลือกกลไพ่ที่ทำงานโดยอาศัยหลักการและสมบัติต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์
4. ทดลองเล่นกลไพ่ที่คัดเลือกไว้ วิเคราะห์ขั้นตอนการเล่น หาคำอธิบายโดยอาศัยคณิตศาสตร์
5. จดบันทึกผลการวิเคราะห์ นำเสนอให้ผู้รู้ตรวจสอบ แล้วปรับปรุงแก้ไข
6. สร้างกลไพ่ที่ทำงานโดยอาศัยสมบัติต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และหาคำอธิบาย

ผลการดำเนินงาน

1. ศึกษาตัวอย่างกลไพ่ เช่น

1.1 กลทายแต้มของไพ่จากกำลังสอง

วิธีเล่นกลทายแต้มของไพ่จากผลคูณ
ผู้แสดงให้ผู้ชมดำเนินการดังนี้

1) หยิบไพ่ใบหนึ่งจากสำรับ
2) หากำลังสองของแต้มที่หยิบนั้น
3) บวกด้วย 4 เท่าของแต้มของไพ่ที่หยิบ
4) บวกด้วย 4
5) ผู้ชมบอกผลลัพธ์กับผู้แสดง

ผู้แสดงสามารถทายได้ว่าผู้ชมหยิบไพ่ใบใดไป ผู้แสดงทราบได้อย่างไร

เช่น

1) หยิบ 8 โพแดง
2) $8^2 = 64$
3) $64 + (4\times 8) = 96$
4) $96+4 = 100$
5) 100

1.2 กลทายแต้มและดอกของไพ่

ผู้แสดงให้ผู้ชมดำเนินการดังนี้

1) หยิบไพ่ใบหนึ่งจากสำรับ
2) คูณแต้มของไพ่ด้วย 5
3) บวกผลลัพธ์ที่ได้ด้วย 6
4) คูณผลลัพธ์ที่ได้ด้วย 2
5) บวกด้วยหมายเลขของกลุ่มไพ่
6) บอกผลลัพธ์กับผู้แสดง

ผู้แสดงสามารถบอกผู้ชมได้ว่า ไพ่ใบนั้นเป็นไพ่กลุ่มใดและมีแต้มเท่าไร

เช่น

1) หยิบ J ดอกจิก
2) $11\times 5 = 55$
3) $55 + 6 = 61$
4) $61\times 2 = 122$
5) $122+4 = 126$
6) 126

2. วิเคราะห์กลไพ่***ว่ามีสมบัติทางคณิตศาสตร์ใดที่เกี่ยวข้อง***

3. สร้างกลไพ่ที่ทำงานโดยอาศัยสมบัติทางคณิตศาสตร์ และทดลองเล่น

เอกสารสำหรับวิทยากร

แบบกรอกคะแนน เรื่อง โครงงานคณิตศาสตร์

เลขที่	ชื่อ-สกุล	รายการประเมิน		รวม 11 คะแนน
		การมีส่วนร่วมในกิจกรรม (15 คะแนน)	การนำเสนอผลงานกลุ่ม (5 คะแนน)	
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				
26				
27				
28				
29				

เลขที่	ชื่อ-สกุล	รายการประเมิน		รวม 11 คะแนน
		การมีส่วนร่วมในกิจกรรม (15 คะแนน)	การนำเสนอผลงานกลุ่ม (5 คะแนน)	
30				
31				
32				
33				
34				
35				
36				
37				
38				
39				
40				

ลงชื่อ.....วิทยากร

วัน/เดือน/ปี.....

รายชื่อคณะเรียบเรียงเนื้อหา

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

หน่วยการเรียนรู้ที่ 6 การออกแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ที่	ชื่อ – สกุล	โรงเรียน/ สังกัด
1	รศ.ดร.ปรีชา เนาว์เย็นผล	ข้าราชการบำนาญ
2	ผศ.ดร.ทรงชัย อักษรคิด	มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
3	ผศ.ดร.ชนิศวรา เลิศอมรพงษ์	มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
4	นายณัฐ จั่นแย้ม	โรงเรียนไชยฉิมพลีวิทยาคม
5	นางสุนันทา ชิ้นสุวรรณ	โรงเรียนบ้านหนองหลวง
6	นายดนัย ยังคง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
7	นางสาวดนิตา ชื่นอารมณ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
8	นางสาวพิลาลักษ์ ทองทิพย์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
9	นางสาวรัชนีกร กลิ่นหอมหวล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
10	นางสาวกชพร วงศ์สว่างศิริ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะกรรมการโครงการ

โครงการพัฒนาชุดการอบรมครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี ระดับประถมศึกษาถึงระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่เน้นกระบวนการคิดวิเคราะห์แก้ปัญหา

1. ผู้อำนวยการ สสวท. (นางพรพรรณ ไวทยางกูร)	ที่ปรึกษา
2. ผู้อำนวยการ สคบศ. (นางสาวนฤมล ไทยวิรัช)	ที่ปรึกษา
3. นางดวงสมร คล่องสารา	ประธานกรรมการ
4. นางกัญณัฏฐ์ สวัสดิ์สว่าง	รองประธานกรรมการ
5. นายดุสิต สังข์ร่วมใจ	กรรมการ
6. นายประสงค์ เมธีพินิตกุล	กรรมการ
7. นางชมัยพร ตั้งตน	กรรมการ
8. นายราม ติวารี	กรรมการ
9. นางสาวสุพรรณี ชาญประเสริฐ	กรรมการ
10. นางสาววนิดา ธนประโยชน์ศักดิ์	กรรมการ
11. นายสุพจน์ วุฒิโสภณ	กรรมการ
12. นางเบ็ญจวรรณ ศรีเจริญ	กรรมการ
13. นางสาวกุศลิน มุสิกุล	กรรมการ
14. นายสมเกียรติ เพ็ญทอง	กรรมการ
15. นายวัฒน วัฒนากูล	กรรมการ
16. นายวิสูตร ปฐมโรจนฤทธิ์	กรรมการ
17. นางสาวสรัสวดี มุสิกบุตร	กรรมการ
18. นางจิรัฐ อนุเชิงชัย	กรรมการ
19. นางสาวสุนทรี ไกรกาบแก้ว	กรรมการ
20. นายโชคชัย อัศวินชัย	กรรมการ
21. นางสาวทิพย์วรรณ สุดปฐม	กรรมการ
22. นางสาวโศจิวัจน์ เสริฐศรี	กรรมการและเลขานุการ
23. นางสาวนิอร ภูรัตน์	กรรมการและผู้ช่วยเลขานุการ
24. นางสาวรัชนีกร กลิ่นหอมหวล	กรรมการและผู้ช่วยเลขานุการ
25. นางสาวกชพร วงศ์สว่างศิริ	กรรมการและผู้ช่วยเลขานุการ
26. นางสาวยุวรีย์ พันทวีศักดิ์	กรรมการและผู้ช่วยเลขานุการ