

คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ร่วมกับ สถาบันพัฒนาครู คณาจารย์ และบุคลากรทางการศึกษา (สคบศ.) ดำเนินการพัฒนาชุดการอบรมครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี ระดับประถมศึกษาถึงระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ตามโครงการพัฒนาชุดการอบรมครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี ระดับประถมศึกษาถึงระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่เน้นกระบวนการคิดวิเคราะห์แก้ปัญหา โดยเริ่มโครงการระหว่างปีงบประมาณ 2555 – 2557

เพื่อให้การอบรมครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่ดำเนินตามนโยบาย เป้าหมาย และวัตถุประสงค์ สสวท. จึงได้จัดทำชุดการอบรมครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่ จำนวน 13 ชุด ได้แก่ (1) วิชาวิทยาศาสตร์ ประถมศึกษา (2) วิชาวิทยาศาสตร์มัธยมศึกษาตอนต้น (3) วิชาเคมีมัธยมศึกษาตอนปลาย (4) วิชาชีววิทยา มัธยมศึกษาตอนปลาย (5) วิชาฟิสิกส์มัธยมศึกษาตอนปลาย (6) วิชาโลก ดาราศาสตร์และอวกาศ มัธยมศึกษาตอนปลาย (7) วิชาคณิตศาสตร์ประถมศึกษาตอนต้น (8) วิชาคณิตศาสตร์ประถมศึกษาตอนปลาย (9) วิชาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษาตอนต้น (10) วิชาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษาตอนปลาย (11) วิชาเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสารประถมศึกษา (12) วิชาเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสาร มัธยมศึกษาตอนต้น (13) วิชาเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสารมัธยมศึกษาตอนปลาย แต่ละชุด ประกอบด้วย แผนการอบรม เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม เอกสารสำหรับวิทยากร และสื่อประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เพื่อมอบให้กับสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาและหน่วยงานที่มีส่วนเกี่ยวข้องดำเนินการอบรมครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่ในสังกัดต่อไป

สสวท. ขอขอบพระคุณคณะผู้เชี่ยวชาญ คุณครู และคณะกรรมการทุกท่าน ที่ให้ความร่วมมือ ในการพัฒนาหลักสูตร และจัดทำเอกสาร หวังเป็นอย่างยิ่งว่า เอกสารเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้เกี่ยวข้อง ทุกฝ่าย หากมีข้อเสนอแนะโปรดแจ้งแก่ คณะทำงานโครงการพัฒนาชุดการอบรมครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่ สสวท. ทราบด้วย จักขอบคุณยิ่ง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

กันยายน 2557



สารบัญ

	หน้า
หน่วยการเรียนรู้ที่ 6 การออกแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้	1
เรื่อง ฟังก์ชัน	3
แผนการอบรม	5
เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม	25
เอกสารสำหรับวิทยากร	57
เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์	75
แผนการอบรม	77
เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม	91
เอกสารสำหรับวิทยากร	119
เรื่อง เทคนิคการนับและความน่าจะเป็น	133
แผนการอบรม	135
เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม	145
เอกสารสำหรับวิทยากร	167
เรื่อง สถิติและการวิเคราะห์ข้อมูล	199
แผนการอบรม	201
เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม	219
เอกสารสำหรับวิทยากร	251



หน่วยการเรียนรู้ที่ 6

การออกแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

เรื่อง ฟังก์ชัน

แผนการอบรม

แผนการอบรมครูคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สำหรับครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่

เรื่อง ฟังก์ชัน

เวลา 4 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์ เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรม

1. มีความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับขอบข่ายเนื้อหาและสาระสำคัญของฟังก์ชัน
2. มีความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับฟังก์ชันของผู้เรียน
3. สามารถออกแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้และได้แนวทางการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ฟังก์ชัน

สาระการเรียนรู้

1. ความสัมพันธ์และตัวผกผันของความสัมพันธ์
 - 1.1 บทนิยามผลคูณคาร์ทีเซียน
 - 1.2 บทนิยามความสัมพันธ์
 - 1.3 บทนิยามโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์
 - 1.4 บทนิยามตัวผกผันของความสัมพันธ์
 2. ฟังก์ชันและชนิดของฟังก์ชันที่ควรรู้จัก
 - 2.1 บทนิยามของฟังก์ชัน
 - 2.2 ชนิดของฟังก์ชันที่ควรรู้จัก เช่น ฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันกำลังสอง
 3. ฟังก์ชันจาก A ไป B
 4. การดำเนินการของฟังก์ชัน
 - 4.1 วิธีการดำเนินการพื้นฐานเชิงพีชคณิตกับฟังก์ชัน
 - 4.2 ฟังก์ชันประกอบ
 5. ฟังก์ชันผกผัน
 6. เทคนิคการเขียนกราฟ
- (พิจารณา หน่วยการเรียนรู้ย่อย เรื่อง ฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันกำลังสอง และฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์)



สาระสำคัญ

1. ความสัมพันธ์และตัวผกผันของความสัมพันธ์

1.1 ผลคูณคาร์ทีเซียน

บทนิยาม ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B คือเซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมด โดยที่ a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B
ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B เขียนแทนด้วย $A \times B$

1.2 ความสัมพันธ์

บทนิยาม r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$

1.3 โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

บทนิยาม ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B
โดเมนของ r คือเซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับใน r เขียนแทนด้วย D_r
เรนจ์ของ r คือเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับใน r เขียนแทนด้วย R_r

1.4 ตัวผกผันของความสัมพันธ์

บทนิยาม ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r คือความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย r^{-1}

2. ฟังก์ชันและชนิดของฟังก์ชันที่ควรรู้จัก

2.1 ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่งสำหรับคู่อันดับสองคูใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้วสมาชิกตัวหลังต้องไม่ต่างกัน

ข้อตกลงเกี่ยวกับสัญลักษณ์ของฟังก์ชัน มีดังนี้

ถ้า f เป็นฟังก์ชันและ $(x, y) \in f$ แล้ว เรากล่าวว่า y เป็น ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x สำหรับค่าของฟังก์ชัน f ที่ x เขียนแทนด้วย $f(x)$ อ่านว่า เอฟของเอ็กซ์

2.2 ชนิดของฟังก์ชันที่ควรรู้จัก ได้แก่ ฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันกำลังสอง ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ และฟังก์ชันขั้นบันได

3. ฟังก์ชันจาก A ไป B

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มี A เป็นโดเมน และมีเรนจ์เป็นสับเซตของ B
 f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f : A \rightarrow B$

4. การดำเนินการของฟังก์ชัน

4.1 วิธีการดำเนินการพื้นฐานเชิงพีชคณิตกับฟังก์ชัน

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของ R
 ผลบวก (sum) ผลต่าง (different) ผลคูณ (product) และผลหาร (quotient) ของ f และ g
 เขียนแทนด้วย $f + g$, $f - g$, fg , และ $\frac{f}{g}$ ตามลำดับ เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดค่าโดย

$$1) (f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ เมื่อ } x \in D_f \cap D_g$$

$$2) (f - g)(x) = f(x) - g(x) \text{ เมื่อ } x \in D_f \cap D_g$$

$$3) (fg)(x) = f(x)g(x) \text{ เมื่อ } x \in D_f \cap D_g$$

$$4) \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ เมื่อ } x \in D_f \cap D_g \text{ และ } g(x) \neq 0$$

4.2 ฟังก์ชันประกอบ

ฟังก์ชัน f และ g เป็นฟังก์ชัน และ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วย
 $g \circ f$ คือฟังก์ชันที่มีโดเมน คือ $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ และกำหนดค่าของ $g \circ f$ โดย
 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ สำหรับทุก x ใน $D_{g \circ f}$

5. ฟังก์ชันผกผัน

ถ้าตัวผกผันของฟังก์ชัน เป็นฟังก์ชัน เราจะเรียกว่าฟังก์ชันผกผัน (inverse function) และ
 กล่าวว่า ฟังก์ชันนั้นมีฟังก์ชันผกผัน

ทฤษฎีบท 1 ให้ f เป็นฟังก์ชัน

f มีฟังก์ชันผกผัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1 - 1



6. เทคนิคการเขียนกราฟ

6.1 การเขียนกราฟของฟังก์ชันบางฟังก์ชัน อาจสามารถเขียนโดยอาศัยกราฟของฟังก์ชันที่เคยพบมาแล้ว เช่น กราฟของฟังก์ชันเชิงเส้น กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง และกราฟของฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ร่วมกับแนวคิดการเลื่อนกราฟ

6.2 แนวคิดการเลื่อนกราฟ มีดังนี้

1) การเลื่อนกราฟในแนวดิ่ง

กราฟของ $y = f(x) + c$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง คือ กราฟที่เกิดจากการเลื่อนกราฟของ $y = f(x)$ ขึ้นหรือลง $|c|$ หน่วย ขึ้นอยู่กับว่า c เป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบ

2) การเลื่อนกราฟในแนวนอน

กราฟของ $y = f(x - c)$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง คือ กราฟที่เกิดจากการเลื่อนกราฟของ $y = f(x)$ ไปทางขวาหรือซ้าย $|c|$ หน่วย ขึ้นอยู่กับว่า c เป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบ

ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน/ ยาก

- เข้าใจว่า $f(x)$ เป็นสัญลักษณ์แทนฟังก์ชัน
- เข้าใจว่าความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mid y^2 = x\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน โดยผู้เรียนอาจจำมาจากความสัมพันธ์ที่คล้ายกัน เช่น $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = x\}$ ที่แสดงแล้วว่าไม่เป็นฟังก์ชัน โดยจำแต่รูปของสมการ $y^2 = x$ โดยไม่ได้พิจารณาโดเมนและเรนจ์
- เข้าใจว่าหากลากเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y เพียงเส้นเดียวแล้วมีจุดตัดกราฟเพียงจุดเดียวสรุปว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดเป็นฟังก์ชันได้
- เข้าใจว่าการตรวจสอบความสัมพันธ์ที่กำหนดเป็นฟังก์ชัน 1 - 1 หรือไม่ สามารถตรวจสอบเงื่อนไขของฟังก์ชัน 1 - 1 ได้เลย โดยไม่ได้ตรวจสอบว่าความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชันหรือไม่
- เข้าใจว่าหากลากเส้นตรงที่ขนานแกน X เพียงเส้นเดียวแล้วมีจุดตัดกราฟเพียงจุดเดียวแล้วสรุปว่าฟังก์ชันที่กำหนดเป็นฟังก์ชัน 1 - 1 ได้
- จำวิธีการโดยพิจารณากราฟสลับกัน ระหว่างการตรวจสอบความสัมพันธ์ที่กำหนดเป็นฟังก์ชันกับการตรวจสอบฟังก์ชันที่กำหนดเป็นฟังก์ชัน 1 - 1
- เข้าใจว่า $f \subset A \times B$ เป็นฟังก์ชัน กับ ฟังก์ชันจาก A ไป B คือสิ่งเดียวกัน
- เข้าใจว่าเรนจ์ของฟังก์ชันจาก A ไป B ต้องเท่ากับเซต B
- เข้าใจว่า ถ้าพบฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันเพิ่ม จะสรุปทันทีว่าฟังก์ชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันลด หรือพบว่าฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันลด จะสรุปทันทีว่าฟังก์ชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันเพิ่ม
- เข้าใจว่า D_f เท่ากับ $D_f \cap D_g$ จึงทำให้หา D_{fg} ไม่ถูกต้อง



11. เข้าใจว่าการหาฟังก์ชัน $\frac{f}{g}$ ในบางกรณี เช่น กำหนด $f(x) = x^2 - 9$ และ $g(x) = x + 3$ แล้วหา $\frac{f}{g}(x)$ ผู้เรียนมักจะตัดทอนนิพจน์ที่เท่ากัน และสรุปว่า $\frac{f}{g}(x) = x - 3$ โดยไม่มีการระบุเงื่อนไขของ x
12. เข้าใจว่า เมื่อกำหนด f และ g มาให้ จะมีฟังก์ชัน $f+g$, $f-g$, fg และ $\frac{f}{g}$ เสมอ
13. เข้าใจว่า เงื่อนไขที่ทำให้มีฟังก์ชัน $\frac{f}{g}$ คือ $D_f \cap D_g \neq \emptyset$
14. เข้าใจว่า $D_{g \circ f}$ เท่ากับ D_f จึงทำให้เข้าใจว่าการหา $D_{g \circ f}$ พิจารณาจาก D_f อย่างเดียว
15. เข้าใจว่าจะมีฟังก์ชัน $g \circ f$ ได้ ก็ต่อเมื่อ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ หรือ จะมีฟังก์ชัน $g \circ f$ ได้ ก็ต่อเมื่อ $D_f \cap D_g \neq \emptyset$
16. เข้าใจว่าเงื่อนไขที่ทำให้มีฟังก์ชัน $g \circ f$ และ $f \circ g$ คือ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ เหมือนกัน
17. เข้าใจว่า $f \circ g(x) = g(f(x))$ หรือ เข้าใจว่า $f \circ g(x) = f(x)g(x)$
18. เข้าใจว่า ตัวผกผันของฟังก์ชัน กับ ฟังก์ชันผกผัน คือสิ่งเดียวกัน
19. เข้าใจว่า f^{-1} เป็นสัญลักษณ์แทนฟังก์ชัน
20. เข้าใจว่า ถ้าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 สามารถสรุปได้ว่า $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$
21. เข้าใจว่าโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน เป็นโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันผกผัน
22. เข้าใจว่า $f^{-1}(x)$ คือ $\frac{1}{f(x)}$

สื่อและแหล่งการเรียนรู้

1. สำหรับผู้เข้ารับการอบรม

- 1.1 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1: ใบความรู้ที่ 1 เรื่อง ขอบข่ายเนื้อหาและสาระสำคัญเกี่ยวกับฟังก์ชัน
- 1.2 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 2: ใบความรู้ที่ 2 เรื่อง ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับฟังก์ชัน
- 1.3 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 3: ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง จับความจริงฟังก์ชัน
- 1.4 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 4: ใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง จับขโมย
- 1.5 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 5: ใบกิจกรรมที่ 3 เรื่อง ขอสามคำ
- 1.6 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 6: ใบกิจกรรมที่ 4 เรื่อง ลากรถมาเกย
- 1.7 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 7: ใบงานที่ 1 เรื่อง สรุปอย่างไร
- 1.8 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 8: ใบงานที่ 2 เรื่อง โดมิโนพาเพลิน
- 1.9 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 9: แบบตรวจสอบความเข้าใจ เรื่อง ฟังก์ชัน



- 1.10 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 10: ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้
- 1.11 หนังสือเรียนรายรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6
- 1.12 หนังสือเรียนรายรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6
- 1.13 คู่มือครู รายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6
- 1.14 คู่มือครู รายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6
- 1.15 ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

2. สำหรับวิทยากร

- 2.1 เอกสารสำหรับวิทยากร 1: เฉลยใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง จับความจริงฟังก์ชัน
- 2.2 เอกสารสำหรับวิทยากร 2: เฉลยใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง จับขโมย
- 2.3 เอกสารสำหรับวิทยากร 3: เฉลยใบกิจกรรมที่ 3 เรื่อง ขอสามคำ
- 2.4 เอกสารสำหรับวิทยากร 4: เฉลยใบกิจกรรมที่ 4 เรื่อง ลากรถมาเกย
- 2.5 เอกสารสำหรับวิทยากร 5: เฉลยใบงานที่ 1 เรื่อง สรุปอย่างไร
- 2.6 เอกสารสำหรับวิทยากร 6: เฉลยใบงานที่ 2 เรื่อง โดมิโนพาเพลิน
- 2.7 เอกสารสำหรับวิทยากร 7: เฉลยแบบตรวจสอบความเข้าใจ เรื่อง ฟังก์ชัน
- 2.8 เอกสารสำหรับวิทยากร 8: แบบประเมินการมีส่วนร่วมในกิจกรรม
- 2.9 เอกสารสำหรับวิทยากร 9: แบบประเมินการนำเสนอผลงานกลุ่ม
- 2.10 เอกสารสำหรับวิทยากร 10: แบบบันทึกผลการประเมิน เรื่อง ฟังก์ชัน

การประเมินผล

รายการประเมิน	เกณฑ์การให้คะแนน (คะแนนเต็ม 22.5 คะแนน)	เครื่องมือ
1. การมีส่วนร่วมในกิจกรรม พิจารณาจากข้อ 1.1 – 1.6 1.1 ความร่วมมือในกิจกรรม 1.2 ความรับผิดชอบ 1.3 การเสนอความคิดเห็น 1.4 ความริเริ่มสร้างสรรค์ 1.5 การเป็นผู้นำหรือผู้ตามที่ดี 1.6 การตรงเวลา	คะแนนเต็ม 2 คะแนน โดย ได้ 2 คะแนน เมื่อมี 4 – 6 ข้อ ได้ 1 คะแนน เมื่อมี 1 – 3 ข้อ ได้ 0 คะแนน เมื่อไม่มีทั้ง 6 ข้อ	- แบบประเมินการมีส่วนร่วมในกิจกรรม

รายการประเมิน	เกณฑ์การให้คะแนน (คะแนนเต็ม 22.5 คะแนน)	เครื่องมือ
2. การนำเสนอผลงานกลุ่ม พิจารณาจากข้อ 2.1 -2.3 ดังนี้ 2.1 ความครอบคลุมเนื้อหา 2.2 ความถูกต้องตรงประเด็น 2.3 การเสนอความคิดเห็น 2.4 แนวทางประยุกต์สู่การปฏิบัติ 2.5 การเป็นผู้นำหรือผู้ตามที่ดี 2.6 การตรงเวลา	คะแนนเต็ม 15 คะแนน โดย ได้ 15 คะแนน เมื่อมีครบ 6 ข้อ ได้ 13 คะแนน เมื่อมีครบ 5 ข้อ ได้ 12 คะแนน เมื่อมีครบ 4 ข้อ ได้ 10 คะแนน เมื่อมีครบ 3 ข้อ ได้ 8 คะแนน เมื่อมีครบ 2 ข้อ ได้ 6 คะแนน เมื่อมีครบ 1 ข้อ ได้ 0 คะแนน เมื่อไม่มีทั้ง 6 ข้อ	- แบบประเมินการนำเสนอผลงานกลุ่ม
3. ทดสอบความรู้	คะแนนเต็ม 5.5 คะแนน โดย ตรวจให้คะแนนจากแบบทดสอบ หลังเรียนจำนวน 11 ข้อ ข้อละ 0.5 คะแนน	- แบบทดสอบหลังเรียน

แนวทางปฏิบัติสำหรับวิทยากร

- ศึกษาแผนการจัดการเรียนรู้ เอกสารสำหรับวิทยากร และเอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม
ในสาระที่ 4 พิชคณิต เรื่อง ฟังก์ชัน โดยละเอียด
- ศึกษาคู่มือครู รายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 และคู่มือครู
รายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 ซึ่งมีประเด็นให้ดังนี้
 - เนื้อหาเรื่องฟังก์ชัน มีหัวข้ออะไรบ้าง
 - ในแต่ละหัวข้อมีความสำคัญอะไรบ้าง
- ศึกษาความเข้าใจคลาดเคลื่อน/ ยาก ในเรื่องฟังก์ชัน วิทยากรอาจเพิ่มเติมความเข้าใจคลาดเคลื่อน/ ยาก
ในเรื่อง ฟังก์ชัน ที่วิทยากรพบนอกเหนือจากที่กล่าวไว้ในเอกสาร
- แจ้งให้ผู้เข้ารับการอบรมทราบเกี่ยวกับจุดประสงค์ในการอบรมสาระที่ 4 พิชคณิต เรื่อง ฟังก์ชัน
- ดำเนินการจัดการอบรมตามแนวทางการจัดกิจกรรม พร้อมทั้งประเมินผลผู้เข้ารับการอบรม
ตามรายการประเมินและเครื่องมือที่กำหนด แล้วบันทึกผลการประเมินลงในเอกสารสำหรับวิทยากร 10



แนวทางการจัดกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
1. การสร้างองค์ความรู้ (3 ชั่วโมง) 1.1 นำเข้าสู่บทเรียน (10 นาที) 1) วิทยากรกล่าวทักทายผู้เข้ารับการอบรม และแจ้งวัตถุประสงค์ของการอบรมสาระที่ 4 พืชคณิต เรื่อง ฟังก์ชัน 2) วิทยากรแจ้งขอบเขตเนื้อหาของการอบรมของ เรื่อง ฟังก์ชันว่ามี 3 หัวข้อ ได้แก่ 1) ขอบข่ายและสาระสำคัญเรื่องฟังก์ชัน 2) ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน/ ยาก เรื่อง ฟังก์ชัน และ 3) การวางแผนการจัดการเรียนรู้เรื่อง ฟังก์ชัน 1.2 ศึกษาขอบข่ายและสาระสำคัญเรื่องฟังก์ชัน (50 นาที) 1) วิทยากรแจ้งว่า ในการศึกษาขอบข่ายเนื้อหา และสาระสำคัญเรื่องฟังก์ชันครั้งนี้ แบ่งเนื้อหาเป็น 6 หัวข้อ ได้แก่ความสัมพันธ์และตัวผกผันของความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน และชนิดของฟังก์ชันที่ควรรู้จัก ฟังก์ชันจาก A ไป B การดำเนินการของฟังก์ชัน ฟังก์ชันผกผัน และเทคนิคการเขียนกราฟ 2) เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรมทราบว่าในแต่ละ หัวข้อ ทั้งหมดข้างต้น มีหัวข้อย่อยและสาระสำคัญอะไรบ้าง วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมแต่ละคนศึกษาใบความรู้ที่ 1 ขอบข่ายและสาระสำคัญ ฟังก์ชัน ร่วมกับศึกษาหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6 จากนั้นตอบคำถามในใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง จับความจริงฟังก์ชัน 3) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมเข้ากลุ่มย่อยที่มีสมาชิก 3 - 4 คน เพื่อตรวจสอบและปรับเปลี่ยนคำตอบของแต่ละข้อคำถามในใบกิจกรรมที่ 1 อีกครั้ง รวมทั้ง แลกเปลี่ยนความรู้ความเข้าใจที่เกี่ยวข้องกับใบกิจกรรมที่ 1	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1: ใบความรู้ที่ 1 เรื่อง ขอบข่ายเนื้อหา และสาระสำคัญเกี่ยวกับ ฟังก์ชัน - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 3: ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง จับความจริง ฟังก์ชัน - คู่มือครู - เอกสารสำหรับ วิทยากร 1: เฉลย ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง จับความจริงฟังก์ชัน - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 2: ใบความรู้ที่ 2 เรื่อง ความเข้าใจที่ คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับ ฟังก์ชัน	- ประเมินการมีส่วนร่วม ในกิจกรรม - ประเมินการนำเสนอ ผลงาน

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
4) วิทยากรและผู้เข้ารับการอบรมร่วมกันเฉลยใบกิจกรรมที่ 1 ที่ละคำถาม รวมทั้งเมื่อเฉลยแต่ละคำถามเสร็จแล้ว วิทยากรอาจตั้งคำถามเพิ่มเติมเพื่อขยายความรู้ที่เกี่ยวข้องกับคำถามแต่ละข้อ <u>ตัวอย่างคำถามเพื่อขยายความรู้</u> 1. การตรวจสอบความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ โดยพิจารณาจากกราฟ มีวิธีการอย่างไร 2. การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์หรือฟังก์ชันที่เขียน ในรูปสมการหรือเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก มีวิธีการอย่างไร อาศัยหลักการและความรู้พื้นฐานเรื่องใดบ้าง 3. การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์หรือฟังก์ชันที่แสดงในรูปกราฟ มีวิธีการอย่างไร 4. กราฟของความสัมพันธ์กับกราฟของตัวผกผันของความสัมพันธ์ เกี่ยวข้องกันอย่างไร 5. การจำแนกกราฟของชนิดของฟังก์ชันที่ควรรู้จักแต่ละประเภท มีวิธีการอย่างไร 6. ลักษณะของกราฟของชนิดของฟังก์ชันที่ควรรู้จักแต่ละประเภท เป็นอย่างไร 7. ฟังก์ชันจาก A ไป B เป็นฟังก์ชัน $1 - 1$ และทั่วถึง หมายความว่าอย่างไร 8. ฟังก์ชัน กับ ฟังก์ชันจาก A ไป B เหมือนกันหรือต่างกันอย่างไร 9. มีตัวอย่างฟังก์ชันที่ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด หรือไม่ (ถ้ามีจงยกตัวอย่าง)		



กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
10. ฟังก์ชันเอกซโพเนนเชียลจะเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด พิจารณาจากสิ่งใด 11. การหา $f + g$, $f - g$, fg และ $\frac{f}{g}$ มีวิธีการอย่างไร 12. โดเมนของฟังก์ชัน $\frac{f}{g}$ เท่ากับ $D_f \cap D_g$ หรือไม่ 13. เงื่อนไขที่ทำให้ฟังก์ชันที่กำหนด มีฟังก์ชันผกผัน คืออะไร 14. กำหนดฟังก์ชันที่อยู่ในรูปสมการ เช่น $y = x^2; x \geq 0$ จะมีวิธีการหาฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันดังกล่าวอย่างไร 5) วิทยากรและผู้เข้ารับการอบรมร่วมกันสรุป ขอบข่ายเนื้อหาและสาระสำคัญเรื่องฟังก์ชัน โดยวิทยากรเป็นผู้ใช้คำถามนำและกระตุ้น 1.3 ศึกษาความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน/ ยาก ฟังก์ชัน (90 นาที) วิทยากรแจ้งว่า ในการศึกษาความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน/ ยาก เรื่องฟังก์ชันครั้งนี้ แบ่งการศึกษาเป็น 4 ช่วงตามเนื้อหาสาระดังนี้ <u>ช่วงแรก</u> เนื้อหาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ ฟังก์ชันชนิดของฟังก์ชันที่ควรรู้จัก และฟังก์ชันจาก A ไป B (ฟังก์ชันจาก A ไป B ฟังก์ชัน 1 – 1 และฟังก์ชันทั่วถึง) <u>ช่วงที่สอง</u> เนื้อหาเกี่ยวกับการดำเนินการของฟังก์ชัน <u>ช่วงที่สาม</u> เนื้อหาเกี่ยวกับฟังก์ชันผกผัน <u>ช่วงที่สี่</u> เนื้อหาเกี่ยวกับเทคนิคการเขียนกราฟ		

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
<u>ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน ชนิดของฟังก์ชันที่ควรรู้จัก และ ฟังก์ชันจาก A ไป B</u> 1) วิทยากรแจ้งให้ผู้เข้าอบรมแต่ละคนตอบคำถามในใบกิจกรรมที่ 2 จับขโมย 2) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมใช้กลุ่มเดิมที่มีสมาชิก 3 - 4 คน เพื่อตรวจสอบคำตอบในใบกิจกรรมที่ 2 และแลกเปลี่ยนความรู้ความเข้าใจ 3) วิทยากรและผู้เข้ารับการอบรมร่วมกันเฉลยข้อคำถามใบกิจกรรมที่ 2 จากนั้นวิทยากรเน้นให้ผู้เข้ารับการอบรมเห็นว่า คำถามในใบกิจกรรมที่ 2 เป็นตัวอย่างความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน/ ยาก ของเนื้อหาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน ชนิดของฟังก์ชันที่ควรรู้จัก และฟังก์ชันจาก A ไป B (ฟังก์ชันจาก A ไป B ฟังก์ชัน 1 – 1 และฟังก์ชันทั่วถึง) จากนั้นวิทยากรนำอภิปรายเกี่ยวกับการแก้ไขความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน/ ยาก ดังกล่าวให้ถูกต้อง จะได้ความเข้าใจตรงกัน 4) วิทยากรสรุปความเข้าใจคลาดเคลื่อน/ ยาก ของเนื้อหาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน ชนิดของฟังก์ชันที่ควรรู้จัก และฟังก์ชันจาก A ไป B (ฟังก์ชันจาก A ไป B ฟังก์ชัน 1 – 1 และฟังก์ชันทั่วถึง) รวมทั้ง ความเข้าใจที่ถูกต้อง พร้อมทั้งให้ดูรายละเอียดในใบความรู้ที่ 2 ในส่วน <u>สรุปซึ่งเป็นเนื้อหา เรื่องความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน ชนิดของฟังก์ชันที่ควรรู้จักฟังก์ชันจาก A ไป B</u> นอกจากนั้น วิทยากรอาจให้ผู้เข้ารับการอบรมเพิ่มเติมความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน/ ยาก และข้อผิดพลาดทางการเรียนที่ได้จากประสบการณ์ของตนเอง	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 4: ใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง จับขโมย - เอกสารสำหรับวิทยากร 2: เฉลยใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง จับขโมย - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 2: ใบความรู้ที่ 2 เรื่อง ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับฟังก์ชัน	- ประเมินการมีส่วนร่วมในกิจกรรม - ประเมินการนำเสนอผลงาน

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
<u>การดำเนินการของฟังก์ชัน</u> 1) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมใช้กลุ่มเดิมที่มีสมาชิก 3 - 4 คน เพื่อตรวจสอบคำตอบในใบกิจกรรมที่ 3 เรื่อง ขอสามคำ และแลกเปลี่ยนความรู้ความเข้าใจ 2) วิทยากรและผู้เข้ารับการอบรมร่วมกันเฉลยข้อคำถามใบกิจกรรมที่ 3 จากนั้นวิทยากรเน้นให้ผู้เข้ารับการอบรมเห็นว่า คำถามในใบกิจกรรมที่ 3 เป็นตัวอย่างความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน/ ยาก ของเนื้อหาเกี่ยวกับการดำเนินการของฟังก์ชัน จากนั้นวิทยากรนำอภิปรายเกี่ยวกับการแก้ไขความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน/ ยาก ดังกล่าวให้ถูกต้อง จะได้ความเข้าใจตรงกัน 3) วิทยากรสรุปความเข้าใจคลาดเคลื่อน/ ยาก ของเนื้อหาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน ชนิดของฟังก์ชันที่ควรรู้จัก และฟังก์ชันจาก A ไป B (ฟังก์ชันจาก A ไป B ฟังก์ชัน 1 – 1 และฟังก์ชันทั่วถึง) รวมทั้งความเข้าใจที่ถูกต้อง พร้อมทั้งให้ดูรายละเอียดในใบความรู้ที่ 2 ในส่วนที่ <u>สอง</u>ซึ่งเป็นเนื้อหา เรื่อง การดำเนินการของฟังก์ชัน นอกจากนั้นวิทยากรอาจให้ผู้เข้ารับการอบรมเพิ่มเติมความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน/ ยาก และข้อผิดพลาดทางการเรียนรู้ที่ได้จากประสบการณ์ของตนเอง <u>ฟังก์ชันผกผัน</u> 1) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมใช้กลุ่มเดิมที่มีสมาชิก 3-4 คน เพื่อตรวจสอบคำตอบในใบกิจกรรมที่ 4 เรื่อง ลากรถมาเกย และแลกเปลี่ยนความรู้ความเข้าใจ โดยใช้เวลา 10 นาที และเมื่อครบเวลา 10 นาที ให้แต่ละกลุ่มหยุดทันที 2) วิทยากรและผู้เข้ารับการอบรมร่วมกันเฉลยข้อคำถามใบกิจกรรมที่ 4 จากนั้นวิทยากรเน้นให้ผู้เข้ารับการอบรมเห็นว่า คำถามในใบกิจกรรมที่ 4 เป็นตัวอย่างความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน/ ยาก ของเนื้อหาเกี่ยวกับ การ	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 5: ใบกิจกรรมที่ 3 เรื่อง ขอสามคำ - เอกสารสำหรับวิทยากร 3: เฉลยใบกิจกรรมที่ 3 เรื่อง ขอสามคำ - คู่มือครู - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 6: ใบกิจกรรมที่ 4 เรื่อง ลากรถมาเกย - เอกสารสำหรับวิทยากร 4: เฉลยใบกิจกรรมที่ 4 เรื่อง ลากรถมาเกย	- ประเมินการมีส่วนร่วมในกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
ดำเนินการของฟังก์ชัน จากนั้นวิทยากรนำอภิปรายเกี่ยวกับการแก้ไขความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน/ ยาก ดังกล่าวให้ถูกต้อง จะได้ความเข้าใจที่ตรงกัน 3) วิทยากรสรุปความเข้าใจคลาดเคลื่อน/ ยาก ของเนื้อหาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน ชนิดของฟังก์ชันที่ควรรู้จัก และฟังก์ชันจาก A ไป B รวมทั้งความเข้าใจที่ถูกต้อง พร้อมทั้งให้ดูรายละเอียดในใบความรู้ที่ 2 ในส่วนที่ <u>สาม</u>ซึ่งเป็นเนื้อหาเรื่องฟังก์ชันผกผัน นอกจากนั้น วิทยากรอาจให้ผู้เข้ารับการอบรมเพิ่มเติมความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน/ ยาก และข้อผิดพลาดทางการเรียนที่ได้จากประสบการณ์ของตนเอง เทคนิคการเขียนกราฟ 1) วิทยากรนำเสนอสนทนากับผู้เข้ารับการอบรมเรื่องการเขียนกราฟของฟังก์ชันบางฟังก์ชัน อาจสามารถเขียนโดยอาศัยกราฟของฟังก์ชันที่เคยพบมาแล้ว เช่น กราฟของฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันกำลังสอง ร่วมกับแนวความคิดการเลื่อนกราฟ 2) วิทยากรอธิบายแนวความคิดการเลื่อนกราฟว่ามีสองแบบ ดังนี้ การเลื่อนกราฟในแนวตั้ง จะใช้กับการกราฟของฟังก์ชันที่เขียนในรูปสมการ $y = f(x) + c$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง กราฟของฟังก์ชันดังกล่าว เกิดจากการเลื่อนกราฟของ $y = f(x)$ ขึ้นหรือลง c หน่วย ขึ้นอยู่กับว่า c เป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบ จากนั้นวิทยากรยกตัวอย่างการเลื่อนกราฟในแนวตั้ง ดังนี้ การร่างกราฟของฟังก์ชันในรูป $y = x^2 + 3$ จะใช้กราฟของฟังก์ชันในรูป $y = x^2$ เป็นหลักในการอ้างอิง จากนั้นเลื่อนขึ้น 3 หน่วย จะได้กราฟของฟังก์ชันในรูป $y = x^2 + 3$ การร่างกราฟของฟังก์ชันในรูป $y = x - 2$ จะใช้กราฟของฟังก์ชันในรูป $y = x$ เป็นหลักในการอ้างอิง	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 2: ใบความรู้ที่ 2 เรื่อง ความเข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับฟังก์ชัน - คู่มือครู	

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
จากนั้นเลื่อนลง 2 หน่วย จะได้กราฟของฟังก์ชันในรูป $y = x - 2$ การเลื่อนกราฟในแนวนอน จะใช้กับการกราฟของฟังก์ชันที่เขียนในรูปสมการ $y = f(x - c)$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง กราฟของฟังก์ชันดังกล่าวเกิดจากการเลื่อนกราฟของ $y = f(x)$ ไปทางขวาหรือซ้าย c หน่วย ขึ้นอยู่กับว่า c เป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบ จากนั้นวิทยากรยกตัวอย่างการเลื่อนกราฟในแนวนอน ดังนี้ การร่างกราฟของฟังก์ชันในรูป $y = (x + 3)^2$ จะใช้กราฟของฟังก์ชันในรูป $y = x^2$ เป็นหลักในการอ้างอิง จากนั้นเลื่อนไปทางซ้ายมือ 3 หน่วย จะได้กราฟของฟังก์ชันในรูป $y = (x + 3)^2$ การร่างกราฟของฟังก์ชันในรูป $y = x - 2$ จะใช้กราฟของฟังก์ชันในรูป $y = x$ เป็นหลักในการอ้างอิง จากนั้นเลื่อนไปทางขวามือ 2 หน่วย จะได้กราฟของฟังก์ชันในรูป $y = x - 2$ 3) วิทยากรยกตัวอย่างเพิ่มเติม 2 ตัวอย่าง ได้แก่ 3.1) จงอธิบายวิธีการเขียนกราฟของฟังก์ชัน และ 3.2) จงอธิบายวิธีการเขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = (x - 1)^2 - 3$ แล้วจึงให้ผู้เข้ารับการอบรม ช่วยกันหาคำตอบ จากนั้นวิทยากรและผู้เข้ารับการอบรมช่วยกันเฉลย 4) วิทยากรยกตัวอย่างความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน/ ยาก ของเนื้อหาเกี่ยวกับเทคนิคการเขียนกราฟ เช่น ผู้เรียนไม่เข้าใจหลักการเลื่อนกราฟ จึงทำให้เกิดความสับสน โดยไม่ทราบว่าจะใช้กราฟของฟังก์ชันใดเป็นจุดเริ่มต้น และไม่ทราบว่า会上เลื่อนขึ้นหรือเลื่อนลง เป็นระยะทางเท่าใด เป็นต้น นอกจากนั้น วิทยากรอาจให้ผู้เข้ารับการอบรมเพิ่มเติมความเข้าใจ ที่คลาดเคลื่อน/ ยาก และข้อผิดพลาดทางการเรียนที่ได้จากประสบการณ์ของตนเอง		

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
1.4 ศึกษาการวางแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ฟังก์ชัน (30 นาที) 1) วิทยากรกล่าวถึงประเด็นที่ควรพิจารณาในการวางแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ฟังก์ชัน และอธิบายในแต่ละประเด็นดังนี้ ศึกษาเนื้อหาสาระเรื่องฟังก์ชัน โดยวิเคราะห์หัวข้อย่อยต่าง ๆ เลือกสาระสำคัญของหัวข้อย่อยต่าง ๆ ดังกล่าว และจัดเรียงลำดับหัวข้อย่อยตามลำดับการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ โดยกำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ทั้งสามด้าน คือ ด้านความรู้ ด้านทักษะกระบวนการ และด้านคุณลักษณะและเจตคติให้ผู้เรียนทราบก่อนที่จะสอน สื่อการเรียนรู้/ แหล่งการเรียนรู้ โดยจัดเตรียมสื่อการเรียนรู้/ แหล่งการเรียนรู้ให้เหมาะสมกับเนื้อหาและจัดทำเอกสารประกอบการเรียนรู้ การวิเคราะห์และประเมินผู้เรียนก่อนดำเนินการสอน โดยวิเคราะห์ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นสำหรับการเรียนเนื้อหาแต่ละเรื่อง และวิเคราะห์ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน/ ยาก รวมทั้งประเมินความพร้อมของผู้เรียน กระบวนการจัดการเรียนรู้ โดยเลือกวิธีสอนและเทคนิคการสอนให้เหมาะสมกับเนื้อหา โดยอาจศึกษาแนวทางการสอนในหนังสือเรียนการประเมินผลการเรียนรู้ โดยเน้นการประเมินการเรียนรู้ตามสภาพจริง การประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และการประเมินการจัดการเรียนรู้เพื่อนำไปปรับปรุงการจัดการเรียนรู้ 2) วิทยากรกล่าวถึงการใช้คู่มือครูประกอบการวางแผนการจัดการเรียนรู้ และอธิบายคู่มือครูดังนี้		

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
วิทยาการชี้ถึงความสำคัญของคู่มือครู โดยเน้นให้ผู้เรียนเห็นว่าคู่มือครูดังกล่าว อาจใช้เป็นแนวทางในการวางแผนและจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ให้ผู้เรียนบรรลุตามมาตรฐานการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ วิทยาการอธิบายถึงหัวข้อต่าง ๆ และรายละเอียดบางหัวข้อในคู่มือครู โดยยกตัวอย่างคู่มือเล่ม 2 บทที่ 2 เรื่อง ฟังก์ชัน รวมทั้งอธิบายความเชื่อมโยงของแต่ละหัวข้อยังกล่าว วิทยาการใช้คำถามและการอธิบายเพื่อวิเคราะห์สาระสำคัญและข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอนเนื้อหาเรื่องฟังก์ชันประกอบ เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรมเกิดความเข้าใจและสามารถที่จะแปลงข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอนเนื้อหาเรื่องฟังก์ชันประกอบดังกล่าวไปสู่การจัดทำแผนการจัดการเรียนรู้ 3) วิทยาการกล่าวถึงความสำคัญการจัดทำแผนการจัดการเรียนรู้ โดยเน้นให้ผู้เข้ารับการอบรมเห็นว่าการจัดทำแผนการจัดการเรียนรู้ จะช่วยผู้สอนได้มากในขณะสอน 4) วิทยาการกล่าวถึงแผนการจัดการเรียนรู้ว่าอาจแบ่งได้ 3 ลักษณะ คือ แผนรายภาค (แผนระยะยาว) แผนรายหน่วย และแผนรายคาบ โดยในการอบรมครั้งนี้ จะเน้นการจัดทำแผนการจัดการเรียนรู้รายคาบ พร้อมอธิบายเพิ่มเติมว่าการจัดทำแผนการจัดการเรียนรู้รายคาบ อาจทำได้หลายลักษณะ เช่น ทำเป็นแผนแบบมีรายละเอียดมาก หรือเป็นแผนโดยย่อเพื่อลำดับขั้นการสอนซึ่งแบบนี้มักนิยมกันมาก 5) วิทยาการกล่าวถึงหัวข้อต่าง ๆ ในแผนการจัดการเรียนรู้รายคาบ โดยเน้นให้เห็นว่าหัวข้อต่าง ๆ ในแผนการจัดการเรียนรู้รายคาบอาจเตรียมแตกต่างกันไป แต่ควรครอบคลุมหัวข้อที่สำคัญ คือ จุดประสงค์การเรียนรู้หรือ	- คู่มือครู	

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
ผลการเรียนรู้ ความรู้พื้นฐาน สารการเรียนรู้ที่จะสอน กิจกรรมการเรียนรู้ (ขั้นนำ ขั้นสอน ขั้นสรุป) สื่อการเรียนรู้/ แหล่งการเรียนรู้ และการวัดและประเมินผลการเรียนรู้ อาจมีการบันทึกหลังสอน 6) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมศึกษา ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้ และร่วมกันอภิปรายตาม ประเด็นต่าง ๆ ได้แก่ จุดประสงค์การเรียนรู้หรือผลการ เรียนรู้ ความรู้พื้นฐาน สารการเรียนรู้ที่จะสอน กิจกรรม การเรียนรู้ (ขั้นนำ ขั้นสอน ขั้นสรุป) สื่อการเรียนรู้/ แหล่ง การเรียนรู้ และการวัดและประเมินผลการเรียนรู้ 7) วิทยากรสรุปแนวทางการวางแผนและ จัดทำแผนการจัดการเรียนรู้ โดยใช้การถามตอบและการ อธิบาย 2. การปฏิบัติการตามเนื้อหาสาระ (50 นาที) 2.1 วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมใช้กลุ่มเดิมที่มี สมาชิก 3 - 4 คน ช่วยกันทำใบงานที่ 1 เรื่อง สรุปอย่างไร วิทยากรชี้แจงแนวทางการทำใบงานที่ 1 และให้ เวลา 10 นาที และในระหว่างทำใบงานที่ 1 วิทยากรเดิน สังเกตและตอบข้อสงสัยเมื่อครบเวลา 10 นาที ให้แต่ละ กลุ่มหยุดทันที วิทยากรเลือกตัวแทน 1 - 2 กลุ่ม นำเสนอ แนวคิด จากนั้นวิทยากรสรุปสาระสำคัญที่ได้จากการทำ ใบงานที่ 1 2.2 วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมใช้กลุ่มเดิมที่มี สมาชิก 3 - 4 คน ช่วยกันทำใบงานที่ 2 เรื่อง โดมิโนพา เพลิน วิทยากรชี้แจงแนวทางการทำใบงานที่ 2 และให้เวลา 10 นาที และในระหว่างทำใบงานที่ 2 วิทยากรเดินสังเกต และตอบข้อสงสัย เมื่อครบเวลา 10 นาที ให้แต่ละกลุ่มหยุด ทันที วิทยากรเลือกตัวแทน 1 - 2 กลุ่มนำเสนอแนวคิด จากนั้นวิทยากรสรุปสาระสำคัญที่ได้จากการทำใบงานที่ 2	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับ การอบรม 7: ใบงานที่ 1 เรื่อง สรุปอย่างไร - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับ การอบรม 8 : ใบงานที่ 2 เรื่อง โดมิโนพาเพลิน	- ประเมินการนำเสนอ ผลงานกลุ่ม



กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
3. การสรุปทเรียน (10 นาที) 3.1 ให้ผู้เข้ารับการอบรมทำแบบตรวจสอบความเข้าใจ (เวลา 5 นาที) 3.2 วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมแลกเปลี่ยนกันตรวจสอบแบบตรวจสอบความเข้าใจ โดยวิทยากรเฉลยให้ตรงพร้อมกัน ต่อจากนั้นวิทยากรสรุปกิจกรรมทั้งหมด	- เอกสารผู้เข้ารับการอบรม 9: แบบตรวจสอบความเข้าใจ	

เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม

ใบความรู้ที่ 1

เรื่อง ขอบข่ายเนื้อหาและสาระสำคัญเกี่ยวกับฟังก์ชัน

ฟังก์ชันเป็นสาระการเรียนรู้หนึ่งที่มีความสำคัญมาก และเป็นประโยชน์ในการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับสูงขึ้นไป เช่น วิชาแคลคูลัส พีชคณิตนามธรรม (abstract algebra) นอกจากนี้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันยังเป็นประโยชน์ในการแก้โจทย์ปัญหาต่าง ๆ ที่ต้องใช้ตัวแปร สำหรับการจัดการเรียนรู้เรื่องฟังก์ชันมุ่งเน้นให้ผู้เรียนบรรลุผลการเรียนรู้ดังนี้

ตัวชี้วัด

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เขียนแทนความสัมพันธ์และฟังก์ชันในรูปแบบต่าง ๆ เช่น ตาราง สมการ และกราฟได้
2. เขียนกราฟของความสัมพันธ์และฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
3. สร้างความสัมพันธ์หรือฟังก์ชันจากสถานการณ์หรือปัญหาที่กำหนดให้และนำไปใช้ในการแก้ปัญหาได้
4. ใช้กราฟของสมการ อสมการ ฟังก์ชัน ในการแก้ปัญหาได้

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม ได้กำหนดผลการเรียนรู้ ดังนี้

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชัน เขียนกราฟของฟังก์ชัน และสร้างฟังก์ชันจากโจทย์ปัญหา
 2. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันไปใช้ในการแก้ปัญหา
- สำหรับสาระการเรียนรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันที่สอดคล้องกับตัวชี้วัดและผลการเรียนรู้ข้างต้น แยกตามตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม มีดังนี้

ตัวชี้วัด ประกอบด้วย ความสัมพันธ์ ตัวผกผันของความสัมพันธ์ ฟังก์ชันและชนิดของฟังก์ชันที่ควรรู้จัก

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม ประกอบด้วย ความสัมพันธ์ ตัวผกผันของความสัมพันธ์ ฟังก์ชันสมบัติบางประการของฟังก์ชัน วิธีการดำเนินการพื้นฐานเชิงพีชคณิตกับฟังก์ชัน ฟังก์ชันประกอบ ฟังก์ชันผกผัน และเทคนิคการเขียนกราฟของฟังก์ชันบางฟังก์ชัน สาระสำคัญเกี่ยวกับฟังก์ชัน สรุปได้ดังนี้



① ความสัมพันธ์

หัวข้อ	สาระสำคัญ
1.1 ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B	ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B คือเซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมด โดยที่ a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$
1.2 ความสัมพันธ์	r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$
1.3 โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์	ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B โดเมนของ r คือเซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับใน r เขียนแทนด้วย D_r เรนจ์ของ r คือเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับใน r เขียนแทนด้วย R_r
1.4 ตัวผกผันของความสัมพันธ์	ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r คือความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย r^{-1}

② ฟังก์ชันและชนิดของฟังก์ชันที่ควรรู้จัก

หัวข้อ	สาระสำคัญ
2.1 ฟังก์ชัน	ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่งสำหรับคู่อันดับสองคู่ใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้วสมาชิกตัวหลังต้องไม่ต่างกัน
2.2 สัญลักษณ์ของฟังก์ชัน	1) ถ้า f เป็นฟังก์ชันและ $(x, y) \in f$ แล้ว เรากล่าวว่า y เป็น ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x 2) ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x เขียนแทนด้วย $f(x)$ อ่านว่า เอฟของเอกซ์
2.3 ฟังก์ชันเชิงเส้น	1) ฟังก์ชันเชิงเส้น คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = ax + b$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$ กราฟของฟังก์ชันเชิงเส้นจะเป็นเส้นตรง 2) ฟังก์ชัน $y = ax + b$ เมื่อ $a = 0$ จะได้ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = b$ ซึ่งมีชื่อเรียกว่า ฟังก์ชันคงตัว (constant function) กราฟของฟังก์ชันคงตัวจะเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน X
2.4 ฟังก์ชันกำลังสอง	1) ฟังก์ชันกำลังสอง คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a \neq 0$

หัวข้อ	สาระสำคัญ
	2) ลักษณะกราฟของฟังก์ชันกำลังสองและเมื่อค่าของ a เป็นบวกหรือลบ จะทำให้ได้กราฟเป็นเส้นโค้งหงายหรือคว่ำ 3) ฟังก์ชันกำลังสองเขียนอยู่ในรูปของ $y = ax^2 + bx + c$ เราสามารถเปลี่ยนให้ y อยู่ในรูปของ $y = a(x-h)^2 + k$ โดยการทำให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์เพื่อให้ง่ายต่อการหาค่าต่ำสุดและสูงสุด และการแก้สมการ
2.5 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	1) ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = a^x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ 2) ลักษณะกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล
2.6 ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์	1) ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ที่จะกล่าวถึงในที่นี้คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = x - a + c$ เมื่อ a และ c เป็นจำนวนจริง 2) ลักษณะกราฟของฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์
2.7 ฟังก์ชันขั้นบันได	1) ฟังก์ชันขั้นบันได หมายถึง ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริงและมีค่าของฟังก์ชันเป็นค่าคงตัวเป็นช่วง ๆ มากกว่าหนึ่งช่วง 2) ลักษณะกราฟของฟังก์ชันขั้นบันได

๓ สมบัติบางประการของฟังก์ชัน

หัวข้อ	สาระสำคัญ
3.1 ฟังก์ชันจาก A ไป B	f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มี A เป็นโดเมน และมีเรนจ์เป็นสับเซตของ B f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f : A \rightarrow B$
3.2 ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B	1) f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น A และมีเรนจ์เป็น B 2) f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{\text{ทั่วถึง}} B$
3.3 ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B	1) f เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B สำหรับ x_1, x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$ 2) f เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 จาก A ไป B เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{1-1} B$



หัวข้อ	สาระสำคัญ
3.4 ฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลด	f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง และ A เป็นสับเซตของโดเมน 1. f เป็นฟังก์ชันเพิ่มใน A ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x_1, x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$ 2. f เป็นฟังก์ชันลดใน A ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x_1, x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$

④ วิธีการดำเนินการพื้นฐานเชิงพีชคณิตกับฟังก์ชัน

หัวข้อ	สาระสำคัญ
4.1 วิธีการ ดำเนินการ พื้นฐานเชิง พีชคณิตกับ ฟังก์ชัน	ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของ R ผลบวก (sum) ผลต่าง (different) ผลคูณ (product) และผลหาร (quotient) ของ f และ g เขียนแทนด้วย $f + g, f - g, fg$, และ $\frac{f}{g}$ ตามลำดับ เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดค่าโดย 1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ เมื่อ $x \in D_f \cap D_g$ 2) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ เมื่อ $x \in D_f \cap D_g$ 3) $(fg)(x) = f(x)g(x)$ เมื่อ $x \in D_f \cap D_g$ 4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $x \in D_f \cap D_g$ และ $g(x) \neq 0$
4.2 ฟังก์ชัน ประกอบ	f และ g เป็นฟังก์ชัน และ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วย $g \circ f$ คือฟังก์ชันที่มีโดเมน คือ $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ และกำหนดค่าของ $g \circ f$ โดย $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ สำหรับทุก x ใน $D_{g \circ f}$

๕ ฟังก์ชันผกผัน

หัวข้อ	สาระสำคัญ
5.1 ฟังก์ชันผกผัน	ถ้าตัวผกผันของฟังก์ชัน เป็นฟังก์ชัน เราจะเรียกว่าฟังก์ชันผกผัน (inverse function) และกล่าวว่า ฟังก์ชันนั้นมีฟังก์ชันผกผัน การตรวจสอบว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้มีฟังก์ชันผกผันหรือไม่ เราสามารถใช้ ทฤษฎีบท 1 กล่าวคือ ทฤษฎีบท 1 ให้ f เป็นฟังก์ชัน f มีฟังก์ชันผกผัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1 - 1

๖ เทคนิคการเขียนกราฟ

หัวข้อ	สาระสำคัญ
6.1 เทคนิคการเขียนกราฟ	การเขียนกราฟของฟังก์ชันบางฟังก์ชัน อาจสามารถเขียนโดยอาศัยกราฟของฟังก์ชันที่เคยพบมาแล้ว เช่น กราฟของฟังก์ชันเชิงเส้น กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง และกราฟของฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ ร่วมกับแนวคิดการเลื่อนกราฟ <u>การเลื่อนกราฟมีสองแบบ ดังนี้</u> 1) การเลื่อนกราฟในแนวตั้ง กราฟของ $y = f(x) + c$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง คือ กราฟที่เกิดจากการเลื่อนกราฟของ $y = f(x)$ ขึ้นหรือลง c หน่วย ขึ้นอยู่กับว่า c เป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบ 2) การเลื่อนกราฟในแนวนอน กราฟของ $y = f(x - c)$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง คือ กราฟที่เกิดจากการเลื่อนกราฟของ $y = f(x)$ ไปทางขวาหรือซ้าย c หน่วย ขึ้นอยู่กับว่า c เป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบ



ใบความรู้ที่ 2

เรื่อง ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับฟังก์ชัน

ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คืออะไร

ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน เป็นความคิดและความเข้าใจที่แตกต่างไปจากความเป็นจริง ที่อาจมาจากประสบการณ์ที่ไม่ถูกต้องและไม่ชัดเจนของแต่ละบุคคลที่ยากต่อการแก้ไขเปลี่ยนแปลง การที่ผู้เรียนมีความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนในเรื่องใดเรื่องหนึ่ง อาจทำให้ผู้เรียนไม่สามารถทำความเข้าใจเนื้อหาใหม่ที่เกี่ยวข้องกันหรือเนื้อหาในระดับที่สูงขึ้น นอกจากนั้นการเชื่อมโยงความรู้เดิมกับความรู้ใหม่จะเกิดขึ้นหรือไม่เกิดเลย ส่งผลให้ผู้เรียนไม่ประสบผลสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์

การที่ผู้สอนทราบลักษณะของความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนในเรื่องที่จะสอน มีประโยชน์อย่างไร

การวิเคราะห์ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนในเรื่องที่จะสอน เป็นสิ่งสำคัญที่จะทำให้การจัดการเรียนรู้มีประสิทธิภาพ การทราบลักษณะของความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนในเรื่องที่จะสอน จะเป็นประโยชน์สำหรับผู้สอนในการวางแผนการจัดการเรียนรู้หรือ การเตรียมบทเรียน ซึ่งจะช่วยป้องกันหรือหลีกเลี่ยงไม่ให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนในเรื่องที่เรียนได้

สำหรับเอกสารนี้ ขอนำเสนอลักษณะของความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับฟังก์ชัน รวมทั้งความเข้าใจที่ถูกต้อง โดยแบ่งการนำเสนอเป็น 3 ส่วนจำแนกตามเนื้อหาสาระ ดังนี้

ส่วนแรก เนื้อหาเรื่องความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน ชนิดของฟังก์ชันที่ควรรู้จัก ฟังก์ชันจาก A ไป B แสดงดังตาราง

ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของผู้เรียน	ความเข้าใจที่ถูกต้อง
1. $f(x)$ เป็นสัญลักษณ์แทนฟังก์ชัน	1. $f(x)$ เป็นสัญลักษณ์แทนค่าของฟังก์ชัน f ที่ x
2. เข้าใจว่าความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mid y^2 = x\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน โดยผู้เรียนอาจมาจากความสัมพันธ์ที่คล้ายกัน เช่น $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = x\}$ ที่แสดงแล้วว่าไม่เป็นฟังก์ชัน โดยจำแต่รูปของสมการ $y^2 = x$ โดยไม่ได้พิจารณาโดเมนและเรนจ์	2. ความสัมพันธ์ในรูป $y^2 = x$ อาจเป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชัน ขึ้นอยู่กับโดเมนกับเรนจ์
3. เข้าใจว่าหากลากเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y เพียงเส้นเดียวแล้วมีจุดตัดกราฟเพียงจุดเดียวสรุปว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดเป็นฟังก์ชันได้	3. การตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันจากความสัมพันธ์ที่กำหนดโดยอาศัยกราฟ ต้องพิจารณาว่า ไม่ว่าลากเส้นตรงที่ขนานกับแกน y ก็เส้นก็ตาม เส้นตรงแต่ละเส้นจะต้องตัดกราฟเพียงจุดเดียวเท่านั้น จึงจะสรุปว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดเป็นฟังก์ชัน

ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของผู้เรียน	ความเข้าใจที่ถูกต้อง
4. เข้าใจว่าการตรวจสอบความสัมพันธ์ที่กำหนดเป็นฟังก์ชัน 1 - 1 หรือไม่ สามารถตรวจสอบ เงื่อนไขของฟังก์ชัน 1 - 1 ได้เลย โดยไม่ได้ตรวจสอบว่าความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชันหรือไม่	4. ควรตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ก่อนพิจารณาฟังก์ชัน 1 - 1
5. เข้าใจว่าหากลากเส้นตรงที่ขนานแกน X เพียงเส้นเดียวแล้วมีจุดตัดกราฟเพียงจุดเดียวก็สรุปว่าฟังก์ชันที่กำหนดเป็นฟังก์ชัน 1 - 1 ได้	5. ต้องพิจารณาว่า ไม่ว่าลากเส้นตรงที่ขนานกับแกน X ก็เส้นก็ตาม เส้นตรงแต่ละเส้นจะต้องตัดกราฟเพียงจุดเดียวเท่านั้น จึงจะสรุปว่าฟังก์ชันที่กำหนดเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
6. จำวิธีการโดยพิจารณากราฟสลับกัน ระหว่างการตรวจสอบความสัมพันธ์ที่กำหนดเป็นฟังก์ชัน กับ การตรวจสอบฟังก์ชันที่กำหนดเป็นฟังก์ชัน 1 - 1	6. ต้องตรวจสอบความสัมพันธ์ที่กำหนดมาให้ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ ก่อนพิจารณา ฟังก์ชัน 1 - 1 จากนั้น ผู้สอนควรสรุป การตรวจสอบความสัมพันธ์โดยใช้วิธีลากเส้นตรง ว่าเพราะเหตุใดจึงเป็นฟังก์ชันหรือเพราะเหตุใด จึงเป็นฟังก์ชัน 1 - 1
7. เข้าใจว่า $f \subset A \times B$ เป็นฟังก์ชัน กับ ฟังก์ชันจาก A ไป B คือสิ่งเดียวกัน	7. $f \subset A \times B$ เป็นฟังก์ชัน กับฟังก์ชัน f จาก A ไป B มีความหมายไม่เหมือนกัน โดยฟังก์ชันจาก A ไป B ต้องสอดคล้องเงื่อนไขที่ว่า f เป็นฟังก์ชัน, $D_f = A$ และ $R_f = B$
8. เข้าใจว่าเรนจ์ของฟังก์ชันจาก A ไป B ต้องเท่ากับเซต B	8. เรนจ์ของฟังก์ชันจาก A ไป B อาจเท่ากับเซต B หรือเป็นสับเซตของเซต B
9. เข้าใจว่า ถ้าพบฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันเพิ่ม จะสรุปทันทีว่าฟังก์ชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันลด หรือพบว่าฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันลด จะสรุปทันทีว่าฟังก์ชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันเพิ่ม	9. มีตัวอย่างฟังก์ชันบางฟังก์ชันที่ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด เช่น ฟังก์ชันขั้นบันได

ส่วนที่สอง เนื้อหาเกี่ยวกับวิธีการดำเนินการพื้นฐานเชิงพีชคณิตกับฟังก์ชัน แสดงดังตาราง

ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน	ความเข้าใจที่ถูกต้อง
1. เข้าใจว่า $D_{\frac{f}{g}}$ เท่ากับ $D_f \cap D_g$ จึงทำให้หา $D_{\frac{f}{g}}$ ไม่ถูกต้อง	1. การหา $D_{\frac{f}{g}}$ พิจารณาจาก $D_f \cap D_g$ โดยไม่รวมค่า x ที่ทำให้ $g(x) = 0$
2. เข้าใจว่าการหาฟังก์ชัน $\frac{f}{g}$ ในบางกรณี เช่น กำหนด $f(x) = x^2 - 9$ และ $g(x) = x + 3$ แล้วหา $\frac{f}{g}(x)$ ผู้เรียนมักจะตัดทอนนิพจน์ที่เท่ากัน และสรุปว่า $\frac{f}{g}(x) = x - 3$ โดยไม่มีการระบุเงื่อนไขของ x	2. กรณีนี้ การเขียน $\frac{f}{g}(x)$ ต้องมีการระบุ x ว่าเป็นอะไรได้บ้าง เช่น กรณีนี้ $\frac{f}{g}(x) = x - 3$ เมื่อ $x \neq -3$ ซึ่งกรณีที่ $x = -3$ จะทำให้ $g(x) = 0$
3. เข้าใจว่า เมื่อกำหนด f และ g มาให้ จะมีฟังก์ชัน $f + g, f - g, fg$ และ $\frac{f}{g}$ เสมอ	3. เมื่อกำหนด f และ g มาให้ จะมีฟังก์ชัน $f + g, f - g, fg$ จะต้องตรวจสอบว่า $D_f \cap D_g \neq \emptyset$ ส่วน $\frac{f}{g}$ คือ $D_f \cap D_g \neq \emptyset$ โดยที่ $g(x) \neq 0$
4. เข้าใจว่า เงื่อนไขที่ทำให้มีฟังก์ชัน $\frac{f}{g}$ คือ $D_f \cap D_g \neq \emptyset$	4. เงื่อนไขที่ทำให้มีฟังก์ชัน $\frac{f}{g}$ คือ $D_f \cap D_g \neq \emptyset$ และต้องมีเงื่อนไขว่า $g(x) \neq 0$
5. เข้าใจว่า $D_{g \circ f}$ เท่ากับ D_f จึงทำให้เข้าใจว่าการหา $D_{g \circ f}$ พิจารณาจาก D_f อย่างเดียว	5. $D_{g \circ f}$ อาจเท่ากับ D_f หรือเป็นสับเซตของ D_f การหา $D_{g \circ f}$ จึงพิจารณาจาก D_f อย่างเดียวไม่ได้ แต่ต้องพิจารณาจาก D_g ด้วยโดยพิจารณา $x \in D_f$ ที่ทำให้ $f(x) \in D_g$
6. เข้าใจว่า จะมีฟังก์ชัน $g \circ f$ ได้ ก็ต่อเมื่อ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ หรือ จะมีฟังก์ชัน $g \circ f$ ได้ ก็ต่อเมื่อ $D_f \cap D_g \neq \emptyset$	6. กำหนด f และ g มาให้ จะมีฟังก์ชัน $g \circ f$ ก็ต่อเมื่อ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$
7. เข้าใจว่าเงื่อนไขที่ทำให้มีฟังก์ชัน $g \circ f$ และ $f \circ g$ คือ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ เหมือนกัน	7. เงื่อนไขที่ทำให้มีฟังก์ชัน $g \circ f$ คือ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ ส่วนเงื่อนไขที่ทำให้มีฟังก์ชัน $f \circ g$ คือ $R_g \cap D_f \neq \emptyset$
8. เข้าใจว่า $f \circ g(x) = g(f(x))$ หรือ เข้าใจว่า $f \circ g(x) = f(x)g(x)$	8. $f \circ g(x)$ หมายถึง ค่าของฟังก์ชัน f ที่ $g(x)$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f \circ g(x) = f(g(x))$

ส่วนที่สาม เนื้อหาเกี่ยวกับฟังก์ชันผกผัน แสดงดังตาราง

ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน	ความเป็นจริง
1. เข้าใจว่า ตัวผกผันของฟังก์ชัน กับ ฟังก์ชันผกผัน คือ สิ่งเดียวกัน	1. ตัวผกผันของฟังก์ชัน อาจจะเป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชัน ส่วนฟังก์ชันผกผัน คือ ตัวผกผันของฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชัน
2. เข้าใจว่า f^{-1} เป็นสัญลักษณ์แทนฟังก์ชัน	2. สัญลักษณ์ f^{-1} แทนตัวผกผันของฟังก์ชัน ส่วนสัญลักษณ์ $f^{-1}(x)$ แทนค่าของ f^{-1} ที่ x
3. เข้าใจว่า ถ้าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 สามารถสรุปได้ว่า $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$	3. ถ้าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 ผลสรุป คือ $f \circ f^{-1}(x) = x$ เมื่อ $x \in D_{f^{-1}}$ และ $f^{-1} \circ f(x) = x$ เมื่อ $x \in D_f$
4. เข้าใจว่าโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน เป็นโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันผกผัน	4. โดเมนของฟังก์ชันผกผัน คือ เรนจ์ของฟังก์ชัน และเรนจ์ของฟังก์ชันผกผัน คือโดเมนของฟังก์ชัน
5. เข้าใจว่า $f^{-1}(x)$ คือ $\frac{1}{f(x)}$	5. $f^{-1}(x)$ หมายถึงค่าของตัวผกผันของฟังก์ชัน ซึ่งไม่ได้หมายถึง $\frac{1}{f(x)}$

ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง จับความจริงฟังก์ชัน

คำชี้แจง จงศึกษาใบความรู้ที่ 1 และหนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6 แล้วตอบคำถามแต่ละข้อต่อไปนี้

1) ฟังก์ชันแตกต่างจากความสัมพันธ์อย่างไร

.....

.....

.....

.....

.....

2) **สถานการณ์** สมชายทานยาชนิดหนึ่งจำนวน 1 เม็ด โดยปริมาณยาในกระแสเลือดของสมชายในช่วง 10 ชั่วโมงแรกหลังจากรับประทานยาเข้าไป แสดงดังตารางข้างล่าง

ระยะเวลา (ชั่วโมง)	เริ่มต้น	2	4	6	8	10
ปริมาณยาในกระแสเลือด (มิลลิกรัม)	500	250	125	62.5	31.25	16.125

สถานการณ์ข้างต้น เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันชนิดใด

.....

.....

.....

.....

.....

3) ฟังก์ชันจาก A ไป B **ไม่เป็น**ฟังก์ชัน 1 - 1 และ ฟังก์ชันจาก A ไป B **ไม่เป็น**ฟังก์ชันทั่วถึงหมายความว่าอย่างไร

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4) จริงหรือไม่ที่ว่า ฟังก์ชันใด ๆ จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือ เป็นฟังก์ชันลด อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น
จงอธิบายพร้อมยกตัวอย่างประกอบ

.....

.....

.....

5) จริงหรือไม่ที่ว่า เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f และ g มาให้ จะมีฟังก์ชัน $f + g$ และ fg เสมอ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6) ตัวผกผันของฟังก์ชัน และฟังก์ชันผกผัน แตกต่างกันอย่างไร สัญลักษณ์ f^{-1} และ $f^{-1}(x)$
เหมือนหรือต่างกันอย่างไร

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง จัปซโมย

สถานการณ์ ในงานแสดงแฟชั่นโชว์นาฬิกาฝั่งเพชรมูลค่านับสิบล้านบาท เมื่องานเลิก ปรากฏว่ามีนาฬิกาเรือนหนึ่งหายไป เจ้าของงานสงสัยในทีมงาน 4 คน จึงเชิญให้ตำรวจมาไต่สวนผู้ถูกกล่าวหาทั้งสี่ ตำรวจทำการไต่สวนโดยขอให้พูด 3 ประโยค หากคำให้การของใครเป็นเท็จ 2 ใน 3 จะตกเป็นผู้ต้องสงสัยขโมยนาฬิกาเรือนดังกล่าว คำให้การของบุคคลทั้งสี่แสดงดังตาราง

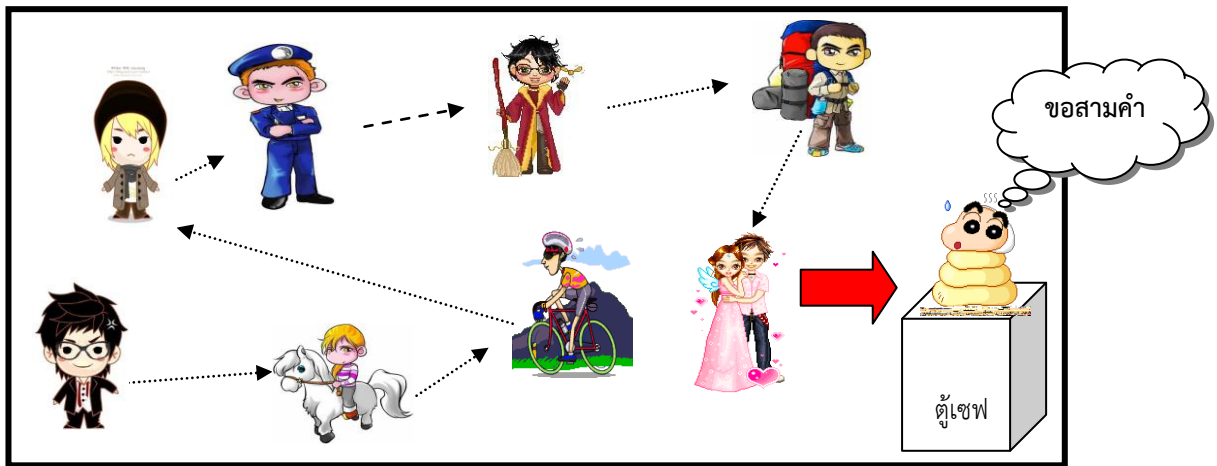
ผู้ถูกกล่าวหา	คำให้การ	พิจารณาคำให้การ (จริง หรือ เท็จ)
สมปอง	1.1 ตัวอย่างความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นฟังก์ชัน คือ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mid y^2 = x\}$ 1.2 $f(x)$ เป็นสัญลักษณ์แทนฟังก์ชัน 1.3 หากลากเส้นตรงที่ขนานกับแกน X เพียงเส้นเดียวแล้วมีจุดตัดเพียงจุดเดียว จะสามารถสรุปได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดเป็นฟังก์ชัน 1 - 1 ได้	1.1 1.2 1.3
สมชาย	2.1 ถ้า $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = 2x + 1\}$ แล้วเรนจ์ของ r คือ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 2.2 ถ้า $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{2x + 1}\}$ แล้วเรนจ์ของ r คือเซตของจำนวนจริงบวก 2.3 ถ้า $r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} \right\}$ แล้วเรนจ์ของ r คือ $(-3, 3)$	2.1 2.2 2.3
สมหมาย	3.1 ฟังก์ชัน $f \subset A \times B$ กับ ฟังก์ชัน f จากเซต A ไปทั่วถึงเซต B คือสิ่งเดียวกัน 3.2 ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ และ $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปทั่วถึงเซต B 3.3 ถ้า $f(x) = x^2$, $x > 0$ แล้ว f เป็นฟังก์ชัน 1 - 1	3.1 3.2 3.3
สมหญิง	4.1 เรนจ์ของ $f(x) = 2^x$ คือ $[0, \infty)$ 4.2 กราฟของ $f(x) = -4x^2$ มีลักษณะเป็นพาราโบลาหงาย 4.3 ฟังก์ชันขั้นบันได ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด	4.1 4.2 4.3

สรุปได้ว่า ผู้ต้องสงสัยขโมยนาฬิกา คือ

ใบกิจกรรมที่ 3 เรื่อง ขอสามคำ

สถานการณ์ เคนอิจิ ต้องการเปิดตู้เซฟแต่เขาไม่มีรหัส จึงได้ไปปรึกษากับผู้รู้คือ ชินจัง แต่ชินจังไม่บอกรหัสตรง ๆ แต่มีเงื่อนไขคือ ขอให้เคนอิจิพูดประโยคที่มีสามคำที่เขาถูกใจก่อน เขาจึงจะบอกรหัสเปิดตู้เซฟให้

นอกจากนั้น ชินจังยังแนะนำเกี่ยวกับการได้มาซึ่ง “ประโยคที่มีสามคำที่เขาถูกใจ” โดยให้เคนอิจิไปพูดคุยกับผู้คนหลากหลาย แต่ควรระมัดระวังคำพูดของผู้คนเหล่านั้นด้วย เนื่องจากจะมีคำพูดที่เป็นจริง หรือเป็นเท็จผสมผสานกันไป หากนำตัวอักษรภาษาอังกฤษที่กำกับไว้กับคำพูดที่เป็นจริงของผู้คนต่าง ๆ มาเรียบเรียงจะได้ “คำสามคำ” ที่ชินจังถูกใจ



บทสนทนาระหว่างเคนอิจิ กับ ผู้คนต่าง ๆ



กำหนด $f(x) = x^2 - 7$

และ $g(x) = 5 - x^2$

$(g \circ f)(1) = 9$

$(f \circ g)(1) = 9$

A

I



พระเอกขี่ม้าขาว



กำหนด $f(x+3) = 5x+4$

และ $(f \circ g)(x) = x+4$

$f(3) = 4$

$g(10) = 6$

$(f \cdot g)(5) = 56$

L

J

O



นักปั่นน้องเหล็ก

$g(x) = \frac{x+15}{5}$

$g \circ f = f \circ g$



เคนทาโร

กำหนด $f(x) = 2x+1$

และ $(g \circ f)(x) = 2x+1$

$g(x) = x$

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$

E

M



ตำรวจตรวจแหก



กำหนดฟังก์ชัน f และ g โดยที่
 $f(10) = 36$ และ $g(10) = 24$

$f(5) = 18$

$(f - g)(10) = 12$

ข้อมูลไม่เพียงพอสำหรับหา $g \circ f(10)$

A

T



นักเดินทาง



แม่মন้อย



กำหนด $f(x) = x^2 - 9$

และ $g(x) = x+3$

ถ้า $h(x) = x-3$ แล้ว $h = \frac{f}{g}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(-3)$ ไม่มีความหมาย

R

H



คู่รักต่างวัย

ใบกิจกรรมที่ 4 เรื่อง ลากรมมาเกย

สถานการณ์ สมพรกับครอบครัวเข้าร่วมแข่งขันรายการลากรมมาเกย กติกาของการแข่งขัน คือ สมพรจะต้องตอบคำถามที่รายการกำหนดทั้งหมด 8 ข้อให้ถูกต้อง โดยคำถามเป็นแบบคำถามถูกผิด จึงจะได้รถยนต์ซีดานหนึ่งคัน สำหรับคำตอบของสมพรกับครอบครัวมีดังนี้

- ☒ 1. ตัวผกผันของฟังก์ชัน คือ ฟังก์ชันผกผัน
 - ☒ 2. ถ้ากำหนด f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ แล้ว $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$
 - ☒ 3. ถ้ากำหนด f เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(a) = b$ แล้ว $f^{-1}(b) = a$
 - ☒ 4. ถ้าฟังก์ชัน $g(x) = 2x$ แล้ว $g^{-1}(24) = 12$
 - ☒ 5. ถ้ากำหนด $g \circ f(x) = 2x + 8$ และ $g(x) = 2x$ แล้ว $f^{-1}(20) = 24$
 - ☒ 6. ถ้ากำหนดให้ $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$ แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชัน
 - ☒ 7. ถ้ากำหนดให้ $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x|\}$ แล้วจะมีฟังก์ชัน g ซึ่ง $g \subset f$ และ g^{-1} เป็นฟังก์ชัน
 - ☒ 8. ถ้ากำหนดให้ $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3^x\}$ แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

จงตรวจสอบว่าสมพรและครอบครัวจะได้รถยนต์ซีดานจากรายการได้หรือไม่ พร้อมอธิบายเหตุผล

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



ใบงานที่ 1 เรื่อง สรุปอย่างไร

สถานการณ์ จากการสัมภาษณ์ของบุคคลต่าง ๆ เกี่ยวกับเนื้อหาเรื่องฟังก์ชัน พบว่า คนต่าง ๆ เหล่านั้นให้ข้อมูลซึ่งสรุปได้ดังนี้



เคนจิ

เมื่อกล่าวถึง “ฟังก์ชัน” จะหมายถึง ฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต B และไม่มีตัวอย่างของฟังก์ชันที่เป็นทั้งฟังก์ชัน $1 - 1$ และฟังก์ชันทั่วถึง



เคนทาโร

สัญลักษณ์ f และ $f(x)$ แทนสิ่งเดียวกัน เช่นเดียวกับ สัญลักษณ์ f^{-1} และ $f^{-1}(x)$ ที่แทนสิ่งเดียวกัน และสัญลักษณ์ $f^{-1}(x)$ หมายถึง $\frac{1}{f(x)}$
นอกจากนี้ $f \circ g$ กับ fg คือ สัญลักษณ์ที่แทนสิ่งเดียวกัน



ตำรวจตรวจหลัก

เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f และ g ใด ๆ มาให้ จะมีฟังก์ชัน $f + g$, $f - g$, fg , $\frac{f}{g}$ เสมอ
นอกจากนั้นเมื่อ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ สามารถสรุปได้ว่ามีฟังก์ชัน $g \circ f$



นักเดินทาง

การหาโดเมนของฟังก์ชัน $g \circ f$ ทำได้โดยหาโดเมนของฟังก์ชัน f
เนื่องจาก $D_{g \circ f} = D_f$ ส่วนการหาโดเมนของฟังก์ชัน $\frac{f}{g}$ ทำได้โดยหาโดเมนของฟังก์ชัน f และโดเมนของฟังก์ชัน g แล้วนำมาอินเตอร์เซกชันกัน



คู่รักต่างวัย

ตัวผกผันของฟังก์ชัน f ไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชัน เงื่อนไขที่ทำให้ตัวผกผันของฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชัน คือ f ต้องเป็นฟังก์ชันทั่วถึง

คำถาม จงพิจารณาว่า ข้อมูลของแต่ละคนข้างต้น มีส่วนใดที่ไม่เป็นจริงบ้าง และจะแก้ไขให้ถูกต้องอย่างไร โดยเติมรายละเอียดในช่องว่างที่กำหนดไว้ให้

1) ข้อมูลของเคนอิจิ

ส่วนที่ไม่เป็นจริง คือ

.....

แก้ไขให้ถูกต้องดังนี้

.....

2) ข้อมูลของเคนทาโร

ส่วนที่ไม่เป็นจริง คือ

.....

แก้ไขให้ถูกต้องดังนี้

.....

3) ข้อมูลของตำรวจตรวจแหลก

ส่วนที่ไม่เป็นจริง คือ

.....

แก้ไขให้ถูกต้องดังนี้

.....

4) ข้อมูลของนักเดินทาง

ส่วนที่ไม่เป็นจริง คือ

.....

แก้ไขให้ถูกต้องดังนี้

.....

.....



5) ข้อมูลของคู่รักต่างวัย

ส่วนที่ไม่เป็นจริง คือ

.....

.....

แก้ไขให้ถูกต้องดังนี้

.....

.....

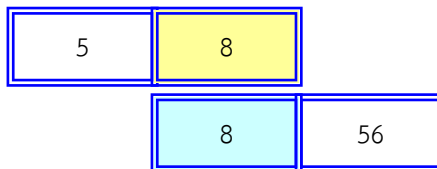
ใบงานที่ 2 เรื่อง โดมิโนพาเพลิน

- คำชี้แจง**
- กำหนดโดมิโนสี่ตัวคือ A, B, C และ D ซึ่งแต่ละตัวจะสัมพันธ์กับจำนวนจริงสองจำนวน
 - หากนำโดมิโนที่กำหนดทั้งสองมาต่อกัน จะสามารถต่อกันได้ครบทุกตัวหรือไม่ หากไม่ครบทั้งสี่ตัว เหลือโดมิโนตัวใด
 - โดมิโนสองตัวที่สามารถต่อกันได้ เมื่อมีอย่างน้อย 1 จำนวนที่มีค่าเท่ากัน

ตัวอย่าง 1 โดมิโนสองตัวที่มีจำนวนที่เท่ากัน 1 จำนวน เช่น



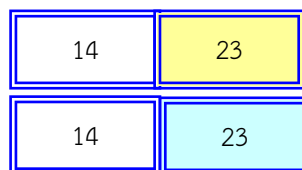
ลักษณะการต่อทำได้ดังนี้



ตัวอย่าง 2 โดมิโนสองตัวที่มีจำนวนที่เท่ากันสองจำนวน เช่น



ลักษณะการต่อทำได้ดังนี้



ตัวอย่าง 3 โดมิโนสองตัวที่ไม่สามารถต่อกันได้ เช่น



A

A1 $f(4)$	A2 $f^{-1}(9)$
เมื่อกำหนด $f(x+3) = 4x+3$	เมื่อกำหนด $f(x) = \frac{x}{5} + 4$

B

B1 $\frac{f}{g}(3)$	B2 $(fg)(5)$
เมื่อกำหนด $f(x) = x^2 - 1$ และ $g(x) = x + 1$	เมื่อกำหนด $f^{-1}(x+2) = 2x+1$ และ $(f \circ g)(x) = x+1$

C

C1 $(g-f)(12)$	C2 $(f \circ g)(a)$
เมื่อ f และ g เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(12) = 20$ และ $g^{-1}(24) = 12$	เมื่อ f และ g เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(24) = 16$ และ $g^{-1}(24) = a$

D

D1 $4a^2$	D2 $ac+bd$
เมื่อ a สอดคล้องกับสมการ $(g \circ f)(a) = (f \circ g)(a)$ โดยที่ $f(x) = x^2 + 1$ และ $g(x) = 2x$	เมื่อ $[a,b] = D_r$ และ $[c,d] = R_r$ โดยที่ $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{25-x^2}\}$

แบบตรวจสอบความเข้าใจเรื่องฟังก์ชัน

- คำชี้แจง** 1. แบบตรวจสอบความเข้าใจเรื่องฟังก์ชันมีคำถาม 5 ข้อ
2. แต่ละคำถาม จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. ข้อใดกล่าวถูกต้อง

- ความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x|\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน
- ฟังก์ชัน $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$ เป็นฟังก์ชัน 1 - 1
- $D_{\frac{f}{g}} = D_f$
- ถ้า $R_f \cap D_g = \{1, 2, 3\}$ แล้วมีฟังก์ชัน $g \circ f$

2. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ และ $f = \{(x, y) \in A \times A \mid y = 2x - 3\}$
แล้ว f เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปเซต B
- ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, $B = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$ และ $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 4x\}$
แล้ว f เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปทั่วถึงเซต B

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

- ก และ ข ถูก
- ก และ ข ผิด
- ก ถูก และ ข ผิด
- ก ผิด และ ข ถูก

3. กำหนดฟังก์ชัน f และ g โดยที่ $f(a) = 9$ และ $g^{-1}(12) = a$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

- $f^{-1}(9) = a$
- g เป็นฟังก์ชัน 1 - 1
- $(f \circ g)(a) = 108$

ข้อความใดบ้างเป็นจริง

- ข้อ ก และ ข้อ ข
- ข้อ ก และ ข้อ ค
- ข้อ ข และ ข้อ ค
- ข้อ ข เท่านั้น

4. กำหนดฟังก์ชัน f และ g โดยที่ $g(x+2) = 2x+3$ และ $(g^{-1} \circ f)(x) = 6x+2$

ข้อใดไม่ถูกต้อง

- $g^{-1}(7) = 4$
- $(g \circ f)(0) = 3$
- $(f+g)(2) = 30$
- $(f \cdot g)(3.5) = 252$



5. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. กราฟของ $y_1 = 2^x - 5$ มีรูปร่างเหมือนกราฟของ $y_2 = 2^x$ แต่อยู่ในตำแหน่งที่เลื่อนลงข้างล่าง 5 หน่วย

ข. กราฟของ $y_1 = (x-3)^2$ มีรูปร่างเหมือนกราฟของ $y_2 = x^2$ แต่อยู่ในตำแหน่งที่เลื่อนไปทางซ้าย 3 หน่วย

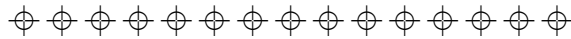
ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. ก และ ข ถูก

2. ก และ ข ผิด

3. ก ถูก และ ข ผิด

4. ก ผิด และ ข ถูก



ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้

สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ฟังก์ชัน เรื่อง ฟังก์ชันประกอบ

จำนวน 1 คาบ

.....
สาระที่ 4 พีชคณิต

มาตรฐาน ค 4.1 เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป (pattern) ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

ตัวชี้วัด ม.4/3 มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เขียนแสดงความสัมพันธ์และฟังก์ชันในรูปแบบต่าง ๆ เช่น ตาราง กราฟ และสมการ

ผลการเรียนรู้

ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

1. อธิบายสาระสำคัญของนิยามของฟังก์ชันประกอบ
2. หาฟังก์ชันประกอบ จากฟังก์ชันสองฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้บทนิยาม
3. หาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันประกอบ จากฟังก์ชันสองฟังก์ชันที่กำหนดให้

ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถ

1. อธิบายเหตุผลประกอบแนวคิด โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันประกอบ
2. ใช้สัญลักษณ์และภาษาเกี่ยวกับฟังก์ชันประกอบในการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์

ด้านคุณลักษณะ นักเรียน

1. มีความรอบคอบ
2. ความเป็นระเบียบ
3. มีความตรงต่อเวลา

สาระการเรียนรู้

บทนิยามฟังก์ชันประกอบ

กำหนด f และ g เป็นฟังก์ชัน และ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วย $g \circ f$ คือฟังก์ชันที่มีโดเมน คือ $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ และกำหนดค่าของ $g \circ f$ โดย $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ สำหรับทุก x ใน $D_{g \circ f}$

ตัวอย่างที่ 1 ให้ $f = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,13)\}$ และ $g = \{(1,3), (2,4), (4,5)\}$

จงหาว่ามีฟังก์ชัน $g \circ f$ หรือฟังก์ชัน $f \circ g$ หรือไม่ ถ้ามีจงหาฟังก์ชัน $g \circ f$ หรือฟังก์ชัน $f \circ g$ พร้อมทั้งหาโดเมนของฟังก์ชันทั้งสอง

วิธีทำ (1) จากโจทย์จะได้ว่า $R_f \cap D_g = \{2,4\}$ ซึ่งไม่เท่ากับเซตว่าง จึงมีฟังก์ชัน $g \circ f$ จาก $g \circ f(x) = g(f(x))$ จึงได้ว่า $g \circ f(x) = \{(1,4), (2,5)\}$



$$D_{g \circ f} = \{1, 2\} \text{ และ } R_{g \circ f} = \{4, 5\}$$

(2) จากโจทย์จะได้ว่า $R_g \cap D_f = \{3, 4\}$ ซึ่งไม่เท่ากับเซตว่าง จึงมีฟังก์ชัน $f \circ g$

จาก $f \circ g(x) = f(g(x))$ จึงได้ว่า $f \circ g = \{(1, 6), (2, 13)\}$

$$D_{f \circ g} = \{1, 2\} \text{ และ } R_{f \circ g} = \{6, 13\}$$

หมายเหตุ จากตัวอย่างที่ 1 สังเกตว่า $g \circ f \neq f \circ g$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $f = \{(1, 5), (2, 4), (3, 6)\}$ และ $g = \{(3, 8), (4, 10), (5, 9)\}$

จงหาว่ามีฟังก์ชัน $g \circ f$ หรือฟังก์ชัน $f \circ g$ หรือไม่ ถ้ามีจงหาฟังก์ชัน $g \circ f$ หรือฟังก์ชัน $f \circ g$ พร้อมทั้งหาโดเมนของฟังก์ชันทั้งสอง

วิธีทำ (1) จากโจทย์จะได้ว่า $R_f \cap D_g = \{4, 5\}$ ซึ่งไม่เท่ากับเซตว่าง จึงมีฟังก์ชัน $g \circ f$

จาก $g \circ f(x) = g(f(x))$ จึงได้ว่า $g \circ f = \{(1, 9), (2, 10)\}$

$$D_{g \circ f} = \{1, 2\} \text{ และ } R_{g \circ f} = \{9, 10\}$$

(2) จากโจทย์จะได้ว่า $R_g \cap D_f = \emptyset$ เท่ากับเซตว่าง จึงไม่มีฟังก์ชัน $f \circ g$

ตัวอย่างที่ 3 ให้ $f(x) = x^2 - 3$ และ $g(x) = x + 2$

จงหาว่ามีฟังก์ชัน $g \circ f$ หรือฟังก์ชัน $f \circ g$ หรือไม่ ถ้ามีจงหาฟังก์ชัน $g \circ f$ หรือฟังก์ชัน $f \circ g$ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันทั้งสอง

วิธีทำ (1) สังเกตว่า $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [-3, \infty)$

$$D_g = \mathbb{R} \text{ และ } R_g = \mathbb{R}$$

เนื่องจาก $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ และ $R_g \cap D_f \neq \emptyset$ จึงมี $g \circ f$ และ $f \circ g$

$$\begin{aligned} \text{จาก } g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2 - 3) \\ &= (x^2 - 3) + 2 \\ &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } g \circ f(x) = x^2 - 1$$

$$\begin{aligned} \text{และ } D_{g \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จาก } f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x + 2) \\ &= (x + 2)^2 - 3 \\ &= x^2 + 4x + 1 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } f \circ g(x) = x^2 + 4x + 1$$



$$\begin{aligned}
 \text{และ } D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in \mathbb{R}\} \\
 &= \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

หมายเหตุ จากตัวอย่างที่ 3 สังเกตว่า $D_{g \circ f} = D_f$ และ $D_{f \circ g} = D_g$

ตัวอย่างที่ 4 ให้ $f(x) = x+1$ และ $g(x) = \sqrt{x}$

จงหาว่ามีฟังก์ชัน $g \circ f$ หรือฟังก์ชัน $f \circ g$ หรือไม่ ถ้ามีจงหาฟังก์ชัน $g \circ f$ หรือฟังก์ชัน $f \circ g$ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันทั้งสอง

วิธีทำ (1) สังเกตว่า $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \mathbb{R}$

จาก $g(x) = \sqrt{x}$ จึงได้ว่า $D_g = \mathbb{R}$ และ $R_g = \mathbb{R}$

เนื่องจาก $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ และ $R_g \cap D_f \neq \emptyset$ จึงมี $g \circ f$ และ $f \circ g$

$$\begin{aligned}
 \text{จาก } g \circ f(x) &= g(f(x)) &&= g(x+1) \\
 &&&= \sqrt{x+1} \\
 \text{ดังนั้น } g \circ f(x) &= \sqrt{x+1} \\
 \text{และ } D_{g \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} \mid x+1 \in [0, \infty)\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-1, \infty)\} \\
 &= [-1, \infty)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{จาก } f \circ g(x) &= f(g(x)) &&= f(\sqrt{x}) \\
 &&&= \sqrt{x} + 1 \\
 \text{ดังนั้น } f \circ g(x) &= \sqrt{x} + 1 \\
 \text{และ } D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\
 &= \{x \in [0, \infty) \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} \\
 &= [0, \infty)
 \end{aligned}$$

หมายเหตุ จากตัวอย่างที่ 4 สังเกตว่า $D_{g \circ f} \subset D_f$

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นสนใจและเตรียมความพร้อม

1. ผู้สอนทบทวนเรื่องการหาค่าของฟังก์ชันโดยใช้ตัวอย่างฟังก์ชัน $f(x) = x+3$ และ $g(x) = 4x-1$ แล้วให้ผู้เรียนหา $f(1)$, $f(-3)$, $f(a)$, $g(f(1))$, $g(f(-3))$, $g(f(a))$ และ $g(f(x))$ จากนั้นผู้สอนและผู้เรียนร่วมกันเฉลย



2. ผู้สอนบอกกับผู้เรียนว่า $g(f(x))$ ที่ได้จากตัวอย่างข้างต้น คือ ค่าของฟังก์ชัน g ที่ $f(x)$ ซึ่งในทางคณิตศาสตร์เรียกฟังก์ชันในลักษณะดังกล่าวว่า ฟังก์ชันประกอบ พร้อมทั้งบอกหัวเรื่องที่จะได้เรียนรู้ และแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้

ขั้นพัฒนาความรู้ความเข้าใจ

3. ผู้สอนอธิบายใบกิจกรรมเรื่องฟังก์ชันประกอบ จากนั้นมอบหมายให้ผู้เรียนตอบคำถามข้อ 1 (ข้อ 1.1 -1.3) ในใบกิจกรรม ในระหว่างผู้เรียนทำใบกิจกรรม ผู้สอนคอยแนะนำและช่วยเหลือ เมื่อผู้เรียนตอบคำถามข้อ 1 (ข้อ 1.1 -1.3) เสร็จเรียบร้อย ผู้สอนและผู้เรียนร่วมกันเฉลย

4. ผู้สอนให้ผู้เรียนสังเกตคำตอบของคำถามจากใบกิจกรรมข้อ 1.2 และ 1.3 จากนั้นใช้คำถามและการอธิบาย จนผู้เรียนได้ข้อสรุปว่าเซตของคู่อันดับ (x,z) ทั้งหมดในข้อ 1.3 เป็นฟังก์ชันจากโดเมนของฟังก์ชัน f ไปยังเรนจ์ของ g และบอกกับผู้เรียนว่าจะเขียนแทนฟังก์ชันนี้ด้วย $g \circ f$ นั่นคือ $g \circ f = \{(a,t),(b,e),(c,e)\}$ พร้อมทั้งเน้นให้ผู้เรียนเห็นเกี่ยวกับสมาชิกของ $g \circ f$ ว่า ถ้า $(x,z) \in g \circ f$ แล้วจะได้ว่า $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ นอกจากนั้นยังให้ข้อสังเกตว่า $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ จากนั้นให้ผู้เรียนจดบันทึกข้อสรุปและข้อสังเกต ลงในใบกิจกรรมข้อ 1.4

5. ผู้สอนมอบหมายให้ผู้เรียนตอบคำถามข้อ 2 (ข้อ 2.1 -2.3) ในใบกิจกรรม จากนั้นผู้สอนดำเนินการในทำนองเดียวกันกับขั้น 3 และ 4

6. ผู้สอนเชื่อมโยงข้อสรุปที่ได้บันทึกในใบกิจกรรมข้อ 1.4 แล้วนำมาสรุปเป็นบทนิยามของฟังก์ชันประกอบ จากนั้นอธิบายเพิ่มเติมโดยเน้นให้ผู้เรียนเห็นว่า ถ้ากำหนดฟังก์ชัน f และ g มาให้ จะหาฟังก์ชัน $g \circ f$ ได้ ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิก x ในโดเมนของฟังก์ชัน f ที่ทำให้ $f(x)$ อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน g หรือกล่าวได้ว่า $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ จากนั้นผู้สอนสรุปแนวทางการพิจารณาว่ามีฟังก์ชัน $g \circ f$ เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f และ g มาให้ จะต้องพิจารณาก่อนว่า $R_f \cap D_g \neq \emptyset$

7. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 1 แล้วให้ผู้เรียนหา D_f, R_f, D_g, R_g ผู้สอนเขียนสิ่งที่ผู้เรียนคิดบนกระดานดำ จากนั้นให้ผู้เรียนพิจารณาว่ามีฟังก์ชัน $g \circ f$ และมีฟังก์ชัน $f \circ g$ พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลประกอบ ถ้ามีฟังก์ชัน $g \circ f$ และมีฟังก์ชัน $f \circ g$ ผู้สอนให้ผู้เรียนหา $g \circ f$ และ $f \circ g$ นั้น จากนั้นผู้สอนและผู้เรียนร่วมกันเฉลย ผู้สอนตั้งข้อสังเกตให้ผู้เรียนเห็นว่า $g \circ f \neq f \circ g$ จากนั้นเปิดโอกาสให้ผู้เรียนซักถามเกี่ยวกับสิ่งที่ไม่เข้าใจหรือมีข้อสงสัย หากมีคำถามผู้สอนอธิบายเพิ่มเติม

8. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 2 แล้วให้ผู้เรียนลงมือทำด้วยตนเอง โดยผู้สอนคอยแนะนำและช่วยเหลือ จากนั้นผู้สอนสุ่มผู้เรียนมา 1 คน ออกมาแสดงวิธีทำ จากนั้นเปิดโอกาสให้ผู้เรียนคนอื่น ๆ ช่วยกันตรวจสอบความถูกต้องของการแสดงวิธีทำดังกล่าว รวมทั้งแสดงความคิดเห็นเพิ่มเติม ผู้สอนจากนั้นผู้สอนเปิดโอกาสให้ผู้เรียนซักถามเกี่ยวกับสิ่งที่ไม่เข้าใจหรือมีข้อสงสัย ผู้สอนตั้งข้อสังเกตเกี่ยวกับฟังก์ชัน f และ g ที่กำหนดตัวอย่างที่ 2 โดยเน้นให้ผู้เรียนเห็นว่า ฟังก์ชัน f และ g ที่กำหนดให้ จะไม่มี $f \circ g$ เนื่องจาก $R_g \cap D_f = \emptyset$

9. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 3 แล้วให้ผู้เรียนหา D_f, R_f, D_g, R_g ผู้สอนเขียนสิ่งที่ผู้เรียนคิดบนกระดานดำ จากนั้นให้ผู้เรียนพิจารณาว่ามีฟังก์ชัน $g \circ f$ และมีฟังก์ชัน $f \circ g$ พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลประกอบ ผู้สอนแสดงวิธีการหา $g \circ f$ และ $f \circ g$ รวมถึงการหาโดเมนของ $g \circ f$ และ $f \circ g$ โดยใช้การถามตอบและการอธิบาย รวมถึงเปิดโอกาสให้ผู้เรียนซักถามเกี่ยวกับสิ่งที่ไม่เข้าใจหรือมีข้อสงสัย หากมีคำถามผู้สอนอธิบายเพิ่มเติม

10. ผู้สอนยกตัวอย่างที่ 4 แล้วให้ผู้เรียนแต่ละคนลงมือแสดงวิธีทำ โดยผู้สอนคอยแนะนำและช่วยเหลือ จากนั้นผู้สอนและผู้เรียนร่วมกันเฉลย

11. ผู้สอนตั้งข้อสังเกตเกี่ยวกับตัวอย่างที่ 3 และ ตัวอย่างที่ 4 โดยเน้นให้ผู้เข้ารับการอบรมเห็นว่า ในตัวอย่างที่ 3 สังเกตได้ว่า $D_{g \circ f} = D_f$ และ $D_{f \circ g} = D_g$ ส่วนตัวอย่างที่ 4 สังเกตได้ว่า $D_{g \circ f} \subset D_f$ พร้อมทั้งเน้นย้ำกับผู้เรียนว่า โดยทั่วไป $D_{g \circ f}$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ D_f จึงได้เน้นย้ำว่า ในการหา $D_{g \circ f}$ จะพิจารณาจาก D_f อย่างเดียวไม่ได้ จะต้องพิจารณาจาก D_g ด้วยโดยพิจารณา $x \in D_f$ ที่ทำให้ $f(x) \in D_g$

ขั้นสรุปความรู้

12. ผู้สอนและผู้เรียนร่วมกันสรุปความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันประกอบ โดยเน้นในเรื่องเงื่อนไขที่ทำให้มีฟังก์ชัน $g \circ f$ วิธีการหาฟังก์ชัน $g \circ f$ (ถ้ามี) และวิธีการหาโดเมนของฟังก์ชัน $g \circ f$ รวมถึงเน้นย้ำว่าเงื่อนไขที่ทำให้มีฟังก์ชัน $g \circ f$ กับมีฟังก์ชัน $f \circ g$ ไม่เหมือนกัน ดังนั้นจึงควรระมัดระวัง นอกจากนั้น ยังให้ข้อสังเกตต่างๆ คือ $g \circ f$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $f \circ g$ และโดเมนของ $f \circ g$ อาจเท่ากับโดเมนของ f หรือเป็นสับเซตของโดเมนของ f

ขั้นฝึกการนำไปใช้

13. ผู้สอนมอบหมายให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัด 2.3.2 ในหนังสือเรียน ข้อที่ 3 ทำเฉพาะข้อคู่ เป็นการบ้าน และกำหนดส่งในวันถัดไป

1.4 เมื่อผู้สอนตรวจแบบฝึกหัดที่มอบหมายผู้เรียนทำเสร็จเรียบร้อยแล้ว ผู้สอนนำข้อผิดพลาดต่าง ๆ มาเน้นย้ำและอธิบายเพิ่มเติม

สื่อการเรียนรู้/ แหล่งการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรม เรื่อง ฟังก์ชันประกอบ
2. หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6

การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. การสังเกตจากการตอบคำถามในชั้นเรียน	
2. การสังเกตจากการทำใบกิจกรรมและตัวอย่างที่มอบหมายในชั้นเรียน	
3. การตรวจแบบฝึกหัด	



บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

.....

.....

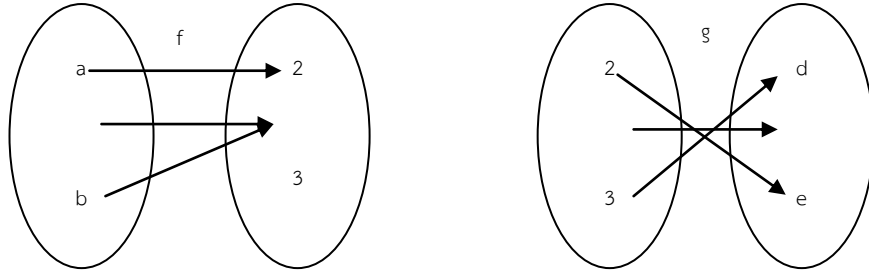
.....

.....

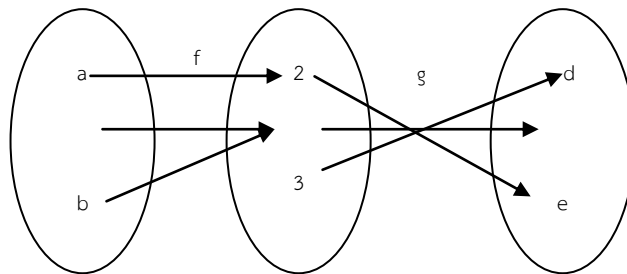


ใบกิจกรรมเรื่อง ฟังก์ชันประกอบ

1. กำหนดฟังก์ชัน f และ g แสดงดังแผนภาพ



จากแผนภาพข้างต้น เขียนแผนภาพใหม่



จากข้อมูลข้างต้น จงตอบคำถามแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1 จงหา $g(f(a))$, $g(f(b))$ และ $g(f(c))$

วิธีคิด

.....

1.2 จงหาคู่อันดับ (x,z) ทั้งหมดที่สอดคล้องเงื่อนไขว่า $x \in D_f$, $(x,y) \in f$ และ $(y,z) \in g$

วิธีคิด

.....

.....

1.3 เซตของคู่อันดับ (x,z) ทั้งหมด ที่กล่าวถึงในข้อ 1.2 เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด

.....

.....

.....

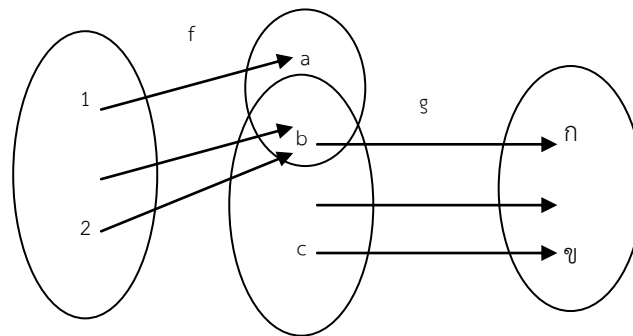
1.4 บันทึกเพิ่มเติม

.....

.....

.....

2. กำหนดฟังก์ชัน f และ g แสดงดังแผนภาพ



จากข้อมูลข้างต้น จงตอบคำถามแต่ละข้อต่อไปนี้

2.1 จงหา $g(f(1))$, $g(f(2))$ และ $g(f(3))$

วิธีคิด

2.2 จงหาคู่อันดับ (x,z) ทั้งหมดที่สอดคล้องเงื่อนไขว่า $x \in D_f$, $(x,y) \in f$ และ $(y,z) \in g$

วิธีคิด

2.3 เซตของคู่อันดับ (x,z) ทั้งหมด จากข้อ 2.2 เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด

.....

2.4 บันทึกเพิ่มเติม

.....

ข้อสรุป

เอกสารสำหรับวิทยากร

เฉลยใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง จับความจริงฟังก์ชัน

คำชี้แจง จงศึกษาใบความรู้ที่ 1 และหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 แล้วตอบคำถามแต่ละข้อต่อไปนี้

1) ฟังก์ชันแตกต่างจากความสัมพันธ์อย่างไร

แนวการตอบ

ความสัมพันธ์ หรือ ความสัมพันธ์ r จาก A ไป B คือ สับเซตของ $A \times B$ โดยสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังของ r มีความเกี่ยวข้องกันภายใต้กฎเกณฑ์อย่างใดอย่างหนึ่ง

ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่งสำหรับคู่อันดับสองคู่ใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้วสมาชิกตัวหลังต้องไม่ต่างกัน

2) **สถานการณ์** สมชายทานยาชนิดหนึ่งจำนวน 1 เม็ด โดยปริมาณยาในกระแสเลือดของสมชายในช่วง 10 ชั่วโมงแรกหลังจากรับประทานยาเข้าไป แสดงดังตารางข้างล่าง

ระยะเวลา (ชั่วโมง)	เริ่มต้น	2	4	6	8	10
ปริมาณยาในกระแสเลือด (มิลลิกรัม)	500	250	125	62.5	31.25	16.125

สถานการณ์ข้างต้น เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันชนิดใด

แนวการตอบ

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

3) ฟังก์ชันจาก A ไป B **ไม่เป็น**ฟังก์ชัน 1 - 1 และ ฟังก์ชันจาก A ไป B **ไม่เป็น**ฟังก์ชันทั่วถึง หมายความว่าอย่างไร

แนวการตอบ

ถ้า f เป็น ฟังก์ชันจาก A ไป B และ f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 หมายความว่า มี x_1, x_2 ใน A ที่ $x_1 \neq x_2$ และ $f(x_1) = f(x_2)$

ถ้า f เป็น ฟังก์ชันจาก A ไป B และ f ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง หมายความว่า มี y ใน B ซึ่ง $f(x) \neq y$ สำหรับทุก x ใน A

4) จริงหรือไม่ที่ว่า ฟังก์ชันใด ๆ จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือ เป็นฟังก์ชันลด อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น
จงอธิบายพร้อมยกตัวอย่างประกอบ

แนวการตอบ

ไม่จริงเสมอไป เช่น ฟังก์ชันขั้นบันได ซึ่งไม่เป็นทั้งฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด



5) จริงหรือไม่ที่ว่า เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f และ g มาให้ จะมีฟังก์ชัน $f+g$ และ fg เสมอ

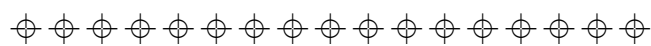
แนวการตอบ ไม่จริงเสมอไป เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f และ g มาให้ จะมีฟังก์ชัน $f+g$ หรือ มีฟังก์ชัน fg จะต้องนิยามเซตคือ $D_f \cap D_g$ ไม่เท่ากับเซตว่าง

6) ตัวผกผันของฟังก์ชัน และฟังก์ชันผกผัน แตกต่างกันอย่างไร และสัญลักษณ์ f^{-1} กับ $f^{-1}(x)$ เหมือนหรือต่างกันอย่างไร

แนวการตอบ

ตัวผกผันของฟังก์ชัน อาจจะเป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชัน ส่วนฟังก์ชันผกผัน คือตัวผกผันของฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันด้วย

สัญลักษณ์ f^{-1} และ $f^{-1}(x)$ ต่างกัน กล่าวคือ สัญลักษณ์ f^{-1} แทนตัวผกผันของฟังก์ชันซึ่งอาจจะเป็นหรือไม่เป็นฟังก์ชันก็ได้ ส่วนสัญลักษณ์ $f^{-1}(x)$ แทนค่าของ f^{-1} ที่ x



เฉลยใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง จัขโฃย

สถานการณ์ ในงานแสดงแพชชันโชว์นาฟิกาฝั่งเพชรมูลค่านับสิบล้านบาท เมื่องานเลิก ปรากฏว่ามีนาฟิกาเรือนหนึ่งหายไป เจ้าของงานสงสัยในทีมงาน 4 คน จึงเชิญให้ตำรวจมาไต่สวนผู้ถูกกล่าวหาทั้งสี่ ตำรวจทำการไต่สวนโดยขอให้พูด 3 ประโยค หากคำให้การของใครเป็นเท็จ 2 ใน 3 จะตกเป็นผู้ต้องสงสัยขโมยนาฟิกาเรือนดังกล่าว คำให้การของบุคคลทั้งสี่แสดงดังตาราง

ผู้ถูกกล่าวหา	คำให้การ	พิจารณาคำให้การ
สมปอง	1.1 ตัวอย่างความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นฟังก์ชัน คือ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mid y^2 = x\}$ 1.2 $f(x)$ เป็นสัญลักษณ์แทนฟังก์ชัน 1.3 หากลากเส้นตรงที่ขนานกับแกน X เพียงเส้นเดียวแล้วมีจุดตัดเพียงจุดเดียว จะสามารถสรุปได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดเป็นฟังก์ชัน 1 - 1 ได้	1.1 เท็จ 1.2 เท็จ 1.3 เท็จ
สมชาย	2.1 ถ้า $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = 2x + 1\}$ แล้วเรนจ์ของ r คือ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 2.2 ถ้า $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{2x + 1}\}$ แล้วเรนจ์ของ r คือเซตของจำนวนจริงบวก 2.3 ถ้า $r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} \right\}$ แล้วเรนจ์ของ r คือ $(-3, 3)$	2.1 เท็จ 2.2 จริง 2.3 เท็จ
สมหมาย	3.1 ฟังก์ชัน $f \subset A \times B$ กับ ฟังก์ชัน f จากเซต A ไปทั่วถึงเซต B คือสิ่งเดียวกัน 3.2 ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ และ $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปทั่วถึงเซต B 3.3 ถ้าฟังก์ชัน $f(x) = x^2$, $x > 0$ แล้ว f เป็นฟังก์ชัน 1 - 1	3.1 จริง 3.2 จริง 3.3 จริง
สมหญิง	4.1 เรนจ์ของ $f(x) = 2^x$ มีเรนจ์ คือ $[0, \infty)$ 4.2 กราฟของ $f(x) = -4x^2$ มีลักษณะเป็นพาราโบลาหงาย 4.3 ฟังก์ชันขั้นบันได ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด	4.1 เท็จ 4.2 เท็จ 4.3 จริง

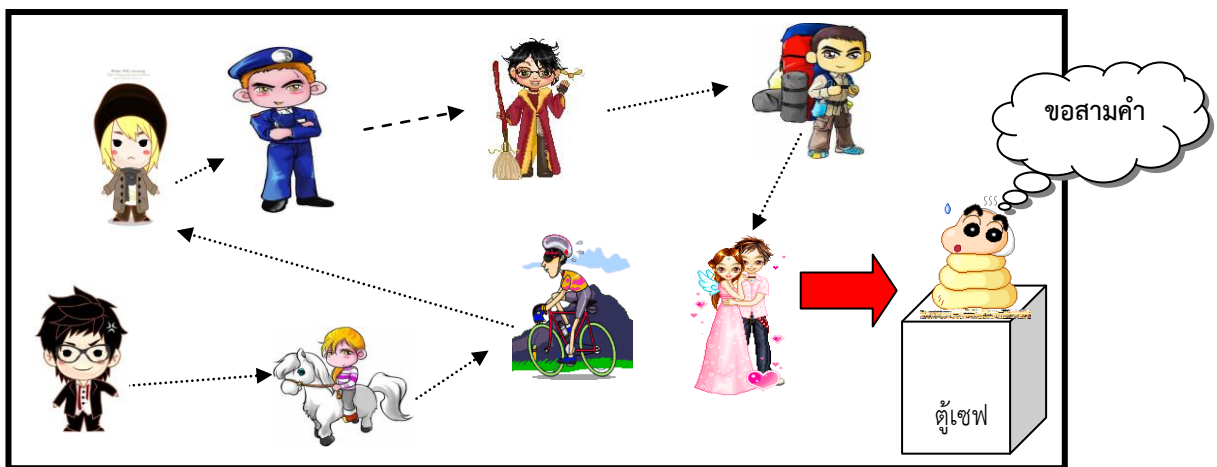
สรุปได้ว่า ผู้ต้องสงสัยขโมยนาฟิกา คือ สมปอง สมชาย หรือสมหญิง



เฉลยใบกิจกรรมที่ 3 เรื่อง ขอสามคำ

สถานการณ์ เคนอิจิ ต้องการเปิดตู้เซฟแต่เขาไม่มีรหัส จึงได้ไปปรึกษากับผู้รู้คือ ชินจัง แต่ชินจังไม่บอกรหัสตรง ๆ แต่มีเงื่อนไขคือ ขอให้เคนอิจิพูดประโยคที่มีสามคำที่เขาถูกใจก่อน เขาจึงจะบอกรหัสเปิดตู้เซฟให้

นอกจากนั้น ชินจังยังแนะนำเกี่ยวกับการได้มาซึ่ง “ประโยคที่มีสามคำที่เขาถูกใจ” โดยให้เคนอิจิไปพูดคุยกับผู้คนหลากหลาย แต่ควรระมัดระวังคำพูดของผู้คนเหล่านั้นด้วย เนื่องจากจะมีคำพูดที่เป็นจริง หรือเป็นเท็จผสมผสานกันไป หากนำตัวอักษรภาษาอังกฤษที่กำกับไว้กับคำพูดที่เป็นจริงของผู้คนต่าง ๆ มาเรียงเรียงจะได้ “คำสามคำ” ที่ชินจังถูกใจ



เฉลย “คำสามคำ” ที่ชินจังถูกใจ คือ “I LOVE MATH”

สำหรับข้อความที่เป็นจริงในบทสนทนาระหว่างเคนอิจิ กับผู้คนต่าง ๆ รายละเอียดในหน้าถัดไป

บทสนทนาระหว่างเคนอิจิ กับ ผู้คนต่าง ๆ



กำหนด $f(x) = x^2 - 7$

และ $g(x) = 5 - x^2$

$(f \circ g)(1) = 9$

I



พระเอกขี่ม้าขาว



กำหนด $f(x+3) = 5x+4$

และ $(f \circ g)(x) = x+4$

$f(3) = 4$

L



นักปั่นน้องเหล็ก

$g(x) = \frac{x+15}{5}$

V

$(f \cdot g)(5) = 56$

O



เคนทาโร



กำหนด $f(x) = 2x+1$

และ $(g \circ f)(x) = 2x+1$

$g(x) = x$

E

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$

M



ตำรวจตรวจแลก



กำหนดฟังก์ชัน f และ g โดยที่
 $f(10) = 36$ และ $g(10) = 24$

$(f - g)(10) = 12$

A

ข้อมูลไม่เพียงพอสำหรับหา $g \circ f(10)$

T



นักเดินทาง



แม่มดน้อย



กำหนด $f(x) = x^2 - 9$

และ $g(x) = x+3$

$\left(\frac{f}{g}\right)(-3)$ ไม่มีความหมาย

H



คู่รักต่างวัย



เฉลยใบกิจกรรมที่ 4 เรื่อง ลากรมาเกย

สถานการณ์ สมพรกับครอบครัวเข้าร่วมแข่งขันรายการลากรมาเกย กติกาของการแข่งขัน คือ สมพรจะต้องตอบคำถามที่รายการกำหนดทั้งหมด 8 ข้อให้ถูกต้อง โดยคำถามเป็นแบบคำถามถูกผิด จึงจะได้รยยนต์ซีดานหนึ่งคัน สำหรับคำตอบของสมพรกับครอบครัวมีดังนี้

- ☒ 1. ตัวผกผันของฟังก์ชัน คือ ฟังก์ชันผกผัน
 - ☒ 2. ถ้ากำหนด f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ แล้ว $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$
 - ☒ 3. ถ้ากำหนด f เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(a) = b$ แล้ว $f^{-1}(b) = a$
 - ☒ 4. ถ้าฟังก์ชัน $g(x) = 2x$ แล้ว $g^{-1}(24) = 12$
 - ☒ 5. ถ้ากำหนด $g \circ f(x) = 2x + 8$ และ $g(x) = 2x$ แล้ว $f^{-1}(20) = 24$
 - ☒ 6. ถ้ากำหนดให้ $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$ แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชัน
 - ☒ 7. ถ้ากำหนดให้ $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x|\}$ แล้วจะมีฟังก์ชัน g ซึ่ง $g \subset f$ และ g^{-1} เป็นฟังก์ชัน
 - ☒ 8. ถ้ากำหนดให้ $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3^x\}$ แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

จงตรวจสอบว่าสมพรและครอบครัวจะได้รยยนต์ซีดานจากรายการได้หรือไม่ พร้อมอธิบายเหตุผล

เฉลย สมพรและครอบครัวตอบคำถามถูกต้องไม่ครบทั้ง 8 คำถาม โดยมีข้อที่ตอบผิดคือ

คำถามข้อ 2 ข้อ 3 และ ข้อ 5

ดังนั้น สมพรและครอบครัวไม่ได้รยยนต์ซีดาน

เฉลยใบงานที่ 1 เรื่อง สรุปอย่างไร

สถานการณ์ จากการสัมภาษณ์ของบุคคลต่าง ๆ เกี่ยวกับเนื้อหาเรื่องฟังก์ชัน พบว่า คนต่าง ๆ เหล่านั้นให้ข้อมูลซึ่งสรุปได้ดังนี้



เคนจิ

เมื่อกล่าวถึง “ฟังก์ชัน” จะหมายถึง ฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต B และไม่มีตัวอย่างของฟังก์ชันที่เป็นทั้งฟังก์ชัน $1 - 1$ และฟังก์ชันทั่วถึง



เคนทาโร

สัญลักษณ์ f และ $f(x)$ แทนสิ่งเดียวกัน เช่นเดียวกับ สัญลักษณ์ f^{-1} และ $f^{-1}(x)$ ที่แทนสิ่งเดียวกัน และสัญลักษณ์ $f^{-1}(x)$ หมายถึง $\frac{1}{f(x)}$
นอกจากนี้ $f \circ g$ กับ fg คือ สัญลักษณ์ที่แทนสิ่งเดียวกัน



ตำรวจตรวจหลัก

เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f และ g ใด ๆ มาให้ จะมีฟังก์ชัน $f + g$, $f - g$, fg , $\frac{f}{g}$ เสมอ
นอกจากนั้นเมื่อ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ สามารถสรุปได้ว่ามีฟังก์ชัน $g \circ f$



นักเดินทาง

การหาโดเมนของฟังก์ชัน $g \circ f$ ทำได้โดยหาโดเมนของฟังก์ชัน f
เนื่องจาก $D_{g \circ f} = D_f$ ส่วนการหาโดเมนของฟังก์ชัน $\frac{f}{g}$ ทำได้โดยหาโดเมนของฟังก์ชัน f และโดเมนของฟังก์ชัน g แล้วนำมาอินเตอร์เซกชันกัน



คู่รักต่างวัย

ตัวผกผันของฟังก์ชัน f ไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชัน เงื่อนไขที่ทำให้ตัวผกผันของฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชัน คือ f ต้องเป็นฟังก์ชันทั่วถึง

คำถาม จงพิจารณาว่า ข้อมูลของแต่ละคนข้างต้น มีส่วนใดที่ไม่เป็นจริงบ้าง และจะแก้ไขให้ถูกต้องอย่างไร โดยเติมรายละเอียดในช่องว่างที่กำหนดไว้ให้

แนวการตอบ

1) ข้อมูลของเคนอิจิ

ส่วนที่ไม่เป็นจริง คือ ฟังก์ชัน หมายถึง ฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต B

แก้ไขให้ถูกต้อง คือ

ฟังก์ชัน กับ ฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต B ไม่ใช่สิ่งเดียวกัน กล่าวคือ

ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่งสำหรับคู่อันดับสองคู่อันดับใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้วสมาชิกตัวหลังต้องไม่ต่างกัน

ฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต B คือ ฟังก์ชันที่มีสมบัติว่า “โดเมนคือเซต A และเรนจ์เป็นสับเซตของ B”

2) ข้อมูลของเคนทาโร

ส่วนที่ไม่เป็นจริง

- 1) สัญลักษณ์ f และ $f(x)$ แทนสิ่งเดียวกัน
- 2) สัญลักษณ์ f^{-1} และ $f^{-1}(x)$ ที่แทนสิ่งเดียวกัน
- 3) สัญลักษณ์ $f^{-1}(x)$ หมายถึง $\frac{1}{f(x)}$
- 4) $f \circ g$ กับ fg คือ สัญลักษณ์ที่แทนสิ่งเดียวกัน

แก้ไขให้ถูกต้อง

1) สัญลักษณ์ f หมายถึงชื่อของฟังก์ชัน ส่วนสัญลักษณ์ $f(x)$ แทนค่าของฟังก์ชัน f ที่ x

2) สัญลักษณ์ f^{-1} แทนตัวผกผันของฟังก์ชันซึ่งอาจจะเป็นหรือไม่เป็นฟังก์ชันก็ได้

ส่วนสัญลักษณ์ $f^{-1}(x)$ แทนค่าของ f^{-1} ที่ x

3) สัญลักษณ์ $f^{-1}(x)$ กับ $\frac{1}{f(x)}$ มีความหมายไม่เหมือน $\frac{1}{f(x)}$ หมายถึง

ส่วนกลับของค่าของฟังก์ชัน f ที่ x

4) $f \circ g$ หมายถึง ฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชัน f และ g นิยามโดย

$f \circ g(x) = f(g(x))$ สำหรับ fg หมายถึง ผลคูณของฟังก์ชัน f และ g นิยามโดย $fg(x) = f(x)g(x)$

3) ข้อมูลของตำรวจตรวจแหก

ส่วนที่ไม่เป็นจริง คือ เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f และ g ใด ๆ มาให้ สามารถหาฟังก์ชัน

$f+g, f-g, fg, \frac{f}{g}$ ได้เสมอ

แก้ไขให้ถูกต้อง ดังนี้

เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f และ g ใด ๆ มาให้ จะมีฟังก์ชัน $f+g, f-g, fg$ เมื่อ $D_f \cap D_g \neq \emptyset$

ส่วนจะมีฟังก์ชัน $\frac{f}{g}$ เมื่อ $D_f \cap D_g \neq \emptyset$ โดย $x \in D_g$ สอดคล้องเงื่อนไข $g(x) \neq 0$

4) ข้อมูลของนักเดินทาง

ส่วนที่ไม่เป็นจริง คือ 1) การหาโดเมนของฟังก์ชัน $g \circ f$ ทำได้โดยหาโดเมนของฟังก์ชัน f

เนื่องจาก $D_{g \circ f} = D_f$ เสมอ และ 2) การหาโดเมนของฟังก์ชัน $\frac{f}{g}$ ทำได้โดยหาโดเมนของฟังก์ชัน f และ

โดเมนของฟังก์ชัน g แล้วนำมาอินเตอร์เซกชันกัน

แก้ไขให้ถูกต้อง ดังนี้

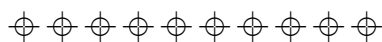
1) โดยทั่วไปแล้ว $D_{g \circ f}$ อาจเท่ากับหรือเป็นสับเซตของ D_f จึงได้ว่า การหาโดเมนของฟังก์ชัน $g \circ f$ จึงพิจารณาจาก D_f อย่างเดียวไม่ได้ แต่ต้องพิจารณาจาก D_g ด้วยโดยพิจารณา $x \in D_f$ ที่ทำให้ $f(x) \in D_g$

2) การหาโดเมนของฟังก์ชัน $\frac{f}{g}$ ทำโดยหา $D_f \cap D_g$ ที่ไม่รวม $x \in D_g$ ที่ทำให้ $g(x) = 0$

5) ข้อมูลของคู่รักต่างวัย

ส่วนที่ไม่เป็นจริง คือ เงื่อนไขที่ทำให้ตัวผกผันของฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชัน คือ f ต้องเป็นฟังก์ชันทั่วถึง

แก้ไขให้ถูกต้อง คือ เงื่อนไขที่ทำให้ตัวผกผันของฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชัน คือ f ต้องเป็นฟังก์ชัน



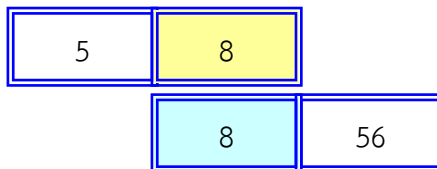
เฉลยใบงานที่ 2 เรื่อง โดมิโนพาเพลิน

- คำชี้แจง**
- กำหนดโดมิโนสี่ตัวคือ A, B, C และ D ซึ่งแต่ละตัวจะสัมพันธ์กับจำนวนจริงสองจำนวน
 - หากนำโดมิโนที่กำหนดทั้งสองมาต่อกัน จะสามารถต่อกันได้ครบทุกตัวหรือไม่ หากไม่ครบทั้งสี่ตัว เหลือโดมิโนตัวใด
 - โดมิโนสองตัวที่สามารถต่อกันได้ เมื่อมีอย่างน้อย 1 จำนวนที่มีค่าเท่ากัน

ตัวอย่าง 1 โดมิโนสองตัวที่มีจำนวนที่เท่ากัน 1 จำนวน เช่น



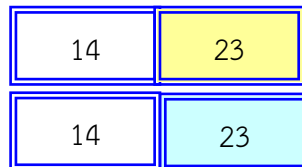
ลักษณะการต่อทำได้ดังนี้



ตัวอย่าง 2 โดมิโนสองตัวที่มีจำนวนที่เท่ากันสองจำนวน เช่น



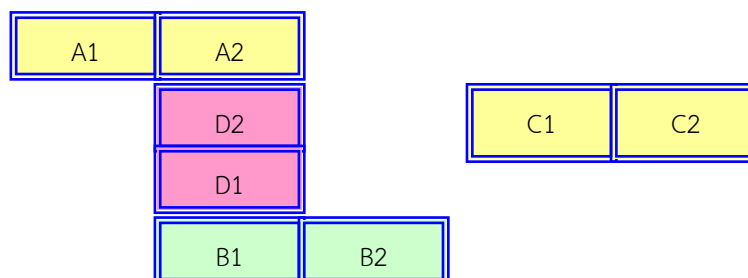
ลักษณะการต่อทำได้ดังนี้



ตัวอย่าง 3 โดมิโนสองตัวที่ไม่สามารถต่อกันได้ เช่น



เฉลย มีโดมิโนสามตัวที่สามารถต่อกันได้ คือ A, B และ D ลักษณะการต่อมีดังนี้



A

A1 $f(4) = 19$ เมื่อกำหนด $f(x+3) = 4x+3$	A2 $f^{-1}(9) = 25$ เมื่อกำหนด $f(x) = \frac{x}{5} + 4$
---	---

B

B1 $\frac{f}{g}(3) = 2$ เมื่อกำหนด $f(x) = x^2 - 1$ และ $g(x) = x + 1$	B2 $(fg)(5) = 36$ เมื่อกำหนด $f^{-1}(x+2) = 2x+1$ และ $(f \circ g)(x) = x+1$
---	---

C

C1 $(g \circ f)(12) = 4$ เมื่อ f และ g เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(12) = 20$ และ $f(12) = 20$	C2 $(f \circ g)(a) = 16$ เมื่อ f และ g เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(24) = 16$ และ $g^{-1}(24) = a$
---	---

D

D1 $4a^2 = 2$ เมื่อ a สอดคล้องกับสมการ $(g \circ f)(a) = (f \circ g)(a)$ โดยที่ $f(x) = x^2 + 1$ และ $g(x) = 2x$	D2 $ac + bd = 25$ เมื่อ $[a, b] = D_r$ และ $[c, d] = R_r$ โดยที่ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{25 - x^2}\}$
--	--



เฉลยแบบตรวจสอบความเข้าใจ เรื่อง ฟังก์ชัน

- คำชี้แจง** 1. แบบตรวจสอบความเข้าใจเรื่องฟังก์ชันมีคำถาม 5 ข้อ
2. แต่ละคำถาม จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องเพียงข้อเดียว

1. ข้อใดกล่าวถูกต้อง

1. ความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x|\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน
2. ฟังก์ชัน $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$ เป็นฟังก์ชัน 1 - 1
3. $D_{\frac{f}{g}} = D_f$
4. ถ้า $R_f \cap D_g = \{1, 2, 3\}$ แล้วมีฟังก์ชัน $g \circ f$

เฉลย ข้อ 4

2. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

1. ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ และ $f = \{(x, y) \in A \times A \mid y = 2x - 3\}$
แล้ว f เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปเซต B
2. ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, $B = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$ และ $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 4x\}$
แล้ว f เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปทั่วถึงเซต B

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. ก และ ข ถูก
2. ก และ ข ผิด
3. ก ถูก และ ข ผิด
4. ก ผิด และ ข ถูก

เฉลย ข้อ 4

3. กำหนดฟังก์ชัน f และ g โดยที่ $f(a) = 9$ และ $g^{-1}(12) = a$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. $f^{-1}(9) = a$
- ข. g เป็นฟังก์ชัน 1 - 1
- ค. $(f \circ g)(a) = 108$

ข้อความใดบ้างเป็นจริง

1. ข้อ ก และ ข้อ ข
2. ข้อ ก และ ข้อ ค
3. ข้อ ข และ ข้อ ค
4. ข้อ ข เท่านั้น

เฉลย ข้อ 4

4. กำหนดฟังก์ชัน f และ g โดยที่ $g(x+2) = 2x+3$ และ $(g^{-1} \circ f)(x) = 6x+2$

ข้อใด ไม่ถูกต้อง

- | | |
|--------------------|-----------------------------|
| 1. $g^{-1}(7) = 4$ | 2. $(g \circ f)(0) = 3$ |
| 3. $(f+g)(2) = 30$ | 4. $(f \cdot g)(3.5) = 252$ |

เฉลย ข้อ 2

5. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. กราฟของ $y_1 = 2^x - 5$ มีรูปร่างเหมือนกราฟของ $y_2 = 2^x$ แต่อยู่ในตำแหน่งที่เลื่อนลงข้างล่าง

5 หน่วย

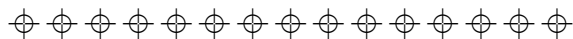
ข. กราฟของ $y_1 = (x-3)^2$ มีรูปร่างเหมือนกราฟของ $y_2 = x^2$ แต่อยู่ในตำแหน่งที่เลื่อนไปทางซ้าย

3 หน่วย

ข้อใดต่อไปนี้ เป็นจริง

- | | |
|--------------------|--------------------|
| 1. ก และ ข ถูก | 2. ก และ ข ผิด |
| 3. ก ถูก และ ข ผิด | 4. ก ผิด และ ข ถูก |

เฉลย ข้อ 3



แบบประเมินการมีส่วนร่วมในกิจกรรม

คำชี้แจง : ให้เขียนเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องตามความเห็นของท่านที่ตรงกับความเป็นจริงมากที่สุด

ที่	ชื่อ-สกุล	ความร่วมมือในกิจกรรม	ความรับผิดชอบ	การเสนอความคิดเห็น	ความริเริ่มสร้างสรรค์	การเป็นผู้นำหรือผู้ตามที่ดี	การตรงเวลา	รวม (2 คะแนน)
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								

เกณฑ์การให้คะแนน

- ได้ 2 คะแนน เมื่อมีเครื่องหมาย ✓ ครบ 4-6 ข้อ
 ได้ 1 คะแนน เมื่อมีเครื่องหมาย ✓ อยู่ 1-3 ข้อ
 ได้ 0 คะแนน เมื่อไม่มีเครื่องหมาย ✓ อยู่เลย

ลงชื่อ.....วิทยากร
 วันที่ประเมิน.....

แบบประเมินการนำเสนอผลงาน

คำชี้แจง : ให้เขียนเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องตามความเห็นของท่านที่ตรงกับความเป็นจริงมากที่สุด

ที่	ชื่อ-สกุล	ความครอบคลุมเนื้อหา	ความถูกต้องตรงประเด็น	การเสนอความคิดเห็น	แนวทางประยุกต์สู่การปฏิบัติ	การเป็นผู้นำหรือผู้ตามที่ดี	การตรงเวลา	รวม (15 คะแนน)
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								

เกณฑ์การให้คะแนน

- ได้ 15 คะแนน เมื่อมีเครื่องหมาย ✓ ครบ 6 ข้อ
- ได้ 13 คะแนน เมื่อมีเครื่องหมาย ✓ อยู่ 5 ข้อ
- ได้ 12 คะแนน เมื่อมีเครื่องหมาย ✓ อยู่ 4 ข้อ
- ได้ 10 คะแนน เมื่อมีเครื่องหมาย ✓ อยู่ 3 ข้อ
- ได้ 8 คะแนน เมื่อมีเครื่องหมาย ✓ อยู่ 2 ข้อ
- ได้ 6 คะแนน เมื่อมีเครื่องหมาย ✓ อยู่ 1 ข้อ
- ได้ 0 คะแนน เมื่อไม่มีเครื่องหมาย ✓ อยู่เลย

ลงชื่อ.....วิทยากร
วันที่ประเมิน.....



เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์

แผนการอบรม

แผนการอบรมครูคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สำหรับครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่

เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์

เวลา 2 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์ เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรม

1. มีความรู้ ความเข้าใจในเรื่องการให้เหตุผลและการพิสูจน์
2. มีความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับความเข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการให้เหตุผลและการพิสูจน์
3. สามารถออกแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ และให้แนวทางการจัดการเรียนรู้ เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์

สาระการเรียนรู้

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (inductive reasoning)
2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (deductive reasoning)
3. วิธีการพิสูจน์ที่เป็นพื้นฐาน

สาระสำคัญ

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย หมายถึง วิธีการสรุปผลในการค้นหาความจริงจากการสังเกตหรือการทดลองหลาย ๆ ครั้งจากกรณีย่อย ๆ แล้วนำมาสรุปเป็นข้อความคาดการณ์ (conjecture)

2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย หมายถึง วิธีการสรุปข้อเท็จจริงซึ่งเป็นผลมาจากเหตุ หรือ สมมติฐาน ซึ่งเป็นความรู้พื้นฐาน อาจเป็นความเชื่อ ข้อตกลง กฎ หรือบทนิยาม ที่เป็นสิ่งที่รู้มาก่อนและยอมรับว่าเป็นจริง ในการให้เหตุผลแบบนิรนัย ผลหรือข้อสรุปจะต้อง ก่อต่อเมื่อ

- 1) ยอมรับว่าเหตุเป็นจริงทุกข้อ
- 2) การสรุปผลสมเหตุสมผล

3. การตรวจสอบว่าข้อสรุปสมเหตุสมผลหรือไม่ วิธีการหนึ่งคือการเขียนแผนภาพตามเหตุ หรือ สมมติฐานที่เป็นไปได้

- 1) ถ้าแผนภาพที่เขียนมีกรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณีแสดงผลตามที่กำหนดไว้ การสรุปผลนั้น สมเหตุสมผล
- 2) ถ้าแผนภาพที่เขียนมีแผนภาพอย่างน้อยหนึ่งกรณีที่ไม่แสดงผลตามที่กำหนดไว้ การสรุปผลนั้น ไม่สมเหตุสมผล



วิธีการที่ใช้ตรวจสอบความสมเหตุสมผล เรียกว่า การอ้างเหตุผลโดยใช้ตรรกบทของตรรกศาสตร์ (syllogistic logic)

ข้อความที่ใช้ในการอ้างเหตุผลมี 4 แบบ

- 1) สมาชิกของ A ทุกตัว เป็นสมาชิกของ B
- 2) ไม่มีสมาชิกของ A ตัวใด เป็นสมาชิกของ B
- 3) สมาชิกบางตัวของ A เป็นสมาชิกของ B
- 4) สมาชิกของ A บางตัว ไม่เป็นสมาชิกของ B

หมายเหตุ แผนภาพที่ใช้ตรวจสอบความสมเหตุสมผลนั้นใช้หลักการเดียวกับแผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์

4. วิธีการพิสูจน์ที่เป็นพื้นฐาน

- 1) การพิสูจน์ $p \rightarrow q$ โดยตรง
- 2) การพิสูจน์โดยใช้การแย้งสลับที่ของ $p \rightarrow q$ หรือการพิสูจน์ $p \rightarrow q$ โดยอ้อม
- 3) การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง
- 4) การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน/ ยาก

1. ในการใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยหาคำตอบของแบบรูป ผู้เรียนบางคนคิดว่ามีคำตอบที่ถูกต้องเพียงคำตอบเดียว แต่แท้จริงสามารถหาคำตอบได้มากกว่า 1 คำตอบ ขึ้นอยู่กับเหตุผล

เช่น กำหนดแบบรูป 1, 2, 4, $\times$ ผู้เรียนอาจหาจำนวนที่แทน $\times$ ได้ต่างกัน คือ 5 7 หรือ 8 ดังนั้น จำนวนข้อมูล หลักฐาน หรือข้อเท็จจริงที่นำมาเป็นข้อสังเกตหรือข้ออ้างจึงมีผลต่อข้อสรุป

2. ผลสรุปที่ได้โดยใช้วิธีการให้เหตุผลแบบอุปนัยนั้น ไม่จำเป็นต้องถูกต้องทุกครั้ง เช่น พิจารณาจาก $F(n) = n^2 - 79n + 1601$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$

จากการสังเกต อาจจะสรุปว่า $F(n) = n^2 - 79n + 1601$ เป็นจำนวนเฉพาะทุก ๆ จำนวนนับ แต่ถ้า แทน n ด้วย 80 จะได้ $F(80)$ คือ $80^2 - 79(80) + 1601 = 1681 = (41)^2$

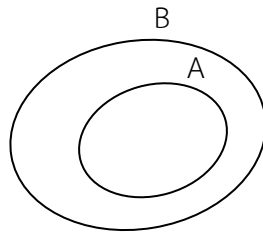
นั่นคือ $F(n) = n^2 - 79n + 1601$ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะทุก ๆ จำนวนนับ แต่ถ้าเพิ่มเงื่อนไข $1 < n < 50$ ทำให้ $F(n)$ เป็นจริง เงื่อนไขจึงเป็นสิ่งที่สำคัญที่ควรพิจารณา

ดังนั้นการสรุปโดยใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย บางครั้งควรกำหนดขอบเขตของการพิจารณาประกอบด้วย

3. การให้เหตุผลแบบนิรนัย ไม่ควร กำหนดเหตุในรูปประโยคปฏิเสธทั้งสองส่วน เช่น
- เหตุ 1. รถประจำทางทุกคันเป็นรถปรับอากาศ
 2. มีรถปรับอากาศบางคันเป็นรถของบริษัท บขส. จำกัด
 3. ไม่มีรถของบริษัท บขส. จำกัด ที่ไม่เป็นรถประจำทาง

จะพบว่าเหตุ 3. เป็นรูปประโยคปฏิเสธทั้งสองส่วน ถ้าผู้เรียนไม่มีพื้นฐานในเรื่องตรรกศาสตร์มาก่อน จะยากเกินไปที่จะเขียนแผนภาพได้ถูกต้อง ซึ่งเหตุ 3. ถ้า p แทนรถประจำทาง และ q แทนรถของบริษัท บขส. จำกัด จากเหตุที่กำหนดจะเขียนสัญลักษณ์ได้เป็น $\sim q \rightarrow \sim p$ ซึ่งสมมูลกับ $p \rightarrow q$ จะได้ประโยคของเหตุ 3. เป็นรถประจำทางทุกคันเป็นรถของบริษัท บขส. จำกัด ดังนั้นจะได้แผนภาพตามขั้นตอนดังนี้

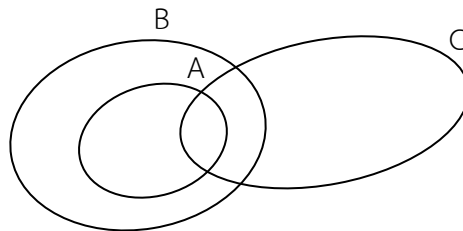
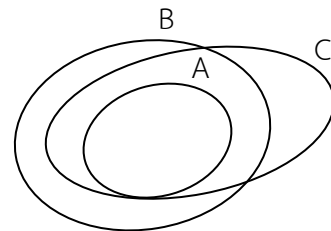
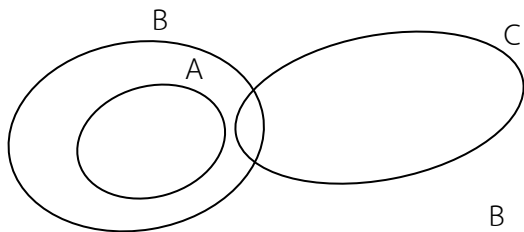
จากเหตุ 1.



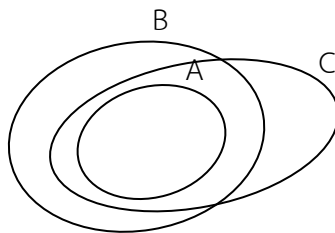
A แทนรถประจำทาง

B แทนรถปรับอากาศ

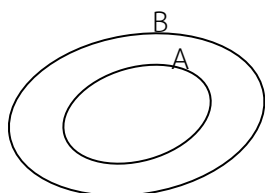
จากเหตุ 1 และ 2 C แทนรถของบริษัท บขส. จำกัด



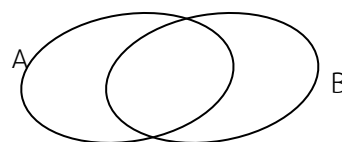
จากเหตุ 1, 2 และ 3



4. ผู้เรียนบางคนเข้าใจว่าสมาชิกของ A บางตัว เป็นสมาชิกของ B สามารถเขียนแทนด้วย แผนภาพ ก



แผนภาพ ก



แผนภาพ ข

แผนภาพที่ถูกต้องคือ แผนภาพ ข



5. ผู้เรียนบางคนใช้การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์กับเงื่อนไขที่เป็นจำนวนเต็ม
6. การเขียนประโยคเปิด $P(n)$ ผู้เรียนบางคนยังเข้าใจคลาดเคลื่อน เขียน $P(n)$ ในรูปประพจน์ เช่น $P(n)$ แทน $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ทุกจำนวนนับ n
7. การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในขั้นอุปนัย ผู้เรียนบางคนยังเข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการใช้ตัวแปรโดยเขียนขั้นอุปนัยเป็น สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ถ้า $P(n)$ จริง แล้ว $P(n+1)$ จริง ซึ่งควรเขียนว่า สำหรับจำนวนนับ k ใด ๆ ถ้า $P(k)$ จริง แล้ว $P(k+1)$ จริง ต้องกำหนดตัวแปรใหม่ที่ไม่ซ้ำกับตัวแปรในประโยคเปิด $P(n)$
8. ผู้เรียนเข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการเขียนเพื่อแสดงว่า $P(k+1)$ จริง เช่น จงพิสูจน์ว่า $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 + 3n^2 + 2n$ หารด้วย 3 ลงตัว
ผู้เรียนจะเขียนแสดง $P(k+1)$ จริง ดังนี้

$$\begin{aligned}
 &\text{เพราะ} \quad 3 \mid (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 2(k+1) \\
 &\quad \quad 3 \mid k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 2k + 2 \\
 &\quad \quad 3 \mid (k^3 + 3k^2 + 2k) + (3k^2 + 9k + 6) \\
 &\quad \quad 3 \mid (k^3 + 3k^2 + 2k) + 3(k^2 + 3k + 2) \\
 &\text{เพราะว่า} \quad 3 \mid (k^3 + 3k^2 + 2k) \text{ จริง เมื่อ } (k^3 + 3k^2 + 2k) \in \mathbb{N} \text{ ตามสมมติฐาน } P(k) \text{ จริง} \\
 &\text{และ} \quad 3 \mid 3(k^2 + 3k + 2) \text{ จริง เมื่อ } (k^2 + 3k + 2) \in \mathbb{N} \text{ เนื่องจาก } 3 \mid 3 \\
 &\text{นั่นคือ} \quad 3 \mid (k^3 + 3k^2 + 2k) + 3(k^2 + 3k + 2) \text{ จริง} \\
 &\quad \quad \text{เมื่อ } (k^3 + 3k^2 + 2k) + 3(k^2 + 3k + 2) \in \mathbb{N} \\
 &\text{ดังนั้น} \quad P(k+1) \text{ จริง}
 \end{aligned}$$

การเขียนเช่นนี้ไม่ถูกต้อง เพราะบรรทัดแรกที่เขียนว่า $3 \mid (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 2(k+1)$ ก็เป็นการยอมรับแล้วว่า $P(k+1)$ จริง การเขียนแสดงว่า $P(k+1)$ จริง เขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \text{เนื่องจาก } (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 2(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 2k + 2 \\
 &= (k^3 + 3k^2 + 2k) + (3k^2 + 9k + 6) \\
 &= (k^3 + 3k^2 + 2k) + 3(k^2 + 3k + 2)
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $k^3 + 3k^2 + 2k$ หารด้วย 3 ลงตัว ตามสมมติฐาน $P(k)$ จริง

และ $3(k^2 + 3k + 2)$ หารด้วย 3 ลงตัว เพราะ 3 หาร 3 ลงตัว

ดังนั้น $(k^3 + 3k^2 + 2k) + 3(k^2 + 3k + 2)$ หารด้วย 3 ลงตัว

นั่นคือ 3 หาร $(k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 2(k+1)$ ลงตัว

ดังนั้น $P(k+1)$ จริง

หรือ เขียนแสดง $P(k + 1)$ จริง ดังนี้

เพราะว่า $3 \mid (k^3 + 3k^2 + 2k)$ เมื่อ ตามสมมติฐาน $P(k)$ จริง

และ $3 \mid 3(k^2 + 3k + 2)$ เพราะ $3 \mid 3$

จะได้ $3 \mid (k^3 + 3k^2 + 2k) + 3(k^2 + 3k + 2)$

$$3 \mid k^3 + 3k^2 + 2k + 3k^2 + 9k + 6$$

$$3 \mid (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (3k^2 + 6k + 3) + (2k + 2)$$

$$3 \mid (k + 1)^3 + 3(k + 1)^2 + 2(k + 1)$$

ดังนั้น $P(k + 1)$ จริง

สื่อและแหล่งการเรียนรู้

1. สำหรับผู้เข้ารับการอบรม

- 1.1 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1: ใบความรู้ เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์
- 1.2 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 2: แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง การให้เหตุผลแบบอุปนัย
- 1.3 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 3: ใบงานที่ 1 เรื่อง การให้เหตุผลแบบอุปนัย
- 1.4 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 4: ใบความรู้ที่ 1 เรื่อง การให้เหตุผลแบบนิรนัย
- 1.5 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 5: ใบความรู้ที่ 2 เรื่อง การพิสูจน์ที่เป็นพื้นฐาน
- 1.6 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 6: ใบงานที่ 2 เรื่อง การพิสูจน์ในรูป $p \leftrightarrow q$
- 1.7 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 7: ใบงานที่ 3 เรื่อง การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
- 1.8 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 8: แบบตรวจสอบความเข้าใจ เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์
- 1.9 คู่มือครูสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
- 1.10 เอกสารเสริมความรู้ทางคณิตศาสตร์ ตรรกศาสตร์เบื้องต้นและวิธีการพิสูจน์

2. สำหรับวิทยากร

- 2.1 เอกสารสำหรับวิทยากร 1: เฉลยใบงานที่ 1 เรื่อง การให้เหตุผลแบบอุปนัย พร้อมเฉลยข้อ 1
- 2.2 เอกสารสำหรับวิทยากร 2: เฉลยใบงานที่ 2 เรื่อง การพิสูจน์ในรูป $p \leftrightarrow q$
- 2.3 เอกสารสำหรับวิทยากร 3: เฉลยใบงานที่ 3 เรื่อง การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์แบบนิรนัย
- 2.4 เอกสารสำหรับวิทยากร 4: เฉลยแบบตรวจสอบความเข้าใจ เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์



- 2.5 เอกสารสำหรับวิทยากร 5: แบบบันทึกผลการประเมิน เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์
- 2.6 เอกสารสำหรับวิทยากร 6: แบบประเมินการมีส่วนร่วมในกิจกรรม
- 2.7 เอกสารสำหรับวิทยากร 7: แบบประเมินการสรุปองค์ความรู้
- 2.8 PowerPoint แสดงขั้นตอนการใช้เหตุผลแบบอุปนัยสรุปคำตอบ
- 2.9 PowerPoint เปรียบเทียบการแสดงขั้นตอนการใช้เหตุผลแบบอุปนัยและการให้เหตุผล
- 2.10 วิดีทัศน์การสาธิตการสอน เรื่อง การให้เหตุผลแบบอุปนัย

การประเมินผล

รายการประเมิน	เกณฑ์การให้คะแนน (คะแนนเต็ม 12 คะแนน)	เครื่องมือ
1. การมีส่วนร่วมในกิจกรรม พิจารณาจากข้อ 1.1 – 1.6 1.1 ความร่วมมือในกิจกรรม 1.2 ความรับผิดชอบ 1.3 การเสนอความคิดเห็น 1.4 ความริเริ่มสร้างสรรค์ 1.5 การเป็นผู้นำหรือผู้ตามที่ดี 1.6 การตรงเวลา	คะแนนเต็ม 5 คะแนน โดย ได้ 5 คะแนน เมื่อมี 5 – 6 ข้อ ได้ 4 คะแนน เมื่อมี 3 – 4 ข้อ ได้ 3 คะแนน เมื่อมี 1 – 2 ข้อ ได้ 0 คะแนน เมื่อไม่มีทั้ง 6 ข้อ	- แบบประเมินการมีส่วนร่วมในกิจกรรม
2. สรุปองค์ความรู้ พิจารณาจาก 2.1 - 2.2 ดังนี้ 2.1 ความครอบคลุมเนื้อหา 2.2 ความถูกต้องตรงประเด็น	คะแนนเต็ม 5 คะแนน โดย ได้ 5 คะแนน เมื่อปฏิบัติครบ 2 ข้อ ได้ 3 คะแนน เมื่อปฏิบัติ 1 ข้อ ได้ 0 คะแนน เมื่อไม่ปฏิบัติทั้งสองข้อ	- แบบประเมินการสรุปองค์ความรู้
3. การทดสอบความรู้	คะแนนเต็ม 2 คะแนน โดย ตรวจให้คะแนนจากแบบทดสอบหลังเรียน จำนวน 4 ข้อ ข้อละ 0.5 คะแนน	- แบบทดสอบหลังเรียน

แนวทางปฏิบัติสำหรับวิทยากร

1. ศึกษาแผนการจัดการเรียนรู้ เอกสารสำหรับวิทยากรและเอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์ โดยละเอียด
2. ศึกษาคู่มือครูสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง การให้เหตุผล

3. ศึกษาเอกสารเสริมความรู้ทางคณิตศาสตร์ ตรรกศาสตร์เบื้องต้นและวิธีการพิสูจน์ของสสวท. หั้วข้อวิธีการพิสูจน์แบบต่าง ๆ หน้า 22 – 40
4. ศึกษาความเข้าใจคลาดเคลื่อน/ ยาก ในเรื่องการให้เหตุผลและการพิสูจน์ วิทยากรเสนอแนะเพิ่มเติมนอกเหนือจากที่กล่าวไว้ในเอกสารได้
5. จัดเตรียมทำสำเนาเอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1.1 – 1.8 ตามจำนวนผู้เข้ารับการอบรม
6. จัดเตรียมกระดาษ A4 ขนาด $\frac{1}{4}$ ของ A4 ขนาด $\frac{1}{2}$ ของ A4 และ A4 ตามจำนวนผู้เข้ารับการอบรม
7. จัดเตรียมสติกเกอร์ให้ผู้เข้ารับการอบรมแต่ละกลุ่มจับ
8. แจ้งให้ผู้เข้ารับการอบรมทราบเกี่ยวกับประเด็นการประเมินและเกณฑ์การให้คะแนนในช่วงชั้น
9. ดำเนินการจัดกิจกรรมตามแนวทางการจัดกิจกรรม พร้อมทั้งประเมินผลผู้เข้ารับการอบรมตามรายการประเมินและเครื่องมือที่กำหนด แล้วกรอกคะแนนสรุปลงในแบบกรอกคะแนนเรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์
10. วิทยากรอาจทำ PowerPoint ประกอบการบรรยายเพิ่มเติม

แนวทางการจัดกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
การให้เหตุผลแบบอุปนัย (50 นาที) 1. การสร้างองค์ความรู้ (33 นาที) 1.1 ชี้นำ (8 นาที) 1) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมเล่นเกมบอกคำตอบ โดยเขียนคำตอบลงในกระดาษคำตอบที่แจกให้ทันทีเมื่อวิทยากรอ่านโจทย์เรียบร้อยแล้ว ดังนี้ ถ้า 1 แทนด้วย 5 2 แทนด้วย 25 3 แทนด้วย 325 4 แทนด้วย 4325 แล้ว 5 แทนด้วยเท่าใด 2) วิทยากรสุ่มถามคำตอบของผู้เข้ารับการอบรมที่มีคำตอบใดบ้าง เพราะเหตุใด	- กระดาษขนาด $\frac{1}{4}$ ของ A4 สำหรับเขียนตอบ - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1: ใบความรู้ เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์ - วิดีทัศน์การสาธิตการสอน เรื่อง การให้เหตุผลแบบอุปนัย - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับ	- ประเมินการมีส่วนร่วมในกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
3) วิทยากรแจ้งให้ผู้เข้ารับการอบรมทราบเกี่ยวกับจุดประสงค์ในการอบรมการประเมินและเกณฑ์การให้คะแนน เรื่องการให้เหตุผลและการพิสูจน์พร้อมแจกแผนการฝึกอบรมให้ผู้เข้ารับการอบรมทุกคนอ่าน โดยใช้เวลาประมาณ 5 นาที 1.2 ขั้นสาธิตการสอนและฝึกปฏิบัติ (20 นาที) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมชมวีดิทัศน์ การสาธิตการสอน เรื่อง การให้เหตุผลแบบอุปนัย โดยใช้เวลาประมาณ 10 นาที แล้วแจกเอกสารแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่องการให้เหตุผลแบบอุปนัย ให้ผู้เข้ารับการอบรมศึกษาเพิ่มเติมโดยใช้เวลา โดยใช้เวลาประมาณ 10 นาที 1.3 ขั้นสรุป (5 นาที) วิทยากรและผู้เข้ารับการอบรมร่วมกันอภิปรายการสรุปผลที่ได้จากการให้เหตุผลแบบอุปนัย ดังนี้ เหตุ ได้มาจากการสังเกตหรือการทดลองหลาย ๆ ครั้ง ผล สรุปเป็นความรู้แบบทั่วไปหรือข้อความคาดการณ์ 2. ปฏิบัติการเพื่อสร้างความเข้าใจตามสาระการเรียนรู้ (10 นาที) 2.1 แบ่งกลุ่มผู้เข้ารับการอบรมกลุ่มละ 3 คน ให้แต่ละกลุ่มฝึกการหาคำตอบ โดยใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย จากโจทย์ในใบงานที่ 1 เรื่อง การให้เหตุผลแบบอุปนัย ข้อ 1 กลุ่มละ 1 ข้อย่อย โดยการจับสลาก ให้แต่ละกลุ่มเขียนแสดงที่มาของการคิดลงในกระดาษ A4 ใช้เวลาประมาณ 5 นาที วิทยากรแจกกระดาษ A4 กลุ่มละ 1 แผ่น (โจทย์ที่เหลือข้อ 2 – 5 ให้ผู้เข้ารับการอบรมฝึกทักษะด้วยตนเองนอกเวลา)	การอบรม 2: แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง การให้เหตุผลแบบอุปนัย - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 3: ใบงานที่ 1 เรื่อง การให้เหตุผลแบบอุปนัย - สลากจับ เพื่อเลือกข้อย่อย - กระดาษ A4 กลุ่มละ 1 แผ่น	

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล															
2.2 วิทยากรสุ่มถามคำตอบของโจทย์ข้อ 1 แล้วสุ่มบางกลุ่ม แสดงเหตุผลประกอบคำตอบของแต่ละข้อย่อย 1 – 2 ข้อย่อย 2.3 วิทยากรและผู้เข้ารับการอบรมร่วมกันจัดป้ายนิเทศ แสดงการคิดของแต่ละกลุ่ม หลังเสร็จสิ้นการอบรม เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรมได้ศึกษาแนวคิดที่แตกต่างกัน 3. การสรุปทเรียน (7 นาที) วิทยากรตรวจสอบความเข้าใจของผู้เข้ารับการอบรม เรื่อง การให้เหตุผลแบบอุปนัย เช่น โดยการให้เหตุผลแบบอุปนัย จงหาว่า ผลคูณของจำนวนนับสองจำนวนที่เป็นจำนวนคี่จะเป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่ ซึ่งผู้เข้ารับการอบรมควรตอบได้ ดังนี้ 1) พิจารณาผลคูณของจำนวนนับสองจำนวนที่เป็นจำนวนคี่หลาย ๆ จำนวน เช่น <table> <tr> <td>$1 \times 3 = 3$</td><td>$3 \times 3 = 9$</td><td>$7 \times 3 = 21$</td></tr> <tr> <td>$1 \times 5 = 5$</td><td>$3 \times 5 = 15$</td><td>$7 \times 9 = 63$</td></tr> <tr> <td>$1 \times 7 = 7$</td><td>$5 \times 7 = 35$</td><td>$9 \times 11 = 99$</td></tr> <tr> <td>$1 \times 9 = 9$</td><td>$5 \times 9 = 45$</td><td>$9 \times 15 = 135$</td></tr> <tr> <td>$1 \times 15 = 15$</td><td>$5 \times 25 = 125$</td><td>$9 \times 101 = 909$</td></tr> </table> 2) จากการสังเกตผลคูณข้างต้น จะพบว่าผลคูณที่ได้เป็นจำนวนคี่ 3) จึงสรุปว่า โดยการให้เหตุผลแบบอุปนัยผลคูณของจำนวนนับสองจำนวนที่เป็นจำนวนคี่จะเป็นจำนวนคี่	$1 \times 3 = 3$	$3 \times 3 = 9$	$7 \times 3 = 21$	$1 \times 5 = 5$	$3 \times 5 = 15$	$7 \times 9 = 63$	$1 \times 7 = 7$	$5 \times 7 = 35$	$9 \times 11 = 99$	$1 \times 9 = 9$	$5 \times 9 = 45$	$9 \times 15 = 135$	$1 \times 15 = 15$	$5 \times 25 = 125$	$9 \times 101 = 909$		
$1 \times 3 = 3$	$3 \times 3 = 9$	$7 \times 3 = 21$															
$1 \times 5 = 5$	$3 \times 5 = 15$	$7 \times 9 = 63$															
$1 \times 7 = 7$	$5 \times 7 = 35$	$9 \times 11 = 99$															
$1 \times 9 = 9$	$5 \times 9 = 45$	$9 \times 15 = 135$															
$1 \times 15 = 15$	$5 \times 25 = 125$	$9 \times 101 = 909$															

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล															
การให้เหตุผลแบบนิรนัย (20 นาที) 1. การสร้างองค์ความรู้ (15 นาที) 1.1 วิทยาการแจกเอกสารใบความรู้ที่ 1 เรื่อง การให้เหตุผลแบบนิรนัย ให้ผู้เข้ารับการอบรมศึกษา โดยใช้เวลาประมาณ 5 นาที 1.2 วิทยาการเชื่อมโยงความรู้ระหว่างการให้เหตุผลแบบอุปนัยกับการให้เหตุผลแบบนิรนัย โดยใช้ PowerPoint เช่น จงหาว่าผลคูณของจำนวนนับสองจำนวนที่เป็นจำนวนคี่จะเป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่ <u>กรณีการให้เหตุผลแบบอุปนัย</u> 1) พิจารณาผลคูณของจำนวนนับสองจำนวนที่เป็นจำนวนคี่หลาย ๆ จำนวน เช่น <table border="1"> <tbody> <tr> <td>$1 \times 3 = 3$</td><td>$3 \times 3 = 9$</td><td>$7 \times 3 = 21$</td></tr> <tr> <td>$1 \times 5 = 5$</td><td>$3 \times 5 = 15$</td><td>$7 \times 9 = 63$</td></tr> <tr> <td>$1 \times 7 = 7$</td><td>$5 \times 7 = 35$</td><td>$9 \times 11 = 99$</td></tr> <tr> <td>$1 \times 9 = 9$</td><td>$5 \times 9 = 45$</td><td>$9 \times 15 = 135$</td></tr> <tr> <td>$1 \times 15 = 15$</td><td>$5 \times 25 = 125$</td><td>$9 \times 101 = 909$</td></tr> </tbody> </table> 2) จากการสังเกตผลคูณข้างต้น จะพบว่าผลคูณที่ได้เป็นจำนวนคี่ 3) จึงสรุปได้ว่าโดยการให้เหตุผลแบบอุปนัย ผลคูณของจำนวนนับสองจำนวนที่เป็นจำนวนคี่จะเป็นจำนวนคี่ <u>กรณีการให้เหตุผลแบบนิรนัย</u> 1) จากบทนิยาม จำนวนคี่คือจำนวนนับที่หารด้วย 2 เหลือเศษ 1	$1 \times 3 = 3$	$3 \times 3 = 9$	$7 \times 3 = 21$	$1 \times 5 = 5$	$3 \times 5 = 15$	$7 \times 9 = 63$	$1 \times 7 = 7$	$5 \times 7 = 35$	$9 \times 11 = 99$	$1 \times 9 = 9$	$5 \times 9 = 45$	$9 \times 15 = 135$	$1 \times 15 = 15$	$5 \times 25 = 125$	$9 \times 101 = 909$	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับ การอบรม 4 : ใบความรู้ ที่ 1 เรื่อง การให้เหตุผล แบบนิรนัย - PowerPoint เปรียบเทียบการให้ เหตุผลแบบอุปนัย และการให้เหตุผลแบบ นิรนัย	- ประเมินการมีส่วนร่วม ในกิจกรรม
$1 \times 3 = 3$	$3 \times 3 = 9$	$7 \times 3 = 21$															
$1 \times 5 = 5$	$3 \times 5 = 15$	$7 \times 9 = 63$															
$1 \times 7 = 7$	$5 \times 7 = 35$	$9 \times 11 = 99$															
$1 \times 9 = 9$	$5 \times 9 = 45$	$9 \times 15 = 135$															
$1 \times 15 = 15$	$5 \times 25 = 125$	$9 \times 101 = 909$															

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
2) พิสูจน์ กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนคี่ จะมีจำนวนเต็ม m และ n ที่ทำให้ $a = 2m + 1$ และ $b = 2n + 1$ จะได้ $ab = (2m + 1)(2n + 1)$ $= 4mn + 2m + 2n + 1$ $= 2(2mn + m + n) + 1$ กำหนดให้จำนวนเต็ม $k = 2mn + m + n$ ดังนั้น $ab = 2k + 1$ เมื่อ $k = 2mn + m + n$ นั่นคือ ab เป็นจำนวนคี่ 3) จึงสรุปได้ว่า โดยการให้เหตุผลแบบนิรนัย ผลคูณของจำนวนนับสองจำนวนที่เป็นจำนวนคี่ จะเป็นจำนวนคี่ 2. การสรุปทเรียน (5 นาที) วิทยากรและผู้เข้ารับการอบรมร่วมกันอภิปรายและสรุปผลที่ได้จากการให้เหตุผลแบบนิรนัย ดังนี้ 1) ต้องยอมรับว่าเหตุเป็นจริง และ 2) ผลสรุปต้องสมเหตุสมผล		
วิธีการพิสูจน์ที่เป็นพื้นฐาน (25 นาที) 1. วิทยากรแจกเอกสารใบความรู้ที่ 2 เรื่อง การพิสูจน์ที่เป็นพื้นฐาน ให้ผู้เข้ารับการอบรมศึกษา โดยใช้เวลาประมาณ 10 นาที 2. วิทยากรและผู้เข้ารับการอบรมอภิปรายเกี่ยวกับการพิสูจน์ในรูป $p \rightarrow q$ ไปใช้ในการพิสูจน์แบบอื่น เช่น $p \leftrightarrow q, p \vee q$ โดยอาจให้ผู้เข้ารับการอบรมเขียนหลักการของการพิสูจน์อย่างคร่าว ๆ ในการพิสูจน์ในรูป $p \leftrightarrow q$ เช่น จงพิสูจน์ว่าสำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ $a^3 + 1$ เป็นจำนวนคู่ก็ต่อเมื่อ a เป็นจำนวนคี่ วิทยากรแจก	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 5: ใบความรู้ที่ 2 เรื่อง การพิสูจน์ที่เป็นพื้นฐาน - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 6: ใบงานที่ 2 เรื่อง การเขียนพิสูจน์ในรูป $p \leftrightarrow q$ - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 7: ใบงานที่ 3	- ประเมินการมีส่วนร่วมในกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
ใบงานที่ 2 เรื่อง การพิสูจน์ในรูป $p \leftrightarrow q$ ให้ผู้เข้ารับการอบรมทำทุกคน โดยใช้เวลาประมาณ 5 นาที 3. วิทยากรแจกใบงานที่ 3 เรื่อง การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ให้ผู้เข้ารับการอบรมทุกคนได้ฝึกทักษะการเขียนพิสูจน์ โดยใช้เวลาประมาณ 10 นาที วิทยากรเดินดูพร้อมให้คำแนะนำแล้วนำผลงานของผู้เข้ารับการอบรมที่เขียนได้สมบูรณ์ติดป้ายนิเทศ	เรื่อง การพิสูจน์ โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์	
การสรุปทเรียนทั้งหมด (25 นาที) 1. ผู้เข้ารับการอบรมตรวจสอบความเข้าใจของตนเอง เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์ โดยใช้แบบตรวจสอบความเข้าใจ เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์ จำนวน 10 ข้อ ใช้เวลา 20 นาที 2. วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมเขียนสรุปเนื้อหาที่ได้จากการอบรมนี้ในกระดาษที่แจกให้ โดยใช้เวลาประมาณ 5 นาที	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 8: แบบตรวจสอบความเข้าใจ เรื่องการให้เหตุผลและการพิสูจน์ - กระดาษขนาด ครึ่ง A4	- ประเมินการสรุปองค์ความรู้

เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม

ใบความรู้ เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์

สาระการเรียนรู้

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (inductive reasoning)
2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (deductive reasoning)
3. วิธีการพิสูจน์ที่เป็นพื้นฐาน

สาระสำคัญ

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย หมายถึง วิธีการสรุปผลในการค้นหาความจริงจากการสังเกตหรือการทดลองหลาย ๆ ครั้งจากกรณีย่อย ๆ แล้วนำมาสรุปเป็นข้อความคาดการณ์ (conjecture)
 2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย หมายถึง วิธีการสรุปข้อเท็จจริงซึ่งเป็นผลมาจากเหตุ หรือ สมมติฐานซึ่งเป็นความรู้พื้นฐาน อาจเป็นความเชื่อ ข้อตกลง กฎ หรือบทนิยาม ที่เป็นสิ่งที่รู้มาก่อนและยอมรับว่าเป็นจริง ในการให้เหตุผลแบบนิรนัย ผลหรือข้อสรุปจะถูกต้อง ก็ต่อเมื่อ
 - 1) ยอมรับว่าเหตุเป็นจริงทุกข้อ
 - 2) การสรุปผลสมเหตุสมผล
 3. การตรวจสอบว่าข้อสรุปสมเหตุสมผลหรือไม่ วิธีการหนึ่งคือการเขียนแผนภาพตามเหตุ หรือ สมมติฐานที่เป็นไปได้
 - 1) ถ้าแผนภาพที่เขียนมีกรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณีแสดงผลตามที่กำหนดไว้ การสรุปผลนั้นสมเหตุสมผล
 - 2) ถ้าแผนภาพที่เขียนมีแผนภาพอย่างน้อยหนึ่งกรณีที่ไม่แสดงผลตามที่กำหนดไว้ การสรุปผลนั้น ไม่สมเหตุสมผล
- วิธีการที่ใช้ตรวจสอบความสมเหตุสมผล เรียกว่า การอ้างเหตุผลโดยใช้ตรรกบทของตรรกศาสตร์ (syllogistic logic)
- ข้อความที่ใช้ในการอ้างเหตุผลมี 4 แบบ
- 1) สมาชิกของ A ทุกตัว เป็นสมาชิกของ B
 - 2) ไม่มีสมาชิกของ A ตัวใด เป็นสมาชิกของ B
 - 3) สมาชิกบางตัวของ A เป็นสมาชิกของ B
 - 4) สมาชิกของ A บางตัว ไม่เป็นสมาชิกของ B

หมายเหตุ แผนภาพที่ใช้ตรวจสอบความสมเหตุสมผลนั้นใช้หลักการเดียวกับแผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์



4. วิธีการพิสูจน์ที่เป็นพื้นฐาน

- 1) การพิสูจน์ $p \rightarrow q$ โดยตรง
- 2) การพิสูจน์โดยใช้การแย้งสลับที่ของ $p \rightarrow q$ หรือการพิสูจน์ $p \rightarrow q$ โดยอ้อม
- 3) การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง
- 4) การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน/ ยาก

1. ในการใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยหาคำตอบของแบบรูป ผู้เรียนบางคนคิดว่ามีคำตอบที่ถูกต้องเพียงคำตอบเดียว แต่แท้จริงสามารถหาคำตอบได้มากกว่า 1 คำตอบ ขึ้นอยู่กับเหตุผล

เช่น กำหนดแบบรูป 1, 2, 4, $\times$ ผู้เรียนอาจหาจำนวนที่แทน $\times$ ได้ต่างกัน คือ 5 7 หรือ 8 ดังนั้น จำนวนข้อมูล หลักฐาน หรือข้อเท็จจริงที่นำมาเป็นข้อสังเกตหรือข้ออ้างจึงมีผลต่อข้อสรุป

2. ผลสรุปที่ได้โดยใช้วิธีการให้เหตุผลแบบอุปนัยนั้น ไม่จำเป็นต้องถูกต้องทุกครั้ง เช่น พิจารณาจาก $F(n) = n^2 - 79n + 1601$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$

จากการสังเกต อาจจะสรุปว่า $F(n) = n^2 - 79n + 1601$ เป็นจำนวนเฉพาะทุก ๆ จำนวนนับ แต่ถ้า แทน n ด้วย 80 จะได้ $F(80) = 80^2 - 79(80) + 1601 = 1681 = (41)^2$

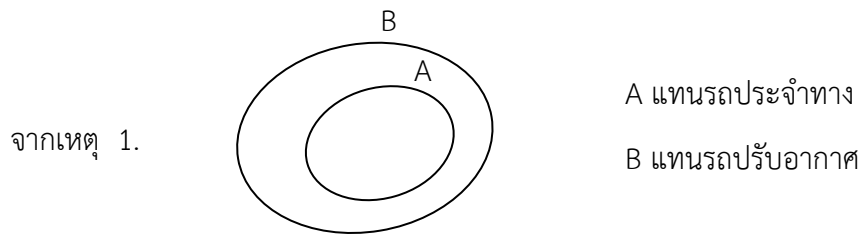
นั่นคือ $F(n) = n^2 - 79n + 1601$ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะทุก ๆ จำนวนนับ แต่ถ้าเพิ่มเงื่อนไข $1 < n < 50$ ทำให้ $F(n)$ เป็นจริง เงื่อนไขจึงเป็นสิ่งสำคัญที่ควรพิจารณา

ดังนั้นการสรุปโดยใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย บางครั้งควรกำหนดขอบเขตของการพิจารณาประกอบด้วย

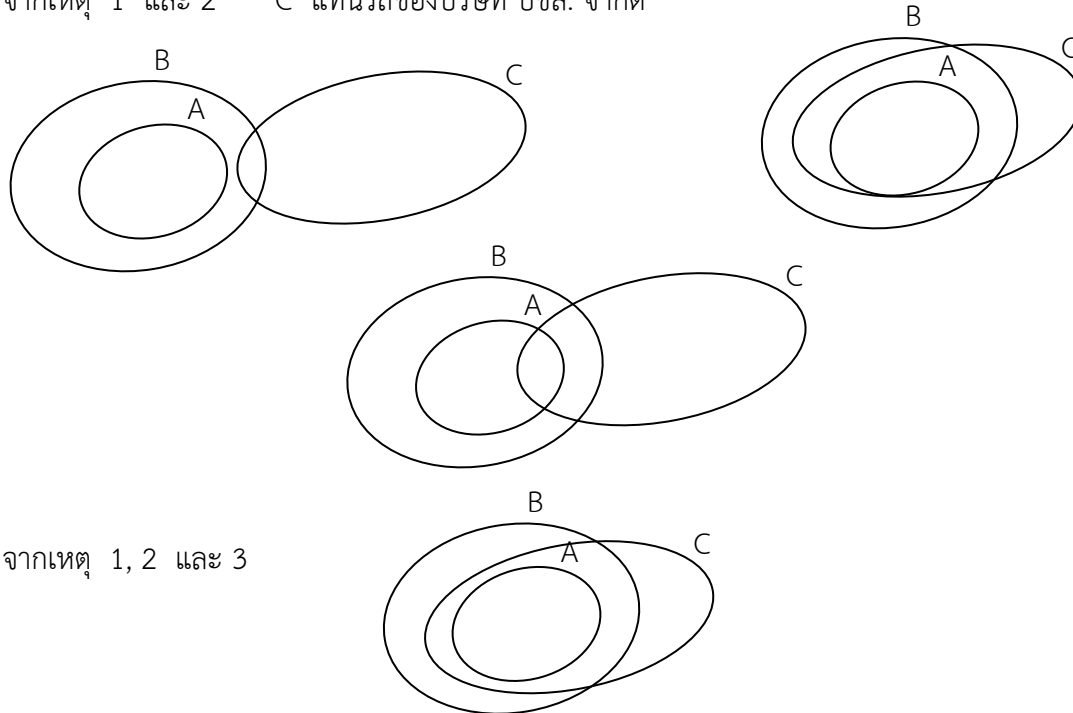
3. การให้เหตุผลแบบนิรนัย ไม่ควรกำหนดเหตุในรูปประโยคปฏิเสธทั้งสองส่วน เช่น

- เหตุ
1. รถประจำทางทุกคันเป็นรถปรับอากาศ
 2. มีรถปรับอากาศบางคันเป็นรถของบริษัท บขส. จำกัด
 3. ไม่มีรถของบริษัท บขส. จำกัด ที่ไม่เป็นรถประจำทาง

จะพบว่าเหตุ 3. เป็นรูปประโยคปฏิเสธทั้งสองส่วน ถ้าผู้เรียนไม่มีพื้นฐานในเรื่องตรรกศาสตร์มาก่อน จะยากเกินไปที่จะเขียนแผนภาพได้ถูกต้อง ซึ่งเหตุ 3. ถ้า p แทนรถประจำทาง และ q แทนรถของบริษัท บขส. จำกัด จากเหตุที่กำหนดจะเขียนสัญลักษณ์ได้เป็น $\sim q \rightarrow \sim p$ ซึ่งสมมูลกับ $p \rightarrow q$ จะได้ประโยคของเหตุ 3. เป็นรถประจำทางทุกคันเป็นรถของบริษัท บขส. จำกัด ดังนั้นจะได้แผนภาพตามขั้นตอนดังนี้

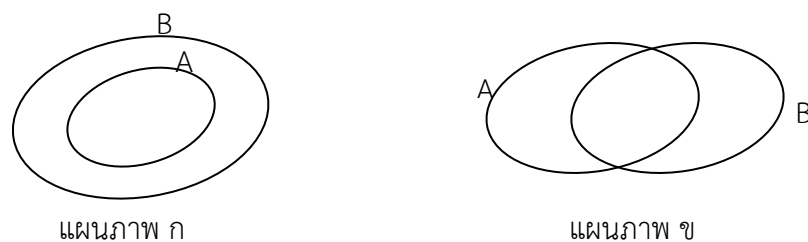


จากเหตุ 1 และ 2 C แทนรถของบริษัท บขส. จำกัด



จากเหตุ 1, 2 และ 3

4. ผู้เรียนบางคนเข้าใจว่าสมาชิกของ A บางตัว เป็นสมาชิกของ B สามารถเขียนแทนด้วย แผนภาพ ก



แผนภาพที่ถูกต้องคือ แผนภาพ ข

5. ผู้เรียนบางคนใช้การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์กับเงื่อนไขที่เป็นจำนวนเต็ม

6. การเขียนประโยคเปิด $P(n)$ ผู้เรียนบางคนยังเข้าใจคลาดเคลื่อน เขียน $P(n)$ ในรูปประพจน์

เช่น $P(n)$ แทน $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ทุกจำนวนนับ n

7. การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในขั้นอุปนัย ผู้เรียนบางคนยังเข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการใช้ตัวแปรโดยเขียนขั้นอุปนัยเป็น สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ถ้า $P(n)$ จริง แล้ว $P(n+1)$ จริง ซึ่งควรเขียนว่า สำหรับจำนวนนับ k ใด ๆ ถ้า $P(k)$ จริง แล้ว $P(k+1)$ จริง คือต้องกำหนดตัวแปรใหม่ที่ไม่ซ้ำกับตัวแปรในประโยคเปิด $P(n)$

8. ผู้เรียนเข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการเขียนเพื่อแสดงว่า $P(k + 1)$ จริง เช่น จงพิสูจน์ว่า

$\forall n \in \mathbb{N}, n^3 + 3n^2 + 2n$ หารด้วย 3 ลงตัว

ผู้เรียนจะเขียนแสดง $P(k + 1)$ จริง ดังนี้

$$\text{เพราะ } 3 \mid (k + 1)^3 + 3(k + 1)^2 + 2(k + 1)$$

$$3 \mid k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 2k + 2$$

$$3 \mid (k^3 + 3k^2 + 2k) + (3k^2 + 9k + 6)$$

$$3 \mid (k^3 + 3k^2 + 2k) + 3(k^2 + 3k + 2)$$

$$\text{เพราะว่า } 3 \mid (k^3 + 3k^2 + 2k) \text{ จริง เมื่อ } (k^3 + 3k^2 + 2k) \in \mathbb{N} \text{ ตามสมมติฐาน } P(k) \text{ จริง}$$

$$\text{และ } 3 \mid 3(k^2 + 3k + 2) \text{ จริง เมื่อ } (k^2 + 3k + 2) \in \mathbb{N} \text{ เนื่องจาก } 3 \mid 3$$

$$\text{นั่นคือ } 3 \mid (k^3 + 3k^2 + 2k) + 3(k^2 + 3k + 2) \text{ จริง}$$

$$\text{เมื่อ } (k^3 + 3k^2 + 2k) + 3(k^2 + 3k + 2) \in \mathbb{N}$$

ดังนั้น $P(k + 1)$ จริง

การเขียนเช่นนี้ไม่ถูกต้อง เพราะบรรทัดแรกที่เขียนว่า $3 \mid (k + 1)^3 + 3(k + 1)^2 + 2(k + 1)$ ก็เป็นการยอมรับแล้วว่า $P(k + 1)$ จริง การเขียนแสดงว่า $P(k + 1)$ จริง เขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } (k + 1)^3 + 3(k + 1)^2 + 2(k + 1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 2k + 2 \\ &= (k^3 + 3k^2 + 2k) + (3k^2 + 9k + 6) \\ &= (k^3 + 3k^2 + 2k) + 3(k^2 + 3k + 2) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $k^3 + 3k^2 + 2k$ หารด้วย 3 ลงตัว ตามสมมติฐาน $P(k)$ จริง

และ $3(k^2 + 3k + 2)$ หารด้วย 3 ลงตัว เพราะ 3 หาร 3 ลงตัว

ดังนั้น $(k^3 + 3k^2 + 2k) + 3(k^2 + 3k + 2)$ หารด้วย 3 ลงตัว

นั่นคือ 3 หาร $(k + 1)^3 + 3(k + 1)^2 + 2(k + 1)$ ลงตัว

ดังนั้น $P(k + 1)$ จริง

หรือ เขียนแสดง $P(k + 1)$ จริง ดังนี้

$$\text{เพราะว่า } 3 \mid (k^3 + 3k^2 + 2k) \text{ เมื่อ ตามสมมติฐาน } P(k) \text{ จริง}$$

$$\text{และ } 3 \mid 3(k^2 + 3k + 2) \text{ เพราะ } 3 \mid 3$$

$$\text{จะได้ } 3 \mid (k^3 + 3k^2 + 2k) + 3(k^2 + 3k + 2)$$

$$3 \mid k^3 + 3k^2 + 2k + 3k^2 + 9k + 6$$

$$3 \mid (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (3k^2 + 6k + 3) + (2k + 2)$$

$$3 \mid (k + 1)^3 + 3(k + 1)^2 + 2(k + 1)$$

ดังนั้น $P(k + 1)$ จริง

แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง การให้เหตุผลแบบอุปนัย

1. สาระสำคัญ

การให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นการให้เหตุผลเพื่อหาข้อสรุป โดยการสังเกตหรือการทดลองหลาย ๆ ครั้ง

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

สรุปผลโดยใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยได้

3. เนื้อหาสาระ

การให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นการให้เหตุผลโดยยึดความจริงจากส่วนย่อยที่พบเห็นไปสู่ความจริงที่เป็นส่วนรวมหรืออาจกล่าวได้ว่า การให้เหตุผลแบบอุปนัย หมายถึงวิธีการสรุปผลในการค้นหาความจริงจากการสังเกตหรือการทดลองหลาย ๆ ครั้ง จากกรณีย่อย ๆ แล้วนำมาสรุปเป็นความรู้แบบทั่วไปหรือข้อความคาดการณ์

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้ (โดยใช้กระบวนการสืบเสาะทางวิทยาศาสตร์)

ขั้นที่ 1 ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

ผู้สอนเขียนหัวข้อการให้เหตุผลแบบอุปนัยบนกระดาน แล้วนำเข้าสู่บทเรียนโดยเสนอเรื่องของโสกราตีส (Socrates 490 – 339 ก่อนคริสตศักราช) ชาวกรีก ซึ่งชาวกรีกเห็นว่าความรู้ได้มาจากการให้เหตุผล โดยโสกราตีสช่วยคู่สนทนาได้ค้นพบมโนภาพที่ตนมีอยู่แล้วโดยวิธีการที่ประกอบด้วยลักษณะสำคัญ 5 ประการคือ

- 1) สงสัย ไปถามผู้ที่รู้เรื่องนั้นและถามข้อสงสัยในเรื่องนั้นกับผู้รู้
 - 2) สนทนา เพื่อหาคำจำกัดความ ในการสนทนาหาประเด็นหลักของการสนทนาเรื่องนั้น
 - 3) หาคำจำกัดความ หาคำจำกัดความที่คิดว่าถูกต้องที่สุด เพื่อจะหาสิ่งที่เป็นสากลหรือเป็นที่ยอมรับกันทั่วไป
 - 4) อุปนัย การสร้างคำจำกัดความจะเริ่มจากสิ่งเฉพาะไปสู่สิ่งสากลต่าง ๆ ในสังคม เพื่อมาสร้างเป็นค่านิยม
 - 5) นิรนัย คือ การสรุปจากสิ่งสากลทั่วไปที่คนยอมรับไปสู่สิ่งเฉพาะ
- จะเห็นว่า คำว่าการให้เหตุผล คำว่าอุปนัย มีใช้มานานแล้ว (สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากอินเทอร์เน็ต โดยอาศัยคำค้น เช่น ปรัชญากรีกสมัยรุ่งเรือง)

ขั้นที่ 2 ขั้นสำรวจและค้นพบ

ผู้สอนยกตัวอย่างให้ผู้เรียนสังเกตความแตกต่างของข้อความต่อไปนี้ แล้วร่วมกันอภิปราย



ข้อความที่ 1 เราเคยเห็นว่ามีปลาหลายชนิดออกลูกเป็นไข่ ดังนั้นปลาทุกชนิดออกลูกเป็นไข่

ข้อความที่ 2 คนทุกคนต้องหายใจ ลู่วายใจได้ ดังนั้นลู่วายเป็นคน

ข้อความที่ 3 นายสุชาติสังเกตตัวเองพบว่า ตลอดสัปดาห์ที่ผ่านมาเมื่อเขาดื่มนม เขาจะมี
อาการท้องเสีย ดังนั้นนมเป็นสาเหตุที่ทำให้เขาท้องเสีย

ข้อความที่ 4 ในการตรวจสอบความสะอาดของน้ำดื่มบรรจุขวดยี่ห้อหนึ่ง พบว่าเมื่อสุ่ม
น้ำดื่มมา 100 ขวด นำไปตรวจสอบความสะอาด พบว่าผ่านเกณฑ์
มาตรฐานความสะอาดของน้ำดื่ม ดังนั้นน้ำดื่มยี่ห้อนี้มีความสะอาดทุกขวด

ข้อความที่ 5 จำนวนคู่ หมายถึง จำนวนเต็มที่หารด้วย 2 ลงตัว 10 หารด้วย 2 ลงตัว
ดังนั้น 10 เป็นจำนวนคู่

ซึ่งผู้เรียนควรสำรวจได้ว่าแต่ละข้อความประกอบด้วย 2 ส่วน คือส่วนที่เป็นเหตุกับส่วนที่เป็นผล และ
ผู้เรียนจะค้นพบได้ว่า ข้อความทั้ง 5 ข้อความนี้แบ่งได้เป็น 2 กลุ่ม กลุ่มแรกคือข้อความที่ 1 3 และ 4
เป็นข้อมูลที่ได้จากการสังเกตหรือการทำให้ซ้ำ ๆ ส่วนผลสรุปจะเป็นผลสรุปในรูปทั่วไปหรือข้อความ
คาดการณ์ ส่วนกลุ่มที่สองคือข้อความที่ 2 และ 5 ซึ่งมีผลสรุปเฉพาะกรณี

ขั้นที่ 3 ขั้นอธิบายและลงข้อสรุป

1. ผู้สอนอธิบายการให้เหตุผลแบบอุปนัย หมายถึงวิธีการสรุปผลในการค้นหาความจริง
จากการสังเกตหรือการทดลองหลาย ๆ ครั้งจากกรณีย่อย ๆ แล้วนำมาสรุปเป็นความรู้ทั่วไปหรือข้อความ
คาดการณ์ แล้วให้ผู้เรียนสรุปข้อความที่ 1 ถึงข้อความที่ 5 ข้อความใดบ้างเป็นการให้เหตุผลแบบอุปนัย

2. ผู้สอนให้ผู้เรียนพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ 1, 2, 4, 8, ... ให้ผู้เรียนหาจำนวนถัดไป

2 จำนวนจากแบบรูปนี้ พร้อมแสดงเหตุผลด้วย

3. ผู้สอนให้ผู้เรียนพิจารณาตัวอย่างที่ยากขึ้น เช่น

$$\begin{array}{rcl} 1^3 & = & 1 \\ 1^3 + 2^3 & = & 9 \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 & = & 36 \\ & \vdots & \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 & = & ? \end{array}$$

ผู้สอนถามถึงที่มาของคำตอบ ผู้เรียนมีแนวคิดอย่างไร ให้ผู้เรียนร่วมกันแสดงความคิดเห็น

4. ผู้สอนให้ผู้เรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 3 คน แล้วผู้สอนมอบหมายงานแต่ละกลุ่ม กลุ่มละ

1 ข้อ โดยใช้ใบงานที่ 1 ให้เวลาคิด 3 นาที สุ่มตัวแทนเสนอแนวคิดหน้าห้อง โดยผู้สอนสอบถามว่ามีกลุ่มใด
ที่มีความคิดแตกต่างให้ออกมานำเสนอ เพื่อผู้เรียนจะได้เห็นแนวคิดที่หลากหลายเป็นการส่งเสริมความคิด
สร้างสรรค์

ขั้นที่ 4 ขั้นขยายความรู้

1. ผู้สอนใช้การถาม – ตอบ เพื่อเพิ่มเติมหรือสรุปเรื่องการให้เหตุผลแบบอุปนัย ในประเด็น

ต่อไปนี้เป็น

1) การให้เหตุผลแบบอุปนัยโดยทั่วไปมักนิยมใช้กับการศึกษาค้นคว้าเบื้องต้นทางวิทยาศาสตร์ เช่น ผลสรุปจากการทำโครงการวิทยาศาสตร์

2) ข้อสรุปของการให้เหตุผลแบบอุปนัยอาจไม่จริงเสมอไป เช่น กำหนด

$$F(n) = n^2 - 79n + 1601 \text{ เมื่อ } n \in \mathbb{N}$$

เมื่อ แทน n ด้วย 1 จะได้ $F(1) = 1^2 - 79(1) + 1601 = 1523$ เป็นจำนวนเฉพาะ

แทน n ด้วย 2 จะได้ $F(2) = 2^2 - 79(2) + 1601 = 1447$ เป็นจำนวนเฉพาะ

แทน n ด้วย 3 จะได้ $F(3) = 3^2 - 79(3) + 1601 = 1373$ เป็นจำนวนเฉพาะ

แทน n ด้วย 4 จะได้ $F(4) = 4^2 - 79(4) + 1601 = 1301$ เป็นจำนวนเฉพาะ

แทน n ด้วย 10 จะได้ $F(10) = 10^2 - 79(10) + 1601 = 911$ เป็นจำนวนเฉพาะ

แทน n ด้วย 20 จะได้ $F(20) = 20^2 - 79(20) + 1601 = 421$ เป็นจำนวนเฉพาะ

จะสรุปว่า $F(n)$ เป็นจำนวนเฉพาะ

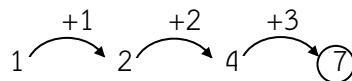
เมื่อ แทน n ด้วย 80 จะได้ $F(80) = 80^2 - 79(80) + 1601 = 41 \times 41$ ซึ่งไม่ใช่จำนวนเฉพาะ

3) การสรุปผลของการให้เหตุผลแบบอุปนัยอาจขึ้นอยู่กับประสบการณ์ของผู้สรุป เช่น การทายเพศของทารกที่อยู่ในครรภ์

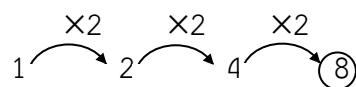
4) ข้อสรุปที่ได้จากการให้เหตุผลแบบอุปนัยไม่จำเป็นต้องเหมือนกัน เช่น

กำหนดรูปแบบ 1, 2, 4, x จำนวนที่แทน x อาจแตกต่างกัน

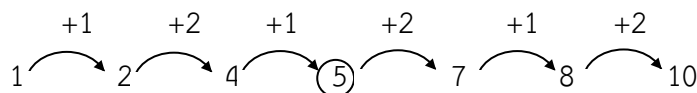
เช่น อาจแทน x ด้วย 7 เพราะพิจารณาจากแบบรูป ดังนี้



หรือ อาจแทน x ด้วย 8 เพราะพิจารณาจากแบบรูป ดังนี้



หรือ อาจแทน x ด้วย 5 เพราะพิจารณาจากแบบรูป ดังนี้



2. ผู้สอนให้ผู้เรียนฝึกทักษะเพิ่มเติม โดยใช้โจทย์จากหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน

คณิตศาสตร์ เล่ม 1



ขั้นที่ 5 ขั้นประเมินผล

1. ผู้สอนให้ผู้เรียนทำแบบทดสอบดังนี้ (แจกโจทย์ให้ผู้เรียนแต่ละคน ให้เวลา 3 นาที)

พิจารณาแบบรูปของสมการที่อยู่ในรูปเศษส่วนต่อไปนี้

1)	$\frac{2}{1 \times 2 \times 3}$	=	$\frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}$
2)	$\frac{2}{2 \times 3 \times 4}$	=	$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$
3)	$\frac{2}{3 \times 4 \times 5}$	=	$\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}$
4)	$\frac{2}{4 \times 5 \times 6}$	=	$\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}$

จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) ถ้า $\frac{2}{11 \times 12 \times 13} = \frac{1}{a} - \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$ จงหาค่าของ $a + b + c$
 - 2) ถ้า $\frac{2}{a} = \frac{1}{14} - \frac{2}{15} + \frac{1}{16}$ จงหาค่าของ a ในรูปผลสำเร็จ
 - 3) ถ้า $\frac{2}{9240} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ จงหาค่าของ b
2. ผู้สอนสังเกตจากการตอบคำถาม การทำงานกลุ่ม การนำเสนองาน

5. สื่อการเรียนรู้ เอกสารที่ใช้

1. ใบงานที่ 1 เรื่อง โจทย์ฝึกเรื่องการให้เหตุผลแบบอุปนัย
2. หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6
3. คู่มือครูสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6

ใบงานที่ 1

เรื่อง การให้เหตุผลแบบอุปนัย

1. จากแบบรูปที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาคำตอบโดยใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย

1) จาก 1, 3, 5, 7, x, 11, y, z และ 3, 18, 108, a, 3888, 23328

จงหาค่าของ $a + z$

2) จงหาค่าของ $2x - y + z$ จาก

	9			18			27			99		
1	3	5	2	6	10	3	9	15	..	x	y	z

3) กำหนดให้

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} = \frac{1}{3 \cdot 4}$$

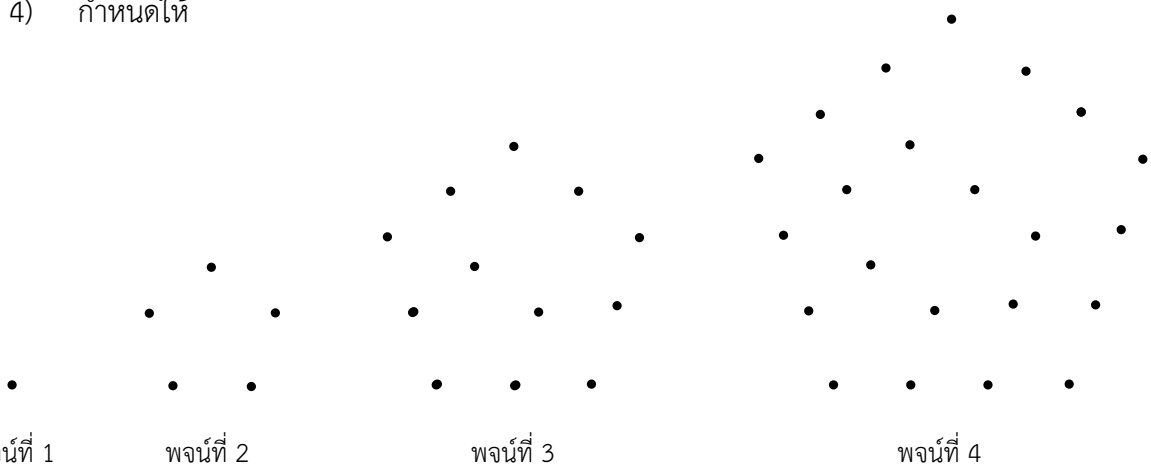
...

$$\frac{1}{25} - \frac{1}{26} = \frac{1}{650} = \frac{1}{25 \cdot 26}$$

...

จงหาค่าของ $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{40 \cdot 41}$

4) กำหนดให้



จงหาว่าพจน์ที่ 20 รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่าจะมีจุดทั้งหมดกี่จุด



3. พิจารณาแบบรูปต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 6^2 - 5^2 &= 11 \\ 56^2 - 45^2 &= 1111 \\ 556^2 - 445^2 &= 111111 \\ &\vdots \\ 5555556^2 - 4444445^2 &= x \end{aligned}$$

จงหาค่าของ x พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลประกอบ

.....

.....

.....

.....

4. พิจารณาการให้เหตุผลแบบอุปนัยต่อไปนี้

42หารด้วย 3 ลงตัว เพราะ $(4 + 2) \div 3$ ลงตัว

168 หารด้วย 3 ลงตัว เพราะ $(1 + 6 + 8) \div 3$ ลงตัว

2691 หารด้วย 3 ลงตัว เพราะ $(2 + 6 + 9 + 1) \div 3$ ลงตัว

8109 หารด้วย 3 ลงตัว เพราะ $(8 + 1 + 0 + 9) \div 3$ ลงตัว

ถ้า 1743a1905 หารด้วย 3 ลงตัว เมื่อ a แทนเลขโดด แล้วสามารถเขียนแทนจำนวน 1743a1905 ด้วยจำนวนที่ต่างกันได้ทั้งหมดกี่จำนวน ได้แก่จำนวนใดบ้าง พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลประกอบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....



5. เลือกจำนวนนับมา 1 จำนวน และปฏิบัติตามขั้นตอนต่อไปนี้

- 1) คูณจำนวนนับที่เลือกไว้ด้วย 4
- 2) บวกผลลัพธ์ในข้อ 1) ด้วย 6
- 3) ทหารผลบวกในข้อ 2) ด้วย 2
- 4) ลบผลหารในข้อ 3) ด้วย 3

จะมีข้อสรุปอย่างไร จงอธิบายโดยใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ใบความรู้ที่ 1 เรื่อง การให้เหตุผลแบบนิรนัย

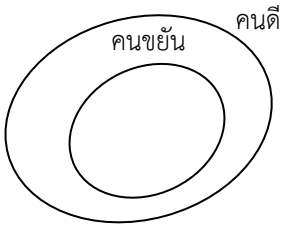
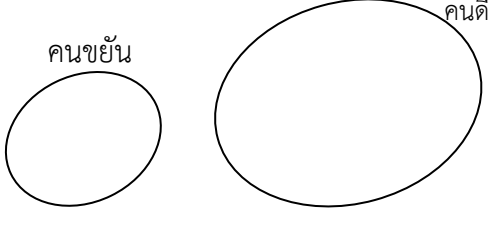
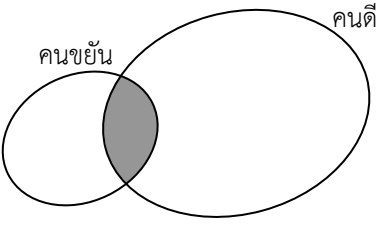
การให้เหตุผลแบบนิรนัย เป็นการนำความรู้พื้นฐานซึ่งอาจเป็นความเชื่อ ข้อตกลง กฎ หรือ บทนิยาม ซึ่งเป็นสิ่งที่รู้มาก่อนและยอมรับความเป็นจริง เพื่อหาเหตุผลนำไปสู่ข้อสรุป

การตรวจสอบว่าข้อสรุปสมเหตุสมผลหรือไม่นั้น สามารถตรวจสอบได้หลายวิธี วิธีหนึ่งคือการเขียนแผนภาพตามเหตุหรือสมมติฐานที่เป็นไปได้

– ถ้าแผนภาพที่เขียนมีกรณีที่เป็นไปได้ทุกกรณีแสดงผลตามที่กำหนด จะได้ว่าการสรุปผลนั้นสมเหตุสมผล

– ถ้ามีแผนภาพที่เขียนมีแผนภาพอย่างน้อย 1 กรณีที่ไม่แสดงผลตามที่กำหนดไว้ การสรุปผลนั้นไม่สมเหตุสมผล

ตัวอย่างของข้อความและแผนภาพที่แสดงความหมายของข้อความที่ใช้ในการอ้างเหตุผล

ข้อความ	แผนภาพ
1. คนขยัน <u>ทุกคน</u> เป็นคนดี	
2. <u>ไม่มี</u> คนขยันคนใดเป็นคนดี	
3. มีคนขยัน <u>บางคน</u> เป็นคนดี	

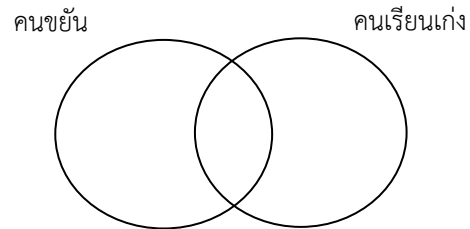
ข้อความ	แผนภาพ
4. มีคนขยัน <u>บางคน</u> ไม่ใช่คนดี	
5. <u>สุธี</u> เป็นคนขยัน	
6. <u>สายชล</u> ไม่เป็นคนขยัน	

- หมายเหตุ**
1. แผนภาพในข้อความที่ 3 และ 4 แต่ละส่วนที่แรเงาไว้ไม่จำเป็นต้องแรเงา
 2. ในการแสดงว่าผลสรุปไม่สมเหตุสมผลไม่จำเป็นต้องเขียนแผนภาพทั้งหมดทุกกรณี ยกตัวอย่างแผนภาพที่แสดงว่าข้อสรุปนั้นไม่สมเหตุสมผลเพียงกรณีเดียวก็พอ
 3. ข้อความถ้าเป็นคนขยันแล้วเป็นคนดี มีความหมายเช่นเดียวกับคนขยันทุกคนเป็นคนดี
 4. ข้อความบางข้อความอาจจะคำว่า “ทุกอย่าง” หรือ “บางอย่าง” ไว้ เช่น
แมวเป็นสัตว์ที่มีสี่ขา หมายถึง แมวทุกตัวเป็นสัตว์ที่มีสี่ขา
มีรถประจำทางเป็นรถปรับอากาศ หมายถึง รถประจำทางบางคัน
เป็นรถปรับอากาศ

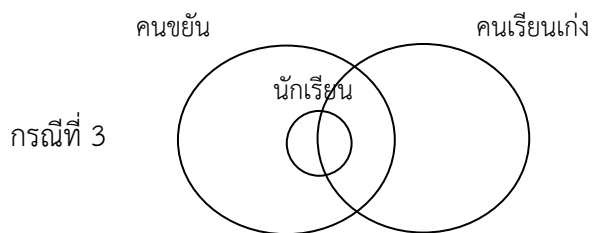
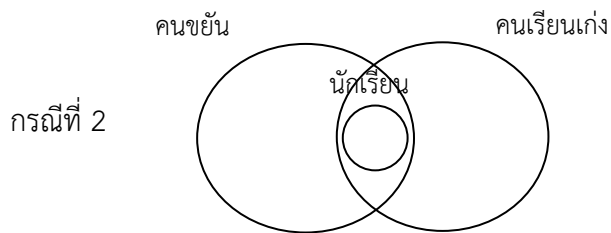
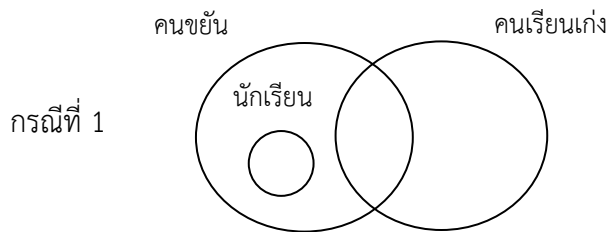
ตัวอย่างการเขียนแผนภาพ ตามขั้นตอนของเหตุหรือสมมติฐาน

- เช่น เหตุ
1. คนขยันบางคนเรียนเก่ง
 2. นักเรียนทุกคนเป็นคนขยัน
 3. นายวีระเป็นนักเรียนที่ขยันและเรียนเก่ง

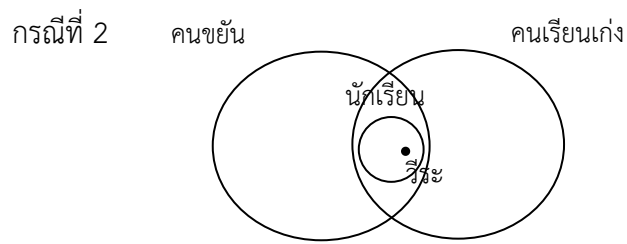
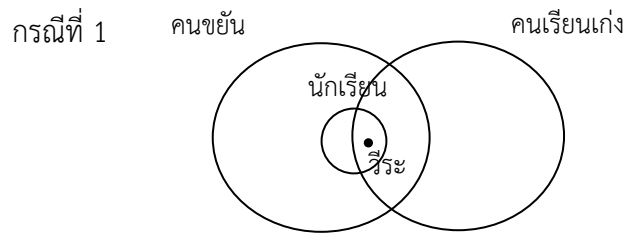
เขียนแผนภาพแทนเหตุ 1 ที่เป็นไปได้ 1 กรณี ดังนี้



เขียนแผนภาพตามเหตุ 1 และ 2 ที่เป็นไปได้ มี 3 กรณี ดังนี้



เขียนแผนภาพตามเหตุ 1, 2 และ 3 ที่เป็นไปได้ 2 กรณีดังนี้



ใบความรู้ที่ 2 เรื่อง การพิสูจน์ที่เป็นพื้นฐาน

1. การพิสูจน์เป็นรูปแบบอย่างหนึ่งของการให้เหตุผลแบบนิรนัย

2. ความรู้พื้นฐานเรื่องสมมูล

รูปแบบประพจน์ที่สมมูลกันที่ใช้ในการพิสูจน์

$$1) p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

$$2) p \vee q \equiv \sim p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow p$$

$$3) p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$4) (p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

3. การพิสูจน์ $p \rightarrow q$

3.1 การพิสูจน์โดยตรง มีรูปแบบหลักดังนี้

พิสูจน์ สมมติ p

:

ดังนั้น q

เช่น จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ ถ้า a เป็นจำนวนคู่แล้ว $a + 10$ เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

สมมติว่า a เป็นจำนวนคู่

จะมีจำนวนเต็ม m ที่ทำให้ $a = 2m$

จะได้ $a + 10 = 2m + 10 = 2(m + 5)$

ดังนั้น $a + 10$ เป็นจำนวนคู่

นั่นคือสำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ ถ้า a เป็นจำนวนคู่แล้ว $a + 10$ เป็นจำนวนคู่

3.2 การพิสูจน์โดยใช้การแย้งสลับที่ของ $p \rightarrow q$ หรือ การพิสูจน์ทางอ้อม

เนื่องจาก $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$ จึงพิสูจน์ข้อความในรูป $\sim q \rightarrow \sim p$

แทนข้อความในรูป $p \rightarrow q$ ซึ่งมีรูปแบบหลักดังนี้

พิสูจน์ สมมติ $\sim q$

:

ดังนั้น $\sim p$



เช่น จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่แล้ว a เป็นจำนวนคู่
จะพิสูจน์ข้อความ “สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ ถ้า a เป็นจำนวนคี่แล้ว a^2 เป็นจำนวนคี่”
แทนข้อความที่โจทย์กำหนด

พิสูจน์ ให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

สมมติว่า a เป็นจำนวนคี่

จะมีจำนวนเต็ม m ที่ทำให้ $a = 2m + 1$

จะได้ $a^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$

ดังนั้น a^2 เป็นจำนวนคี่

จะได้ ถ้า a เป็นจำนวนคี่แล้ว a^2 เป็นจำนวนคี่

นั่นคือสำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่แล้ว a เป็นจำนวนคู่

4. การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง

เนื่องจาก $[\sim p \rightarrow (q \wedge \sim q)] \rightarrow p$ เป็นสัจนิรันดร์ ดังนั้น ถ้าพิสูจน์ได้ว่า $\sim p \rightarrow (q \wedge \sim q)$
เป็นจริง ก็สรุปได้ว่า p เป็นจริง มีรูปแบบหลักดังนี้

พิสูจน์สมมติว่า $\sim p$

⋮

ดังนั้น $q \wedge \sim q$ เกิดข้อขัดแย้ง

จะได้ p

เช่น จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว $a + 10$ เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ ให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ซึ่ง a เป็นจำนวนคู่

สมมติว่า $a + 10$ เป็นจำนวนคี่

จะมีจำนวนเต็ม m ที่ทำให้ $a + 10 = 2m + 1$

จะได้ $a = 2(m - 5) + 1$

ดังนั้น a เป็นจำนวนคี่ ขัดแย้งกับสมมติฐาน a เป็นจำนวนคู่

จะได้ $a + 10$ เป็นจำนวนคู่

นั่นคือ สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว $a + 10$ เป็นจำนวนคู่

5. การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งกล่าวว่า สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ให้ $P(n)$ เป็นประโยคเปิด
ซึ่งมี n เป็นตัวแปร ถ้า $P(1)$ จริง และ $[\forall k \in \mathbb{N}, P(k) \text{ จริง} \rightarrow P(k + 1) \text{ จริง}]$ แล้ว $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ จริง ซึ่งมีรูปแบบ
หลักดังนี้ พิสูจน์ สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ให้ $P(n)$ แทน (สิ่งที่ต้องการพิสูจน์)

ขั้นฐาน พิจารณา $n = 1$ (หรือ n เท่ากับเงื่อนไขน้อยที่สุดที่โจทย์กำหนด)

ดังนั้น $P(1)$ จริง

ขั้นอุปนัยให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ซึ่ง $P(k)$ จริง

⋮

ดังนั้น $P(k + 1)$ จริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ จริงทุกจำนวนนับ n เช่น

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ว่า สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ใด ๆ

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

พิสูจน์ สำหรับแต่ละจำนวนนับ n

$$\text{ให้ } P(n) \text{ แทน } 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\text{ขั้นฐาน พิสูจน์ } n = 1 \text{ จะได้ } 1 \cdot 2 = 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}$$

ดังนั้น $P(1)$ จริง

ขั้นอุปนัยให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ซึ่ง $P(k)$ จริง

$$\text{นั่นคือ } 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k \cdot (k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

จะต้องแสดงว่า

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k \cdot (k+1) + (k+1) \cdot (k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k \cdot (k+1) + (k+1) \cdot (k+2) &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \\ &= (k+1)(k+2) \left(\frac{k}{3} + 1 \right) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ จริง

$$\text{โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า } 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

ทุกจำนวนนับ n

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ว่า สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ใด ๆ $\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

(จากโจทย์ข้อ 3 แบบฝึกหัด 2 – 2 เอกสารเสริมความรู้วิชาคณิตศาสตร์ ตรรกศาสตร์เบื้องต้นและวิธีการพิสูจน์ สสวท.)



พิสูจน์ สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ให้ $P(n)$ แทน $\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

ขั้นฐาน พิจารณา $n = 1$ จะได้ $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2+1}}$

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$0.5 < 0.57$$

ดังนั้น $P(1)$ จริง

ขั้นอุปนัยให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ซึ่ง $P(k)$ จริง

$$\text{นั่นคือ } \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$$

$$\text{จะต้องแสดงว่า } \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)(2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)(2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$$

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)(2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)(2k+2)} &< \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \left(\frac{2k+1}{2k+2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} \left(\frac{\sqrt{2k+3}}{\sqrt{2k+3}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{4k^2+8k+3}}{(2k+2)\sqrt{2k+3}} \left(\frac{1}{\frac{2k+2}{\sqrt{2k+3}}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{4k^2+8k+3}}{\sqrt{2k+3}} \\ &< \frac{1}{\sqrt{2k+3}} \end{aligned}$$

เพราะว่า $4k^2 + 8k + 3 < 4k^2 + 8k + 4$ ทำให้ $\sqrt{4k^2 + 8k + 3} < 2k + 2$

ดังนั้น $P(k+1)$ จริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ ทุกจำนวนนับ n

ใบงานที่ 2

เรื่อง การพิสูจน์ในรูป $p \leftrightarrow q$

จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ $a^3 + 1$ เป็นจำนวนคู่ก็ต่อเมื่อ a เป็นจำนวนคี่
เขียนการพิสูจน์คร่าว ๆ ดังนี้

กรณีที่ 1 พิสูจน์ข้อความ

.....

.....

พิสูจน์ สมมติ

.....

.....

.....

.....

.....

ดังนั้น.....

นั่นคือ.....

.....

กรณีที่ 2 พิสูจน์ข้อความ

.....

.....

พิสูจน์ สมมติ

.....

.....

.....

.....

.....

ดังนั้น.....



นั่นคือ.....
.....

จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 จะได้ว่า.....
.....

ใบงานที่ 3

เรื่อง การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

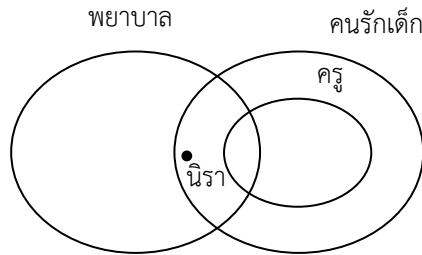
จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ $1! + 2(2!) + 3(3!) + \dots + n(n!) = (n+1)! - 1$

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary-ruled notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

5. กำหนด เหตุ 1. คนร้ายบางคนเป็นคนเกียจคร้าน
2. ไม่มีคนเกียจคร้านที่เป็นคนใจกว้าง
จงเขียนแผนภาพที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งสองมา 1 แผนภาพ

ตอบ

6. จากแผนภาพ



ข้อใดบ้างสรุปได้สมเหตุสมผล

- 1) นิราเป็นครูหรือพยาบาล
- 2) นิราเป็นพยาบาลที่รักเด็ก
- 3) นิราไม่ได้เป็นครูแต่เป็นคนรักเด็ก

ตอบ

7. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ ข้อใดบ้างที่มีผลสรุปสมเหตุสมผล

- ก. เหตุ 1. ถ้าเป็นคนไทยแล้วต้องมีบัตรประชาชน
2. ชาวสวนในจังหวัดจันทบุรีเป็นคนไทย
3. นายสุรินทร์เป็นชาวสวนในจังหวัดจันทบุรี

ผล นายสุรินทร์มีบัตรประชาชน

- ข. เหตุ 1. สิ่งมีชีวิตทุกประเภทต้องหายใจ
2. ต้นไม้ทุกต้นเป็นสิ่งมีชีวิต
3. ต้นมะม่วงเป็นสิ่งมีชีวิต

ผล ต้นมะม่วงเป็นต้นไม้

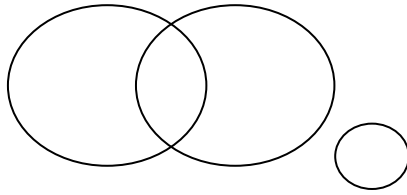
ตอบ

8. กำหนด เหตุ 1. สัตว์ครึ่งบกครึ่งน้ำบางชนิดอาศัยอยู่บนบก
2. ปลาทะเลไม่ใช่สัตว์ครึ่งบกครึ่งน้ำ
ผล ปลาทะเลบางชนิดอาศัยอยู่บนบก

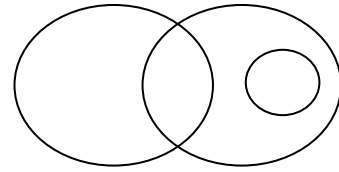


แผนภาพในข้อใดที่สอดคล้องกับเหตุและผลที่กำหนด

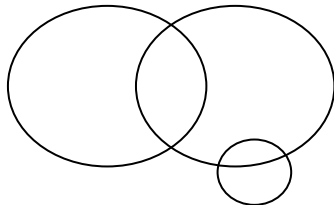
ก.



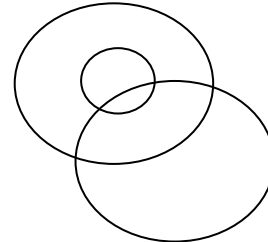
ข.



ค.



ง.



ตอบ

จงพิสูจน์ว่า ถ้า x และ y เป็นจำนวนคู่ แล้ว $x - y$ เป็นจำนวนคู่

พิจารณาการพิสูจน์ข้อ 9 – 10 ว่าถูกต้องหรือไม่ ถ้าถูกต้องให้ระบุว่าเป็นการพิสูจน์แบบใด แต่ถ้าไม่ถูกต้องให้ขีดเส้นใต้ข้อความที่ผิดตั้งแต่เริ่มแรกในการพิสูจน์

9. พิสูจน์ สมมติว่า x, y เป็นจำนวนคู่

จะมีจำนวนเต็ม m และ n ที่ทำให้ $x = 2m$ และ $y = 2n$

จะได้ $x - y = 2(m - n)$

ดังนั้น $x - y$ เป็นจำนวนคู่

ตอบ

10. พิสูจน์ สมมติว่า x, y เป็นจำนวนคี่ และ $x - y$ เป็นจำนวนคี่

จะมีจำนวนเต็ม m และ n ที่ทำให้ $x = 2m + 1$ และ $y = 2n + 1$

จะได้ $x - y = (2m + 1) - (2n + 1) = 2(m - n)$

ดังนั้น $x - y$ เป็นจำนวนคู่ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ตอบ

เอกสารสำหรับวิทยากร

เฉลยใบงานที่ 1 ข้อ 1
เรื่อง การให้เหตุผลแบบอุปนัย

- 1) แบบรูป 1, 3, 5, 7, x, 11, y, z จากการสังเกตสมาชิกตัวถัด ๆ ไปมาจากการเพิ่มทีละ 2

$$\begin{aligned}\text{จึงได้ } x &= 7 + 2 = 9 \\ y &= 11 + 2 = 13 \\ z &= 13 + 2 = 15\end{aligned}$$

แบบรูป 3, 18, 108, a, 3888, 23328 จากการสังเกตสมาชิกตัวถัด ๆ ไปมาจากการคูณ

ตัวข้างหน้าคูณด้วย 6 จึงได้ $a = 108 \times 6 = 648$

ดังนั้น $a + z = 648 + 15 = 663$

- 2) จากการสังเกต แบบรูปตัวข้างบนเรียงได้ดังนี้ 9, 18, 27, ..., 99

มาจาก $9 \times 1, 9 \times 2, 9 \times 3, \dots, 9 \times 11$ แบบรูปตัวล่างด้านซ้ายสุดเรียงได้ดังนี้

1, 2, 3, ..., x

จะได้ $x = 11$ จึงสอดคล้องแบบรูปข้างบน แบบรูปตัวล่างด้านกลางเรียงได้ดังนี้

3, 6, 9, ..., y

จะได้ $y = 33$ แบบรูปตัวล่างด้านขวาสุดเรียงได้ดังนี้ 5, 10, 15, ..., z

จะได้ $z = 55$

ดังนั้น $2x - y + z = 2(11) - 33 + 55 = 44$

- 3) จากการสังเกต พิจารณา

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3}$$

จะได้ $1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3}$

พิจารณา $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2}$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3}$$

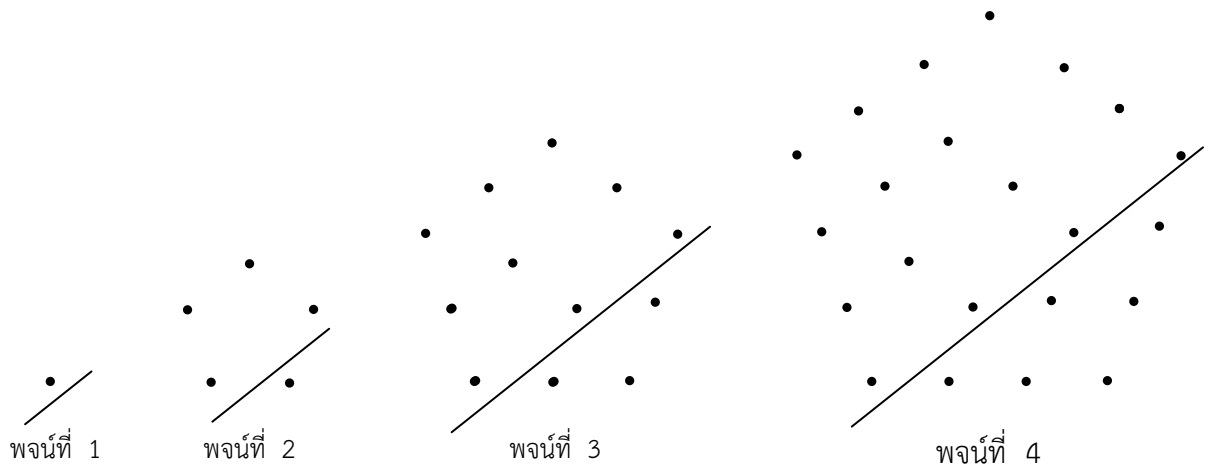
$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \cdot 4}$$

จะได้ $1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4}$

จึงได้ $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{40 \cdot 41} = 1 - \frac{1}{41} = \frac{40}{41}$



4)



เมื่อลากเส้นแบ่งจุดเป็น 2 ส่วน จากการสังเกต จะได้พจน์ที่ 20

ส่วนล่าง จำนวนจุด $1 + 2 + \dots + 19 = \frac{19(20)}{2} = 190$ จุด

ส่วนบน จำนวนจุด $20^2 = 400$ จุด

ดังนั้น พจน์ที่ 20 มีจำนวนจุดทั้งหมด $190 + 400 = 590$ จุด

5) มีลูกปัดทั้งหมด 52 ลูก ที่เห็นอยู่ภายนอก มี 31 ลูก จะอยู่ใน 21 ลูก

ดังนี้

ดังนั้นใน มีลูกปัดสีขาวอยู่ 16 ลูก

6)

$$\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \hline 4 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 4 & 2 \\ \hline 6 & 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 6 & 3 \\ \hline 9 & 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 8 & 4 \\ \hline 13 & a \end{array}$$

ให้มีรูปแบบเป็น $\begin{array}{c|c} B & A \\ \hline C & D \end{array}$

จากการสังเกต จะได้ว่า $D = AB + C$

ดังนั้น $a = (8 \times 4) + 13 = 45$

เฉลยใบงานที่ 2

เรื่อง การพิสูจน์ในรูป $p \leftrightarrow q$

จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ $a^3 + 1$ เป็นจำนวนคู่ก็ต่อเมื่อ a เป็นจำนวนคี่
เขียนการพิสูจน์คร่าว ๆ ดังนี้

กรณีที่ 1 พิสูจน์ข้อความ ถ้า $a^3 + 1$ เป็นจำนวนคู่แล้ว a เป็นจำนวนคี่
โดยพิสูจน์ข้อความ ถ้า a เป็นจำนวนคู่แล้ว $a^3 + 1$ เป็นจำนวนคี่ แทน
พิสูจน์ สมมติ a เป็นจำนวนคู่
:
:
ดังนั้น $a^3 + 1$ เป็นจำนวนคี่
นั่นคือ ถ้า a เป็นจำนวนคู่แล้ว $a^3 + 1$ เป็นจำนวนคี่
จะได้ ถ้า $a^3 + 1$ เป็นจำนวนคู่แล้ว a เป็นจำนวนคี่

กรณีที่ 2 พิสูจน์ข้อความ ถ้า a เป็นจำนวนคี่แล้ว $a^3 + 1$ เป็นจำนวนคู่
พิสูจน์ สมมติ a เป็นจำนวนคี่
:
:
ดังนั้น $a^3 + 1$ เป็นจำนวนคู่
นั่นคือ ถ้า a เป็นจำนวนคี่แล้ว $a^3 + 1$ เป็นจำนวนคู่

จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 จะได้ว่า สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ $a^3 + 1$ เป็นจำนวนคู่ก็ต่อเมื่อ a เป็นจำนวนคี่



เฉลยใบงานที่ 3 เรื่อง การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ $1! + 2(2!) + 3(3!) + \dots + n(n!) = (n + 1)! - 1$

พิสูจน์ สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ใด ๆ ให้ $P(n)$ แทน $1! + 2(2!) + 3(3!) + \dots + n(n!) = (n + 1)! - 1$

ขั้นฐาน พิจารณา $n = 1$

$$\text{จะได้ } 1! = 1 = 2 - 1 = (1 + 1)! - 1$$

ดังนั้น $P(1)$ จริง

ขั้นอุปนัย ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ซึ่ง $P(k)$ จริง

$$\text{นั่นคือ } 1! + 2(2!) + 3(3!) + \dots + k(k!) = (k + 1)! - 1$$

$$\text{จะต้องแสดงว่า } 1! + 2(2!) + 3(3!) + \dots + k(k!) + (k + 1)(k + 1)! = (k + 1 + 1)! - 1$$

$$= (k + 2)! - 1$$

$$\text{เนื่องจาก } 1! + 2(2!) + 3(3!) + \dots + k(k!) + (k + 1)(k + 1)! = (k + 1)! - 1 + (k + 1)(k + 1)!$$

$$= (k + 1)!(1 + k + 1) - 1$$

$$= (k + 1)!(k + 2) - 1$$

$$= (k + 2)! - 1$$

ดังนั้น $P(k+1)$ จริง

$$\text{โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า } 1! + 2(2!) + 3(3!) + \dots + n(n!) = (n + 1)! - 1$$

สำหรับทุกจำนวนนับ n

เฉลยแบบตรวจสอบความเข้าใจ

เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์

1. จาก 1, 2, 3, 5, 8, a, 21, b, c สังเกตสมาชิกตัวถัดไปมาจากสมาชิกสองตัวที่อยู่

ข้างหน้าบวกกัน จะได้ $a = 5 + 8 = 13$

$$b = a + 21 = 13 + 21 = 34$$

$$c = 21 + b = 21 + 34 = 55$$

$$\text{ดังนั้น } a + c = 13 + 55 = 68$$

2. จากการสังเกต จำนวนที่อยู่ข้างบนจะเท่ากับจำนวนที่อยู่ด้านล่าง 3 จำนวนรวมกัน

$$\text{เช่น } 14 = 2 + 4 + 8, 28 = 4 + 8 + 16$$

จำนวนที่อยู่ข้างบนจะเป็น 7 เท่าของจำนวนที่อยู่ซ้ายมือสุด เช่น $14 = 7 \times 2, 28 = 7 \times 4$

จำนวนด้านล่าง เช่น $2, \xrightarrow{\times 2} 4, \xrightarrow{\times 2} 8$ หรือ $4, \xrightarrow{\times 2} 8, \xrightarrow{\times 2} 16$ จะได้จากการคูณด้วย 2

$$\text{ดังนั้น } b = 2a \text{ และ } c = 2b = 4a \text{ จึงได้ว่า } 7 \times a = 168$$

$$\text{ดังนั้น } a = 24 \text{ ทำให้ } b = 48 \text{ และ } c = 96 \text{ ซึ่ง } 24 + 48 + 96 = 168$$

$$\text{ดังนั้น } a - b + c = 24 - 48 + 96 = 72$$

3. จากการสังเกต การร้อยประคำมีรูปแบบเป็น ขาว 1 ดำ 4 ขาว 1 ดำ 3 ขาว 1 ดำ 2 ขาว 1

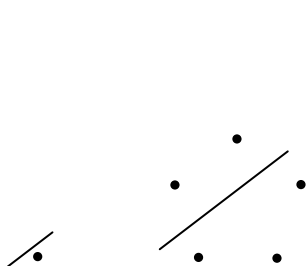
ดำ 1 ซึ่งมี 14 ลูก สมมติเรียก loop จากที่กำหนดมี 71 ลูก นั่นคือ $71 \div 14$ จะได้

5 loop และเหลือเศษสีขาว 1 ลูก ทำให้ทราบว่าใน มี  กับอีก

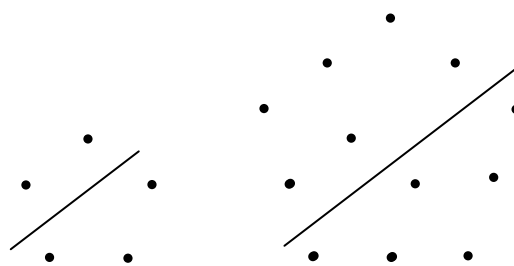
2 loop และ  จึงได้ว่ามีลูกประคำสีขาวอยู่ 11 ลูก และสีดำอยู่ 29 ลูก นั่นคือ

มีสีขาวน้อยกว่าสีดำอยู่ 18 ลูก

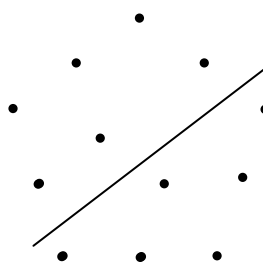
4. พิจารณาแบบรูปที่กำหนดให้



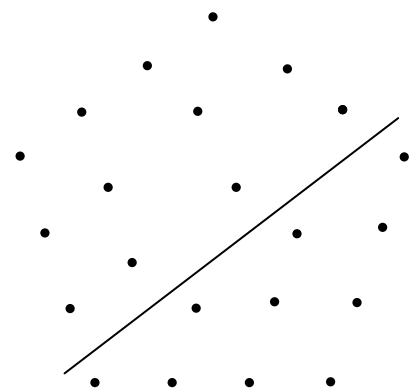
พจน์ที่ 1



พจน์ที่ 2



พจน์ที่ 3



พจน์ที่ 4



เมื่อลากเส้นแบ่งจุดเป็น 2 ส่วน จะสังเกตได้ว่า

จำนวนจุดที่ส่วนบน จะอยู่ในรูป $n(n-1)$ เมื่อ n แทนพจน์ที่ n เช่น

$$\text{พจน์ที่ 2 จะได้ } 2(2-1) = 2 \times 1$$

$$\text{พจน์ที่ 3 จะได้ } 3(3-1) = 3 \times 2$$

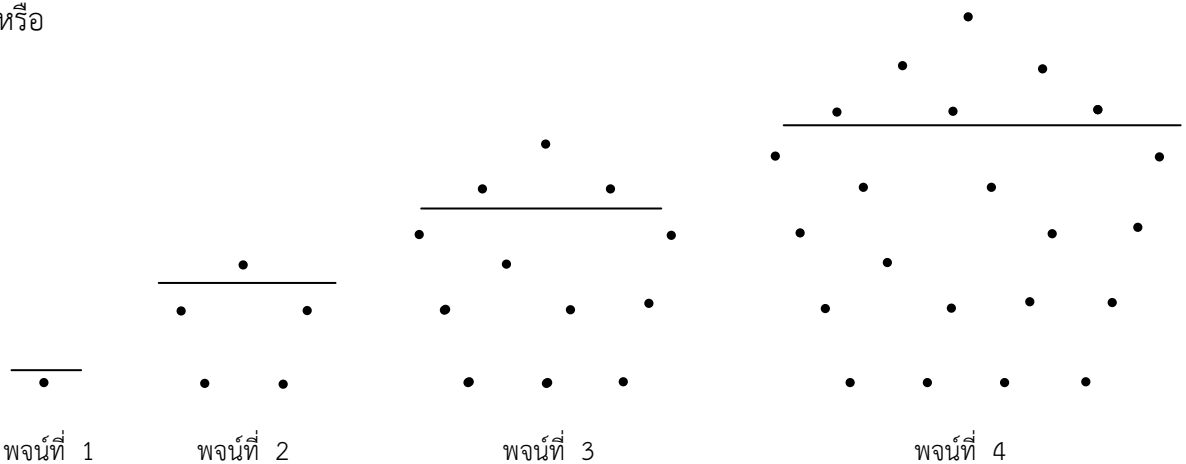
จำนวนจุดที่ส่วนล่าง จะอยู่ในรูป $\frac{n(n+1)}{2}$ เมื่อ n แทนพจน์ที่ n เช่น

$$\text{พจน์ที่ 2 จะได้ } 1+2 = \frac{2(2+1)}{2} = 3$$

$$\text{พจน์ที่ 3 จะได้ } 1+2+3 = \frac{3(3+1)}{2} = 6$$

$$\text{นั่นคือ พจน์ที่ } n \text{ มีจุดทั้งหมด } n(n-1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2} (3n-1)$$

หรือ



เมื่อลากเส้นแบ่งจุดเป็น 2 ส่วน จะสังเกตได้ว่า

จำนวนจุดที่ส่วนบน จะอยู่ในรูป $\frac{(n-1)n}{2}$ เมื่อ n แทนพจน์ที่ n เช่น

$$\text{พจน์ที่ 2 จะได้ } \frac{(2-1)2}{2} = 1$$

$$\text{พจน์ที่ 3 จะได้ } \frac{(3-1)3}{2} = 3$$

จำนวนจุดที่ส่วนล่าง จะอยู่ในรูป n^2 เมื่อ n แทนพจน์ที่ n เช่น

$$\text{พจน์ที่ 2 จะได้ } 2^2 = 4$$

$$\text{พจน์ที่ 3 จะได้ } 3^2 = 9$$

$$\text{นั่นคือ พจน์ที่ } n \text{ มีจำนวนจุดทั้งหมด } \frac{(n-1)n}{2} + n^2 = \frac{n}{2} (3n-1)$$

หรือ สังเกตได้ว่า จำนวนจุดในพจน์ที่ 1 เป็น $1 = 1$

$$\text{จำนวนจุดในพจน์ที่ 2 เป็น } 1+4 = 1+(3+1)$$

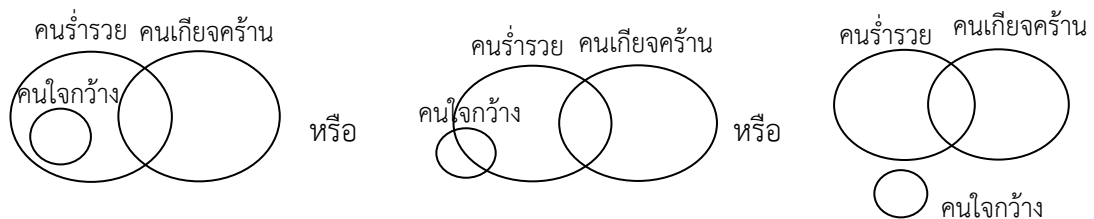
$$\text{จำนวนจุดในพจน์ที่ 3 เป็น } 1+4+7 = 1+(3+1)+(2 \cdot 3+1)$$

$$\text{จำนวนจุดในพจน์ที่ 4 เป็น } 1+4+7+10 = 1+(3+1)+(2 \cdot 3+1)+(3 \cdot 3+1)$$

$$\text{จึงได้ว่าจำนวนจุดในพจน์ที่ } n \text{ เป็น } 1+(1 \cdot 3+1)+(2 \cdot 3+1)+\dots+((n-1) \cdot 3+1)$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + 3(1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)) + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{(n - 1) \text{ ตัว}} \\
 &= 1 + 3 \frac{(n - 1)n}{2} + (n - 1) \\
 &= 3 \frac{(n - 1)n}{2} + n \\
 &= \frac{n}{2} (3n - 3 + 2) \\
 &= \frac{n}{2} (3n - 1)
 \end{aligned}$$

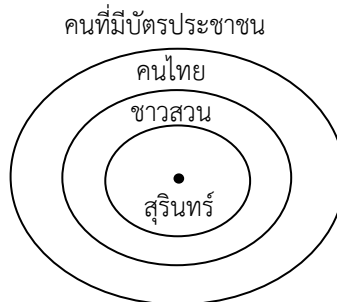
5. ตัวอย่างแผนภาพที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งสอง



6. ข้อ 2) และ 3)

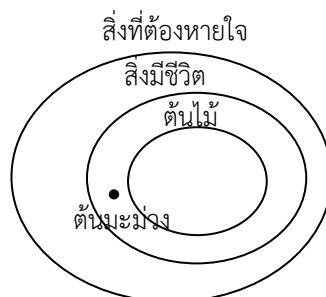
7. ข้อ ก.

ข้อ ก. เขียนแผนภาพได้ดังนี้



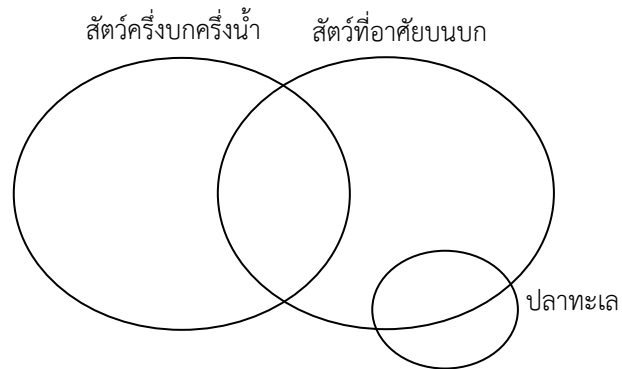
ดังนั้น ข้อ ก. มีผลสรุป สมเหตุสมผล

ข้อ ข. เขียนแผนภาพได้เช่น



ดังนั้น ข้อ ข. มีผลสรุป ไม่สมเหตุสมผล

8. ข้อ ค.



9. ถูกต้อง เป็นการพิสูจน์โดยตรง

10. ไม่ถูกต้อง พิสูจน์ สมมติว่า x, y เป็นจำนวนคี่ และ $x - y$ เป็นจำนวนคี่
 จะมีจำนวนเต็ม m และ n ที่ทำให้ $x = 2m + 1$ และ $y = 2n + 1$
 จะได้ $x - y = (2m + 1) - (2n + 1) = 2(m - n)$
 ดังนั้น $x - y$ เป็นจำนวนคู่ ทำให้เกิดการขัดแย้ง

แบบบันทึกผลการประเมิน
เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์

ชื่อ - นามสกุล (ผู้เข้ารับการอบรม)	การมีส่วนร่วมในกิจกรรม (5 คะแนน)	สรุปองค์ความรู้ (5 คะแนน)	รวม (10 คะแนน)
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			
9.			
10.			
11.			
12.			
13.			
14.			
15.			
16.			
17.			
18.			
19.			
20.			
21.			
22.			
23.			

ลงชื่อ.....ผู้กรอก



แบบประเมินการมีส่วนร่วมในกิจกรรม

คำชี้แจง: ให้เขียนเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องตามความเห็นของท่านที่ตรงกับความเป็นจริงมากที่สุด

ที่	ชื่อ - สกุล	ความร่วมมือในกิจกรรม	ความรับผิดชอบ	การเสนอความคิดเห็น	ความริเริ่มสร้างสรรค์	การเป็นผู้นำหรือผู้ตามที่ดี	การตรงเวลา	รวม (5 คะแนน)
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								

ลงชื่อ.....วิทยากร

วันที่ประเมิน.....

แบบประเมินการสรุปองค์ความรู้

คำชี้แจง: ให้เขียนเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องตามความเห็นของท่านที่ตรงกับความเป็นจริงมากที่สุด

ที่	ชื่อ - สกุล	ความครอบคลุม เนื้อหา	ความถูกต้อง ตรงประเด็น	รวม (5 คะแนน)
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				

เกณฑ์การให้คะแนน

ได้ 2 คะแนน เมื่อมีเครื่องหมาย ✓ อยู่ 2 ข้อ
 ได้ 1 คะแนน เมื่อมีเครื่องหมาย ✓ อยู่ 1 ข้อ
 ได้ 0 คะแนน เมื่อไม่มีเครื่องหมาย ✓ อยู่เลย

ลงชื่อ.....วิทยากร
 วันที่ประเมิน.....



เรื่อง เทคนิคการนับและความน่าจะเป็น

แผนการอบรม

แผนการอบรมครูคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สำหรับครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่
เรื่อง เทคนิคการนับและความน่าจะเป็น
เวลา 4 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์ เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรม

1. มีความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับขอบข่ายเนื้อหาและสาระสำคัญของ เรื่อง เทคนิคการนับและความน่าจะเป็น
2. มีความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับ เรื่อง เทคนิคการนับและความน่าจะเป็น
3. สามารถออกแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้และได้แนวทางการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เทคนิคการนับและความน่าจะเป็น

สาระการเรียนรู้

1. เทคนิคการนับ
 - 1.1 การแจกกรณี
 - 1.2 แผนภาพต้นไม้
 - 1.3 กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ
2. ความน่าจะเป็น
 - 2.1 วิธีเรียงสับเปลี่ยน
 - 2.2 วิธีจัดหมู่
 - 2.3 ความน่าจะเป็น

สาระสำคัญ

1. แผนภาพต้นไม้ เป็น แผนภาพที่ใช้แสดงความสัมพันธ์ของการเกิดเหตุการณ์จากสิ่งต่าง ๆ ตั้งแต่ 2 สิ่งขึ้นไป โดยการนับจำนวนวิธีทั้งหมดที่เหตุการณ์อย่างใดอย่างหนึ่งจะเป็นไปได้ หรือจำนวนวิธีในการจัดชุดของสิ่งต่าง ๆ เพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจ
2. กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

หลักการคูณ

ถ้าการทำงานอย่างหนึ่งมี k ขั้นตอน ขั้นตอนที่หนึ่งมีวิธีเลือกทำได้ n_1 วิธี ในแต่ละวิธีของขั้นตอนที่หนึ่งมีวิธีเลือกทำขั้นตอนที่สองได้ n_2 วิธี ในแต่ละวิธีที่ทำงานขั้นตอนที่หนึ่ง และขั้นตอนที่สองมีวิธีเลือกทำขั้นตอนที่สามได้ n_3 วิธี เช่นนี้เรื่อยไปจนถึงขั้นตอนสุดท้ายคือ ขั้นตอนที่ k จะทำได้ n_k วิธีจำนวนทั้งหมดที่จะเลือกทำงาน k ขั้นตอน เท่ากับ $(n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k)$ วิธี



3. วิธีเรียงสับเปลี่ยน

วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

- 1) จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด เท่ากับ $n!$
- 2) จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยจัดเรียงครั้งละ r สิ่ง เท่ากับ $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ หรือ $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด

ถ้ามีสิ่งของอยู่ n สิ่ง ในจำนวนนี้มี n_1 สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่มที่หนึ่ง มี n_2 สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่มที่สอง ... มี n_k สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่มที่ k โดยที่ $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ แล้วจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่ง เท่ากับ $\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$

4. วิธีจัดหมู่

จำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง โดยเลือกคราวละ r สิ่ง ($0 \leq r < n$)

$$\text{เท่ากับ } C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

5. การทดลองสุ่ม ปริภูมิตัวอย่าง และเหตุการณ์

การทดลองสุ่ม คือ การทดลองหรือการกระทำใด ๆ ซึ่งทราบว่าผลลัพธ์อาจจะเป็นอะไรได้บ้าง แต่ไม่สามารถบอกได้อย่างถูกต้องแน่นอนว่าในแต่ละครั้งที่ทดลองผลที่เกิดขึ้นจะเป็นอะไร ในบรรดาผลลัพธ์ที่อาจเป็นได้เหล่านั้น

ปริภูมิตัวอย่าง คือ เซตของผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้จากการทดลองสุ่ม

เหตุการณ์ คือ สับเซตของปริภูมิตัวอย่าง หรือ เซตของสิ่งที่สนใจจากการทดลองสุ่ม

6. ความน่าจะเป็น

การหาความน่าจะเป็นโดยการคำนวณจากอัตราส่วนระหว่างจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ต่อจำนวนสมาชิกของปริภูมิตัวอย่าง จะต้องเขียนปริภูมิตัวอย่างให้ประกอบด้วยสมาชิกที่มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กันเท่านั้น

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน/ ยาก

นักเรียนส่วนใหญ่มีความเข้าใจคลาดเคลื่อนเรื่องเทคนิคการนับและความน่าจะเป็น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

1. แก้ปัญหาโดยใช้วิธีการที่หลากหลายไม่ได้ มักเข้าใจว่ามีวิธีการแก้ปัญหาความน่าจะเป็นเพียงวิธีการเดียว
2. มองไม่เห็นแผนภาพต้นไม้ภายใต้การคำนวณโดยใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ
3. เข้าใจว่า ปริภูมิตัวอย่างที่จะนำไปใช้หาความน่าจะเป็นของการโยนเหรียญบาทสองเหรียญแตกต่างจากปริภูมิตัวอย่างที่จะนำไปใช้หาความน่าจะเป็นของการโยนเหรียญบาทหนึ่งเหรียญและเหรียญห้าบาท

- หนึ่งเหรียญหรือเข้าใจว่า ปริภูมิตัวอย่างที่จะนำไปใช้หาความน่าจะเป็นของการโยนลูกเต๋าสองลูกที่เหมือนกันแตกต่างจากปริภูมิตัวอย่างที่จะนำไปใช้หาความน่าจะเป็นของการโยนลูกเต๋าสองลูกที่ต่างกัน เป็นต้น
4. เข้าใจว่าปริภูมิตัวอย่างที่จะนำไปใช้หาความน่าจะเป็นของการโยนเหรียญบาทสามเหรียญพร้อมกันหนึ่งครั้งแตกต่างจากปริภูมิตัวอย่างที่จะนำไปใช้หาความน่าจะเป็นของการโยนเหรียญบาทหนึ่งเหรียญสามครั้ง หรือเข้าใจว่า ปริภูมิตัวอย่างที่จะนำไปใช้หาความน่าจะเป็นของการโยนลูกเต๋าสองลูกหนึ่งครั้งแตกต่างจากผลลัพธ์จากการโยนลูกเต๋าสองครั้ง เป็นต้น
 5. นักเรียนไม่ทราบว่า จำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจะต้องนำผลลัพธ์ในแต่ละกรณีย่อยมาบวกหรือคูณกัน
 6. ไม่สามารถประยุกต์ความรู้ที่มีในการแก้โจทย์ปัญหาในสถานการณ์หนึ่งไปสู่อีกสถานการณ์หนึ่งได้ เช่น หาปริภูมิตัวอย่างที่จะนำไปใช้หาความน่าจะเป็นของการโยนเหรียญบาทหนึ่งเหรียญสามครั้งได้ แต่หาปริภูมิตัวอย่างที่จะนำไปใช้หาความน่าจะเป็นของการทำข้อสอบแบบถูกผิดจำนวนสามข้อไม่ได้ เป็นต้น
 7. ไม่เข้าใจความแตกต่างของปริภูมิตัวอย่างสำหรับการทดลองสุ่มหยิบวัตถุจากกล่องทึบในกรณีหยิบคราวละหนึ่งชิ้น หยิบพร้อมกัน หรือหยิบแล้วใส่คืนก่อนหยิบครั้งต่อไป
 8. ไม่เข้าใจว่าในการหาความน่าจะเป็น ต้องหาปริภูมิตัวอย่างให้ประกอบด้วยสมาชิกที่มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กันเท่านั้น
 9. เข้าใจว่าหากทำการทดลองสุ่มครั้งแรกแล้วได้ผลลัพธ์เป็นแบบหนึ่ง เมื่อทำการทดลองครั้งต่อ ๆ ไป โอกาสที่จะได้ผลลัพธ์นั้นอีกจะลดลง

สื่อและแหล่งการเรียนรู้

1. สำหรับผู้เข้ารับการอบรม

- 1.1 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1: ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง กลยุทธ์นักวางแผน
- 1.2 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 2: ใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง ยุติธรรมหรือไม่
- 1.3 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 3: ใบกิจกรรมที่ 3 เรื่อง แผนภาพต้นไม้และกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ
- 1.4 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 4: ใบงานที่ 1 เรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ
- 1.5 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 5: ใบงานที่ 2 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยน
- 1.6 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 6: ใบงานที่ 3 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่
- 1.7 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 7: ใบงานที่ 4 เรื่อง ความน่าจะเป็น
- 1.8 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 8: แบบตรวจสอบความเข้าใจ เรื่อง เทคนิคการนับและความน่าจะเป็น



2. สำหรับวิทยากร

- 2.1 เอกสารสำหรับวิทยากร 1: แนวทางการจัดกิจกรรม เรื่อง กลยุทธ์นักวางแผน
- 2.2 เอกสารสำหรับวิทยากร 2: แนวทางการจัดกิจกรรม เรื่อง ยุติธรรมหรือไม่
- 2.3 เอกสารสำหรับวิทยากร 3: แนวทางการจัดกิจกรรม เรื่อง แผนภาพต้นไม้และกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ
- 2.4 เอกสารสำหรับวิทยากร 4: เฉลยใบงานที่ 1 เรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ
- 2.5 เอกสารสำหรับวิทยากร 5: เฉลยใบงานที่ 2 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยน
- 2.6 เอกสารสำหรับวิทยากร 6: เฉลยใบงานที่ 3 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่
- 2.7 เอกสารสำหรับวิทยากร 7: เฉลยใบงานที่ 4 เรื่อง ความน่าจะเป็น
- 2.8 เอกสารสำหรับวิทยากร 8: เฉลยแบบตรวจสอบความเข้าใจเรื่องเทคนิคการนับและความน่าจะเป็น
- 2.9 เอกสารสำหรับวิทยากร 9: แบบประเมินการมีส่วนร่วมในกิจกรรม
- 2.10 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 ของ สสวท.
- 2.11 คู่มือครูสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 ของ สสวท.
- 2.12 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6 เล่ม 4 ของสสวท.

การประเมินผล

รายการประเมิน	เกณฑ์การให้คะแนน (คะแนนเต็ม 13.5 คะแนน)	เครื่องมือ
1. การมีส่วนร่วมในกิจกรรม พิจารณาจาก 1.1 - 1.6 ดังนี้ 1.1 ความร่วมมือในกิจกรรม 1.2 ความรับผิดชอบ 1.3 การเสนอความคิดเห็น 1.4 ความริเริ่มสร้างสรรค์ 1.5 การเป็นผู้นำหรือผู้ตามที่ดี 1.6 การตรงเวลา	คะแนนเต็ม 10 คะแนน โดย ได้ 10 คะแนน เมื่อมีครบ 6 ข้อ ได้ 9 คะแนน เมื่อมีครบ 5 ข้อ ได้ 8 คะแนน เมื่อมีครบ 4 ข้อ ได้ 7 คะแนน เมื่อมีครบ 3 ข้อ ได้ 6 คะแนน เมื่อมีครบ 2 ข้อ ได้ 5 คะแนน เมื่อมี 1 ข้อ ได้ 0 คะแนน เมื่อไม่มีทั้ง 6 ข้อ	- แบบประเมินการมีส่วนร่วมในกิจกรรม
2. การทดสอบความรู้	คะแนนเต็ม 3.5 คะแนน โดย ตรวจให้คะแนนจากแบบทดสอบหลังเรียน จำนวน 7 ข้อ ข้อละ 0.5 คะแนน	- แบบทดสอบหลังเรียน

แนวทางปฏิบัติสำหรับวิทยากร

1. ศึกษาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เอกสารสำหรับวิทยากร และเอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม เรื่อง เทคนิคการนับและความน่าจะเป็น
2. ศึกษาข้อบ่งชี้เนื้อหา เรื่องความน่าจะเป็น จากหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 เล่ม 4 ของ สสวท. และคู่มือครูสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1
3. จัดเตรียมการใช้สื่อ-อุปกรณ์ประกอบการบรรยายตามความเหมาะสม
4. ศึกษาความเข้าใจคลาดเคลื่อนในเรื่องเทคนิคการนับและความน่าจะเป็นตามวัตถุประสงค์ วิทยากรอาจเพิ่มความเข้าใจคลาดเคลื่อนในเรื่องเทคนิคการนับและความน่าจะเป็น ที่ วิทยากรพบนอกเหนือจากที่กล่าวไว้ในเอกสาร
5. แจ้งให้ผู้เข้ารับการอบรมทราบเกี่ยวกับจุดประสงค์ในการอบรม เรื่องเทคนิคการนับและความน่าจะเป็นและการประเมินผลในช่วงนำเข้าสู่บทเรียน
6. ให้ผู้เข้ารับการอบรมบอกชื่อและเลขที่ของตนเองทุกครั้งก่อนนำเสนอผลงานหรืออภิปรายแสดงความคิดเห็น เพื่อความสะดวกของวิทยากรในการให้คะแนนและประเมินผล
7. ดำเนินการจัดกิจกรรมตามแนวทางการจัดกิจกรรม พร้อมทั้งประเมินผลผู้เข้ารับการอบรมตามรายการประเมินและเครื่องมือที่กำหนด
8. ใช้ PowerPoint ประกอบการบรรยายเรื่องเทคนิคการนับและความน่าจะเป็น วิทยากรอาจเพิ่มเติมหัวข้อหรือเนื้อหาอื่น ๆ ในเรื่องเทคนิคการนับและความน่าจะเป็น นอกเหนือจากที่กล่าวไว้ในเอกสาร

แนวทางการจัดกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
1. วิทยากรแจ้งให้ผู้เข้ารับการอบรมทราบเกี่ยวกับวัตถุประสงค์ ในการอบรม เรื่องเทคนิคการนับและความน่าจะเป็นและการประเมินผล 2. วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมทำกิจกรรมต่อไปนี้ อย่างน้อย 1 ใน 2 กิจกรรม (30 นาที) ได้แก่ กิจกรรมที่ 1 เรื่อง กลยุทธ์นกวางแผน กิจกรรมที่ 2 เรื่อง ยุติธรรมหรือไม่ ในระหว่างการทำกิจกรรม วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมร่วมกันแลกเปลี่ยนสิ่งที่ได้เรียนรู้จากการทำกิจกรรม	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1: ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง กลยุทธ์นกวางแผน - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 2: ใบกิจกรรม	- ประเมินการมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมที่ 1 - 2



กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
แต่ละกิจกรรม หลังจากทำกิจกรรมเสร็จแล้ว วิทยากรอาจขอให้ตัวแทนผู้เข้ารับการอบรมออกมาพูดสรุปถึงสิ่งที่ได้แลกเปลี่ยนเรียนรู้กัน จากนั้นวิทยากรอาจกล่าวสรุปเพิ่มเติมในประเด็นที่ขาดหายไป หรือใช้คำถามเพื่อตรวจสอบความเข้าใจ 3. วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมทำกิจกรรมที่ 3 เรื่อง แผนภาพต้นไม้และกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ จากนั้นวิทยากรอธิบายเพิ่มเติม รวมทั้งใช้คำถามเพื่อช่วยให้ผู้เข้ารับการอบรมสรุปการหาจำนวนจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดได้ด้วยตนเอง (30 นาที) 4. วิทยากรให้ผู้รับการอบรมโดยการทำใบงานที่ 1 เรื่องกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ จากนั้นร่วมกันเฉลย (30 นาที) 5. วิทยากรให้ผู้รับการอบรมโดยการทำใบงานที่ 2 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยน ยกตัวอย่างสถานการณ์ปัญหาที่นักเรียนมักมีความเข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยน โดยให้ผู้เข้ารับการอบรมเปรียบเทียบจำนวนวิธีของสองสถานการณ์ที่กำหนดให้ว่าเท่ากันหรือไม่ อย่างไร จากนั้นให้ผู้เข้ารับการอบรมทำกิจกรรมเพื่อนำไปสู่การหาสูตรวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด (50 นาที) 6. วิทยากรให้ผู้รับการอบรมโดยการทำใบงานที่ 3 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ โดยยกตัวอย่างสถานการณ์ปัญหาให้ผู้เข้ารับการอบรมเปรียบเทียบจำนวนวิธีของสองสถานการณ์ที่กำหนดให้ว่าเท่ากันหรือไม่ อย่างไร จากนั้นให้ผู้เข้ารับการอบรมทำกิจกรรมเพื่อนำไปสู่การหาความสัมพันธ์ระหว่างวิธีการจัดเรียงสับเปลี่ยนกับวิธีจัดหมู่ (40 นาที)	ที่ 2 เรื่อง ยุติธรรม หรือไม่ - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 3: ใบกิจกรรมที่ 3 เรื่อง แผนภาพต้นไม้และกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 4: ใบงานที่ 1 เรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 5: ใบงานที่ 2 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยน - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 6: ใบงานที่ 3 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่	- ประเมินการทำใบกิจกรรมที่ 3 และการตอบคำถาม - ประเมินการทำใบงานที่ 1 และการตอบคำถาม - ประเมินการทำใบงานที่ 2 และการตอบคำถาม - ประเมินการทำใบงานที่ 3 และการตอบคำถาม

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
7. วิทยากรให้ตัวแทนผู้รับการอบรมอธิบาย เรื่อง การทดลองสุ่ม ปริภูมิตัวอย่าง เหตุการณ์ และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ได้ แล้ววิทยากรอธิบายเพิ่มเติม อาจโดยอาศัยการใช้คำถามหรือการยกตัวอย่างสถานการณ์ง่าย ๆ ให้ผู้เข้ารับการอบรม หาปริภูมิตัวอย่าง เหตุการณ์และความน่าจะเป็น วิทยากรยกตัวอย่างสถานการณ์ปัญหาเรื่องความน่าจะเป็นที่นักเรียนมักมีความเข้าใจคลาดเคลื่อนให้ผู้เข้ารับการอบรมแลกเปลี่ยนแสดงความคิดเห็น ร่วมกันอภิปรายถึงความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเหล่านั้น (30 นาที) 8. วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมทำแบบตรวจสอบความเข้าใจเรื่องเทคนิคการนับและความน่าจะเป็น โดยวิทยากรเฉลยให้ตรวจพร้อมกัน ต่อจากนั้นวิทยากรพูดสรุปกิจกรรมทั้งหมด (30 นาที)	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 7: ใบงานที่ 4 เรื่อง ความน่าจะเป็น - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 8: แบบตรวจสอบความเข้าใจเรื่อง เทคนิคการนับและความน่าจะเป็น	- ประเมินการทำใบงานที่ 4 และการตอบคำถาม - ประเมินการทำแบบตรวจสอบความเข้าใจเรื่อง เทคนิคการนับและความน่าจะเป็น

เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม

ใบกิจกรรมที่ 1

เรื่อง กลยุทธ์นักวางแผน

วิธีดำเนินการกิจกรรม

1. แบ่งผู้เล่นออกเป็น 2 กลุ่มใหญ่ คือ กลุ่ม A และ กลุ่ม B
2. ในกิจกรรม “กลยุทธ์นักวางแผน” ประกอบด้วยอุปกรณ์ที่ใช้ในการทำกิจกรรม ดังนี้



- (1) แผ่นตารางจำนวน 0-5
- (2) ลูกเต๋ารวม 2 ลูก
- (3) เบี้ยจำนวน 36 เบี้ยต่อกลุ่ม

จงร่วมกันอภิปรายใน 2 ประเด็น ต่อไปนี้

ประเด็นที่ 1 เบี้ยจำนวน 36 เบี้ยเกี่ยวข้องกับลูกเต๋าสองลูกอย่างไร

ประเด็นที่ 2 แผ่นตารางหมายเลข 0-5 เกี่ยวข้องกับลูกเต๋าสองลูกอย่างไร

3. กติกาการแข่งขัน

- (1) ให้แต่ละกลุ่มวางแผนกลยุทธ์การเล่นเกมโดยการจัดเบี้ยจำนวน 36 เบี้ย
ลงบนหมายเลข 0-5 ซึ่งทั้งสองกลุ่มต้องไม่ใช้กลยุทธ์เดียวกัน
- (2) ทุกครั้งที่วิทยากรทอดลูกเต๋า 2 ลูก แต่ละกลุ่มหยิบเบี้ยที่วางบนหมายเลขมีค่าเท่ากับ
ผลต่างของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทิ้งสองลูกของตนออกได้ครั้งละ 1 เบี้ย
- (3) ผู้ชนะคือกลุ่มที่หยิบเบี้ยออกครบทั้ง 36 เบี้ย

4. ดำเนินการแข่งขันตามกติกาที่วางไว้

5. หลังจากทำกิจกรรมเสร็จ

จงอภิปรายสิ่งที่ได้จากการเล่นเกมกลยุทธ์นี้กว้างแผน เช่น

- (1) ผลลัพธ์ที่ได้เป็นไปอย่างที่ท่านคิดไว้หรือไม่

.....

.....

- (2) กลุ่มที่วางแผนได้โดยใช้หลักการหรือความรู้จาก เรื่อง ปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์จะเป็นฝ่ายชนะเสมอหรือไม่

.....

.....

- (3) จำเป็นต้องแข่งขันเบี้ยของอีกกลุ่มหมดหรือไม่ จึงจะทราบว่าผู้ชนะเป็นใคร

.....

.....

- (4) สิ่งที่ได้เรียนรู้อื่น ๆ

.....

.....

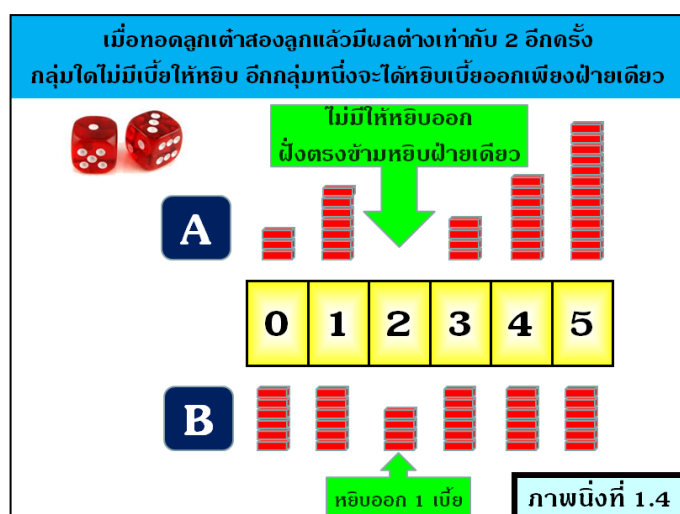
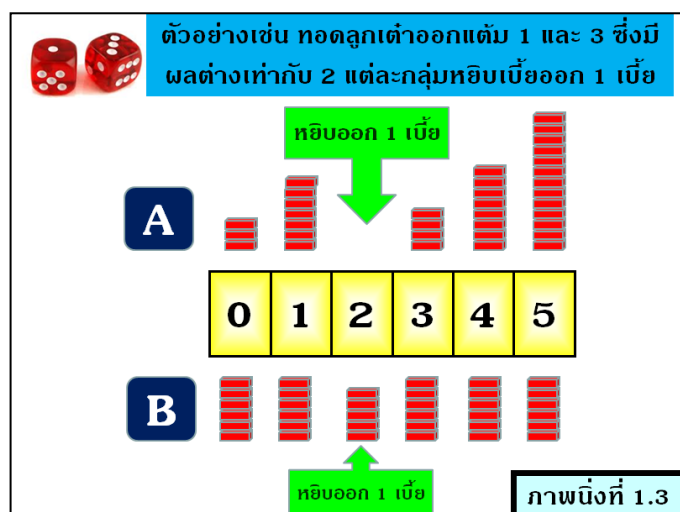
.....

.....

.....



หมายเหตุ 1. ภาพนิ่งที่ 1.2 ภาพนิ่งที่ 1.3 และภาพนิ่งที่ 1.4 ใช้ประกอบการอธิบายกติกาการแข่งขัน



2. ผู้เข้ารับการอบรมสามารถนำกิจกรรมไปประกอบการจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียนของท่านได้ สำหรับการใช้ลูกเต๋า 2 ลูกประกอบการทำกิจกรรม ผู้เข้ารับการอบรมสามารถดำเนินการได้หลายวิธี เช่น
- (1) ใช้ลูกเต๋าสองข้างจริงทั้ง 2 ลูก
 - (2) เชื่อมต่ออินเทอร์เน็ตเพื่อเข้าสู่เว็บไซต์สื่อดิจิทัลประกอบการสอนของ สสวท. ตาม URL: http://primarymath.ipst.ac.th/images/ICT_material/mini_LO/dice/dice.htm เลือกใช้สื่อดิจิทัล “ลูกเต๋าดิจิทัล”
 - (3) ใช้โปรแกรม GSP หรือ Microsoft Excel เพื่อสุ่มจำนวนเต็ม 1-6 สองจำนวนเพื่อใช้แทนแต้มบนหน้าลูกเต๋า 2 ลูก
 - (4) ดาวน์โหลด Application DICE ลงในมือถือหรืออุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์แบบพกพาที่สามารถเชื่อมต่ออินเทอร์เน็ตได้

ใบกิจกรรมที่ 2

เรื่อง ยุติธรรมหรือไม่

กิจกรรม “ยุติธรรมหรือไม่” ประกอบด้วยเกมย่อยจำนวน 3 เกม โดยมีอุปกรณ์ ดังนี้

- | | |
|----------|--|
| เกมที่ 1 | (1) เบี้ยสีแดงทั้งสองด้าน จำนวน 1 เบี้ย
(2) เบี้ยที่มีด้านหนึ่งสีแดง อีกด้านหนึ่งสีน้ำเงิน จำนวน 1 เบี้ย |
| เกมที่ 2 | (1) เบี้ยสีแดงทั้งสองด้าน จำนวน 2 เบี้ย
(2) เบี้ยที่มีด้านหนึ่งสีแดง อีกด้านหนึ่งสีน้ำเงิน จำนวน 1 เบี้ย |
| เกมที่ 3 | (1) เบี้ยที่มีด้านหนึ่งสีแดง อีกด้านหนึ่งสีเหลือง จำนวน 1 เบี้ย
(2) เบี้ยที่มีด้านหนึ่งสีเหลือง อีกด้านหนึ่งสีน้ำเงิน จำนวน 1 เบี้ย
(3) เบี้ยที่มีด้านหนึ่งสีแดง อีกด้านหนึ่งสีน้ำเงิน จำนวน 1 เบี้ย |

วิธีการเล่นเกม

- (1) ผู้เข้ารับการอบรมจับคู่ แล้วให้แต่ละคู่เป่าอั้งฉุบ โดยผู้ชนะเป็น A และผู้แพ้เป็น B
- (2) A และ B สลับกันโยนเบี้ยทั้งหมดพร้อมกัน โดยในการโยนแต่ละครั้ง
 - ⇒ ถ้าเบี้ยทั้งหมดแสดงสีเดียวกันแล้ว A ได้ 1 แต้ม
 - ⇒ ถ้าหากเบี้ยทั้งหมดแสดงสีต่างกันอย่างน้อย 1 คู่แล้ว B ได้ 1 แต้ม
- (3) ผู้ชนะคือผู้ที่ได้ผลรวมของแต้มเท่ากับ 5 แต้มเป็นคนแรก

หมายเหตุ ทั้งสามเกมใช้วิธีการเล่นเดียวกัน แต่ให้ผู้เข้ารับการอบรมแต่ละคู่เริ่มเล่นเกมที่ 1 ไปเกมที่ 2 และเกมที่ 3 ตามลำดับ



คำสั่งที่ 1: จงเขียนเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องว่างที่ตรงกับความคิดเห็นของท่านทั้งก่อนและหลัง
การเล่นเกม

ท่านคิดว่าเกมนี้ยุติธรรม เกมที่ หรือไม่	ก่อนเล่น		หลังเล่น	
	ยุติธรรม	ไม่ยุติธรรม	ยุติธรรม	ไม่ยุติธรรม
1.  				
2.   				
3.   				

คำสั่งที่ 2: จงเขียนสิ่งที่ได้เรียนรู้จากการทำกิจกรรม “ยุติธรรมหรือไม่”

.....

.....

.....

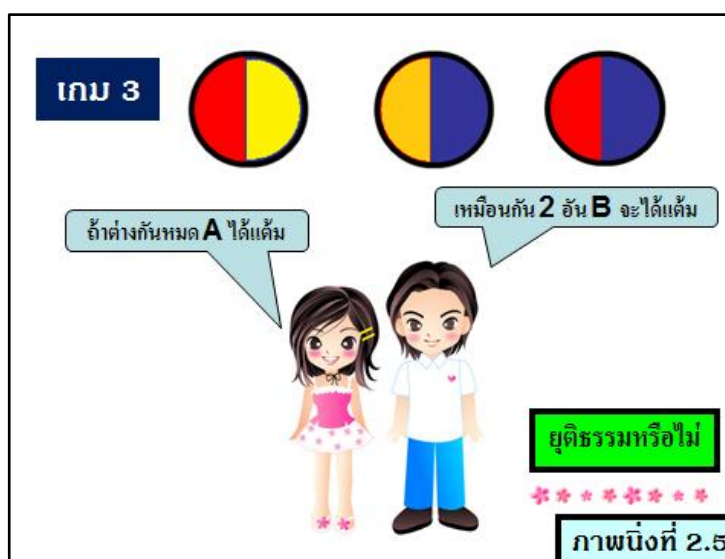
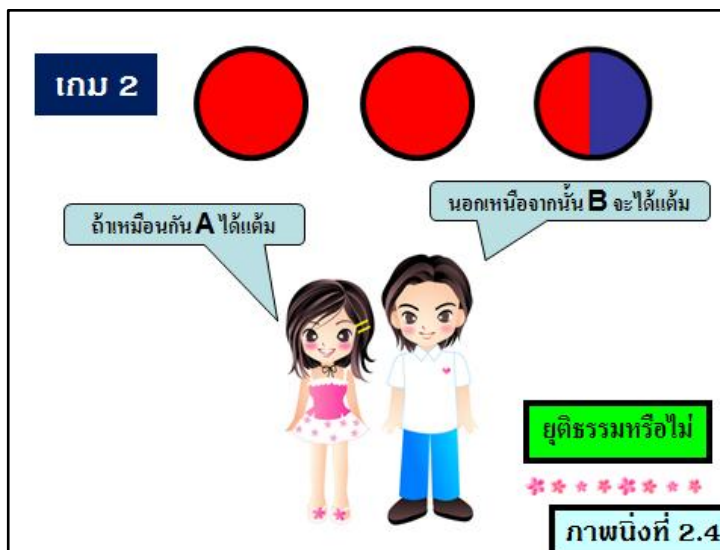
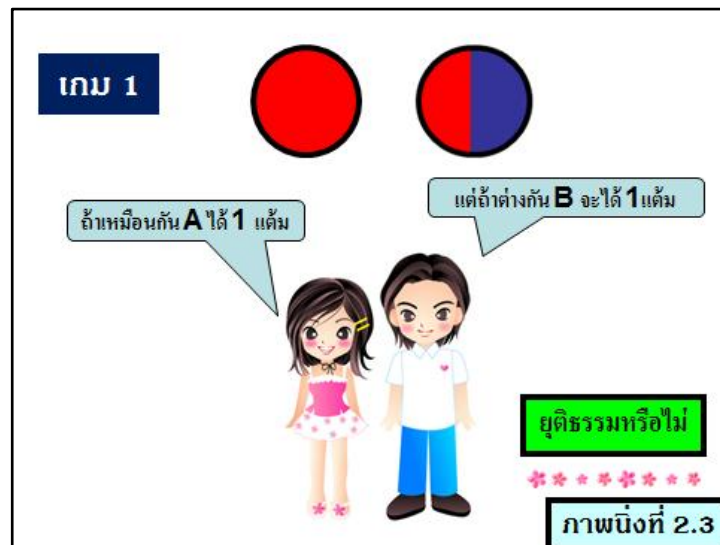
.....

.....

.....



หมายเหตุ ภาพนิ่งที่ 2.3 ภาพนิ่งที่ 2.4 และภาพนิ่งที่ 2.5 ใช้ประกอบการอธิบายกติกาการแข่งขัน



ใบกิจกรรมที่ 3

เรื่อง แผนภาพต้นไม้และกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

สถานการณ์ปัญหาที่ 1

เอและบี แข่งเป่ากบโดยมีกติกาว่าถ้าใครชนะ 2 เกมติดต่อกันหรือชนะ 3 เกมก่อนจะเป็นผู้ชนะ
จงเขียนแผนภาพต้นไม้แสดงการหาจำนวนผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ของการแข่งขันที่มีผู้ชนะ (ไม่มีการเสมอกัน)

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

สถานการณ์ปัญหาที่ 2

2.1) ในกระเป๋าดำเดินทางของนที มีเสื้ออยู่ 3 ตัว และกางเกง 2 ตัว

จงเขียนแผนภาพต้นไม้แสดงวิธีการแต่งตัวที่ประกอบด้วยเสื้อและกางเกงแตกต่างกันทั้งหมดของนที

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.2) หากในการเดินทาง นทีมีเสื้อ 3 ตัว กางเกง 2 ตัว และ รองเท้า 2 คู่

จงเขียนแผนภาพต้นไม้แสดงวิธีการแต่งตัวที่ประกอบด้วย

เสื้อ กางเกง และรองเท้า ที่แตกต่างกันทั้งหมดของนที

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



สถานการณ์ปัญหาที่ 3

ในตู้เสื้อผ้าของตั้ม มีเสื้อเชิ้ตอยู่ 10 ตัว เนคไท 4 เส้น กางเกง 5 ตัวและถุงเท้าอีก 6 คู่
จงหาจำนวนวิธีการแต่งตัวที่ประกอบด้วยเสื้อเชิ้ต เนคไท กางเกงและถุงเท้า แตกต่างกันทั้งหมดของตั้ม

This image shows a full page of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, typical of notebook or legal stationery. There are no margins, text, or other markings on the page.

สถานการณ์ปัญหาที่ 4

เจ้าของร้านผลิตแจกันร้านหนึ่งต้องการผลิตแจกันแบบใหม่ จำนวน 6 แบบ

โดยแต่ละแบบมี 4 สี และแต่ละสีมี 3 ขนาด

หากเจ้าของร้านต้องการผลิตครบทุกแบบ ทุกสี ทุกขนาด จะมีแฉกกันแบบใหม่ที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่ใบ

[illegible]

สถานการณ์ปัญหาที่ 5

คุณพ่อกำลังจัดสวนหน้าบ้าน



จงหาจำนวนวิธีที่แตกต่างกันทั้งหมดที่คุณพอจะวางกระดางจำนวน 4 กระดางตามแนวรั้วหน้าบ้าน

[illegible]

ใบงานที่ 1

เรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

คำสั่งที่ 1 จงอธิบายถึงจำนวนวิธีในสถานการณ์ต่าง ๆ ต่อไปนี้ว่าเหมือนหรือต่างกันอย่างไร

- (1) โยนเหรียญ 3 เหรียญ 1 ครั้ง
- (2) โยนเหรียญ 1 เหรียญ 3 ครั้ง
- (3) ทำข้อสอบประเภทถูกผิดจำนวน 3 ข้อ (ทำทุกข้อ)
- (4) มีบุตร 3 คน
- (5) ชวนเพื่อน 3 คน ไปปลูกต้นไม้เนื่องในวันพ่อแห่งชาติ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

คำสั่งที่ 2 จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่ได้จากการทดลองสุ่ม ต่อไปนี้

(1) โยนเหรียญ 5 เหรียญ 1 ครั้ง

.....
.....

(2) โยนเหรียญ 1 เหรียญ 10 ครั้ง

.....
.....

(3) ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 4 ครั้ง

.....
.....

(4) ทำข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 5 ข้อ (ทำทุกข้อ)

.....
.....

(5) ชวนเพื่อน 4 คน ไปบริจาคโลหิตเนื่องในวันแม่แห่งชาติ

.....
.....

(6) นก 6 ตัวเลือกเกาะกิ่งไม้ 5 กิ่ง

.....
.....

(7) นก 4 ตัวเลือกเกาะกิ่งไม้ 7 กิ่ง ซึ่งถ้านกหัวหน้าฝูงเกาะกิ่งไม้ใดแล้วนกตัวอื่นจะไม่เกาะไม้กิ่งนั้น

.....
.....



ใบงานที่ 2

เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยน

จงเปรียบเทียบจำนวนวิธีของสถานการณ์ A และสถานการณ์ B โดยใช้เครื่องหมาย $<$, $=$, $>$ ในแต่ละข้อต่อไปนี

ข้อ	สถานการณ์ A	เปรียบเทียบ ($<$, $=$, $>$)	สถานการณ์ B
1	เขียนตัวเลขแสดงจำนวนที่มีสี่หลัก จากป้าย 4 ป้ายที่มีหมายเลขกำกับ 1, 2, 3, 4		เขียนตัวเลขแสดงจำนวนที่มีสี่หลัก โดยใช้สมาชิกในเซต {1, 2, 3, 4}
2	เขียนตัวเลขแสดงจำนวนคู่ที่มีสี่หลัก โดยใช้สมาชิกในเซต {1, 2, 3, 4}		เขียนตัวเลขแสดงจำนวนคี่ที่มีสี่หลัก โดยใช้สมาชิกในเซต {1, 2, 3, 4}
3	เขียนตัวเลขแสดงจำนวนคู่ที่มีสี่หลัก โดยใช้สมาชิกในเซต {1, 2, 3, 4}		เขียนตัวเลขแสดงจำนวนคู่ที่มีสี่หลัก โดยใช้สมาชิกในเซต {0, 1, 2, 3}
4	เขียนตัวเลขแสดงจำนวนคู่ที่มีสี่หลักที่ ไม่ซ้ำกันโดยใช้สมาชิกในเซต {1, 2, 3, 4}		เขียนตัวเลขแสดงจำนวนคู่ที่มีสี่หลักที่ ไม่ซ้ำกันโดยใช้สมาชิกในเซต {0, 2, 3, 4}
5	วิธีจัดเด็กอนุบาลจำนวน 9 คน มายืนรำ ถวายพระพรบนเวที โดยยืนเป็นแถว หน้ากระดาน 3 แถว แถวละ 3 คน		วิธีจัดเด็กอนุบาลจำนวน 9 คน มายืนรำ ถวายพระพรบนเวที โดยยืนเป็นแถวหน้า กระดาน 2 แถว แถวหน้า 4 คน แถวหลัง 5 คน
6	จัดเรียงหนังสือ 4 เล่ม บนชั้นหนังสือ ซึ่งประกอบด้วยหนังสือคณิตศาสตร์ที่ เหมือนกัน 3 เล่ม และฟิสิกส์ หนึ่งเล่ม		จัดเรียงหนังสือ 4 เล่ม บนชั้นหนังสือ ซึ่งประกอบด้วยหนังสือคณิตศาสตร์ที่ แตกต่างกัน 3 เล่ม และฟิสิกส์ หนึ่งเล่ม
7	เขียนคำที่มีความหมายหรือไม่ก็ได้ จากตัวอักษรทุกตัวในคำว่า “NUMBER”		เขียนคำที่มีความหมายหรือไม่ก็ได้ จากตัวอักษรทุกตัวในคำว่า “MEMBER”



ใบงานที่ 3
เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่

จงเปรียบเทียบจำนวนวิธีของสถานการณ์ A และสถานการณ์ B โดยใช้เครื่องหมาย $<$, $=$, $>$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

ข้อ	สถานการณ์ A	เปรียบเทียบ ($<$, $=$, $>$)	สถานการณ์ B
1	เลือกคณะกรรมการนักเรียน จำนวน 3 คน จากผู้สมัครทั้งหมด 10 คน		เลือกประธานนักเรียน รองประธาน นักเรียนและเหรัญญิก จากผู้สมัคร ทั้งหมด 10 คน
2	เลือกนักวิ่ง 4 คน จากทั้งหมด 7 คน เพื่อไป แข่งขันวิ่งผลัด 4×100 เมตร โดยระบุว่าใคร ได้เป็นไม้หนึ่ง ไม้สอง ไม้สามและไม้สี่		เลือกนักวิ่ง 4 คน จากทั้งหมด 7 คน เพื่อไปแข่งขันวิ่งผลัด 4×100 เมตร โดยไม่ระบุลำดับการวิ่ง
3	หยิบลูกปิงปอง 3 ลูก พร้อมกันจากกล่องที่มี ลูกปิงปองทั้งหมด 12 ลูก		หยิบลูกปิงปอง 3 ลูก โดยหยิบทีละลูก แบบไม่ใส่กลับคืนจากกล่องที่มีลูก ปิงปองทั้งหมด 12 ลูก
4	หยิบลูกปิงปอง 3 ลูก โดยหยิบทีละลูก แบบใส่กลับคืนจากกล่องที่มีลูกปิงปอง ทั้งหมด 10 ลูก		หยิบลูกปิงปอง 3 ลูกโดยหยิบทีละลูก แบบไม่ใส่กลับคืนจากกล่องที่มีลูก ปิงปองทั้งหมด 10 ลูก
5	เลือกคนเข้าทำงาน 4 คน โดยเลือกจาก ผู้สมัครชาย 5 คน เลือกมา 2 คน และจาก ผู้สมัครหญิง 5 คน เลือกมาอีก 2 คน		เลือกคนเข้าทำงาน 4 คน จากผู้สมัคร ชาย 5 คน และผู้สมัครหญิง 5 คน โดยจะเป็นผู้ชายหรือผู้หญิงก็ได้
6	สุ่มทำข้อสอบ 7 ข้อ จากข้อสอบทั้งหมด 10 ข้อ		สุ่มทำข้อสอบ 7 ข้อ โดยเลือกทำ 4 ข้อ จาก 5 ข้อแรกและเลือกทำอีก 3 ข้อ จาก 5 ข้อหลัง

ใบงานที่ 4 เรื่อง ความน่าจะเป็น

สถานการณ์ที่ 1



จงอธิบายเกี่ยวกับสิ่งที่ A กล่าวในสถานการณ์ที่ 1

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

สถานการณ์ที่ 2

ในการทอดลูกเต๋าสองลูกพร้อมกัน

หนูดีและตั้มหาความน่าจะเป็นที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าสองมีค่าเท่ากับ 4 ดังนี้



$S = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}$ ดังนั้น $n(S) = 11$

และ $E = \{4\}$ ดังนั้น $n(E) = 1$ จะได้ $P(E) = \frac{1}{11}$

$S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$

$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$

$:$ $:$

$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}$

ดังนั้น $n(S) = 36$

และ $E = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$ ดังนั้น $n(E) = 3$

จะได้ $P(E) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$



จงอธิบายวิธีการหาความน่าจะเป็นของหนูดีและตั้ม

แบบตรวจสอบความเข้าใจ
เรื่อง เทคนิคการนับและความน่าจะเป็น

1. จะสร้างจำนวนที่มีสี่หลัก จากเลขโดด 2, 4, 6, 8, 9 ได้ทั้งหมดกี่จำนวน โดยที่แต่ละจำนวนนั้น ต้องไม่มีเลขโดดในหลักใดซ้ำกัน

.....

.....

.....

2. จงหาจำนวนวิธีในการนำจดหมาย 6 ฉบับ ทั้งลงตู้ไปรษณีย์ 8 ตู้ โดยไม่ซ้ำตู้

.....

.....

.....

3. จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนอักษรจากคำว่า LETTER โดยใช้อักษรทุกตัวมีกี่จำนวน (คำนี้มีความหมายหรือไม่มีความหมายก็ได้)

.....

.....

.....

4. จงหาจำนวนวิธีจัดเด็กอนุบาลจำนวน 6 คน มายืนร่ายถวายพระพรบนเวที โดยยืนเป็นแถวหน้า กระดาน 2 แถว แถวละ 3 คน

.....

.....

.....

5. ข้อสอบฉบับหนึ่งมี 2 ตอน ตอนที่หนึ่งมี 7 ข้อ ตอนที่สองมี 3 ข้อ นักเรียนต้องทำข้อสอบ แบบสุ่มทั้งหมด 5 ข้อ จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งเลือกทำตอนที่หนึ่งจำนวน 3 ข้อ และเลือกทำตอนที่สองจำนวน 2 ข้อ

.....

.....

.....



เอกสารสำหรับวิทยากร

แนวทางการจัดกิจกรรม

เรื่อง กลยุทธ์นักวางแผน

1. วิทยากรแบ่งผู้เข้ารับการอบรมเป็น 2 กลุ่มใหญ่ ตามที่นั่งซ้ายขวา เป็นกลุ่ม A และ กลุ่ม B
2. วิทยากรบอกอุปกรณ์ที่ใช้ในการเล่น “กลยุทธ์นักวางแผน” ให้แก่ผู้เข้ารับการอบรม โดยใช้ภาพนิ่งที่ 1.1 แสดงอุปกรณ์ที่ใช้ในการทำกิจกรรม ดังนี้



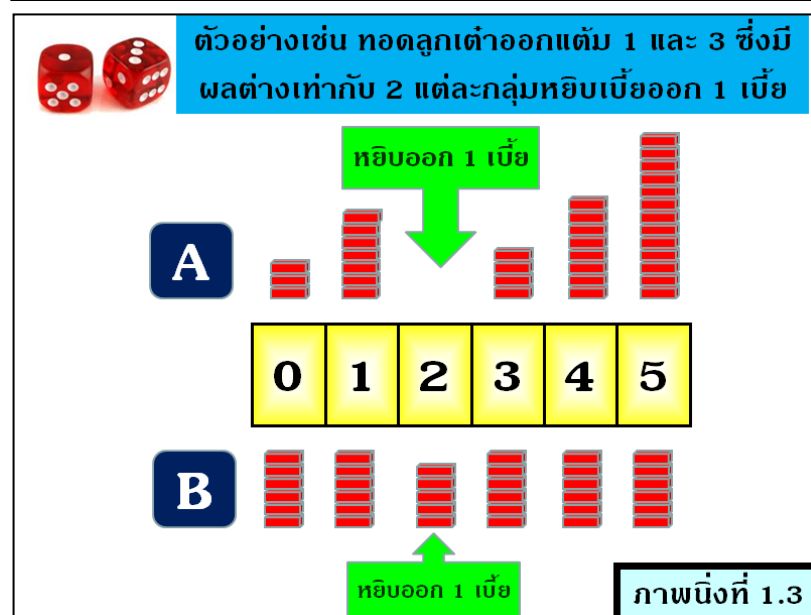
วิทยากรแจ้งให้ผู้เข้าร่วมอบรมทราบว่า เกมนี้จะใช้แผ่นตารางจำนวน 0 - 5 และลูกเต๋า 2 ลูก โดยแต่ละกลุ่มจะได้รับเบี้ยจำนวน 36 เบี้ย เพื่อใช้ในการวางแผนกลยุทธ์ที่จะเอาชนะคู่ต่อสู้ แต่ก่อนที่จะอธิบายกติกาการแข่งขัน วิทยากรให้ผู้เข้าร่วมการอบรมอภิปรายกันในเรื่อง 2 หัวข้อต่อไปนี้

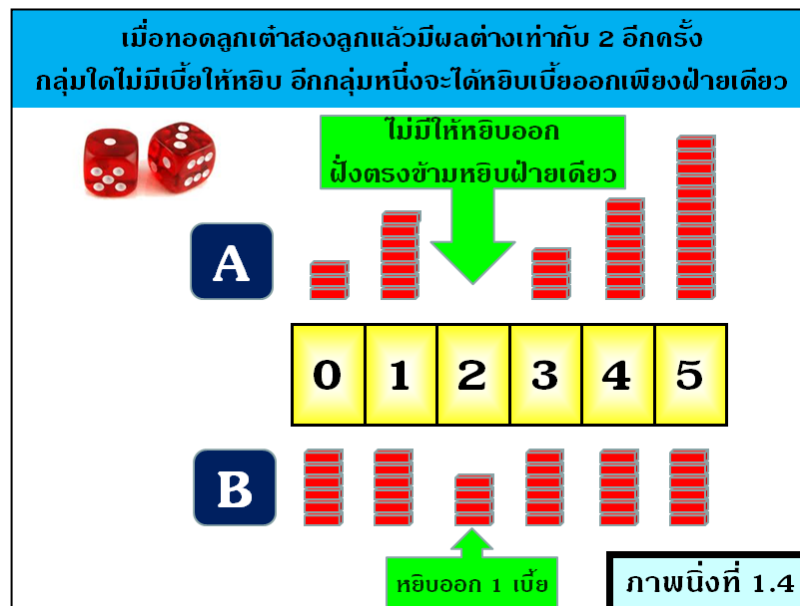
- (1) เบี้ยจำนวน 36 เบี้ย เกี่ยวข้องกับลูกเต๋าสองลูกอย่างไร [เป็นจำนวนปริภูมิตัวอย่างของการทอดลูกเต๋าสองลูกแล้วสนใจผลลัพธ์ที่เป็นแต้มของลูกเต๋าสองลูก]
- (2) แผ่นตารางหมายเลข 0 - 5 เกี่ยวข้องกับลูกเต๋าสองลูกอย่างไร [เกิดจากผลต่างของแต้มบนหน้าลูกเต๋าสองลูก]

3. วิทยากรอธิบายกติกาการแข่งขัน ดังนี้

“ให้แต่ละกลุ่มวางแผนกลยุทธ์การเล่นเกมนโดยการจัดเบี้ยจำนวน 36 เบี้ย ลงบนหมายเลข 0 - 5 ซึ่งทั้งสองกลุ่มต้องไม่ใช้กลยุทธ์เดียวกันเมื่อวางแผนกลยุทธ์และวางเบี้ยเสร็จแล้ววิทยากรจะทอดลูกเต๋ารั้งละ 2 ลูกไปเรื่อย ๆ โดยแต่ละครั้งที่วิทยากรทอดลูกเต๋ารั้งละ 2 ลูก แต่ละกลุ่มจะสามารถหยิบเบี้ยที่วางบนหมายเลขมีค่าเท่ากับผลต่างของแต้มของลูกเต๋ารั้งทั้งสองลูกนั้นออกได้เพียง 1 เบี้ย หากกลุ่มใดเบี้ยถูกหยิบออกครบทั้ง 36 เบี้ยก่อนกลุ่มนั้นเป็นฝ่ายชนะ”

วิทยากรใช้ภาพนิ่งที่ 1.2 ภาพนิ่งที่ 1.3 และภาพนิ่งที่ 1.4 ช่วยในการอธิบายกติกาการเล่นเกมเรียงตามลำดับ ดังนี้





4. วิทยากรเชื่อมต่ออินเทอร์เน็ตเพื่อเข้าสู่เว็บไซต์สื่อดิจิทัลประกอบการสอนของ สสวท.
ตาม URL: http://primarymath.ipst.ac.th/images/ICT_material/mini_LO/dice/dice.htm
เพื่อเสนอแนะผู้เข้ารับการอบรมถึงวิธีการใช้ลูกเต๋าดิจิทัลสำหรับทำกิจกรรมทอดลูกเต๋าสองลูก
เพื่อพิจารณาแต้มบนหน้าลูกเต๋าสองลูกหรือวิทยากรอาจใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์อื่น ๆ เช่น
GSP หรือ Microsoft Excel เป็นต้น เพื่อสุ่มจำนวนเต็ม 1 - 6 สองจำนวนเพื่อใช้แทนแต้มบนหน้า
ลูกเต๋าสองลูกก็ได้หรืออาจให้ผู้เข้ารับการอบรมดาวน์โหลด Application DICE ลงในมือถือ/
อุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์แบบพกพาที่สามารถเชื่อมต่ออินเทอร์เน็ตเพื่อนำไปใช้สอนนักเรียนได้
5. หลังจากที่ทั้งสองกลุ่มวางกลยุทธ์ที่แตกต่างกันเสร็จแล้ววิทยากรเปิดไฟล์ Activity_1.gsp
แล้วดำเนินการแข่งขันตามกติกาที่วางไว้จนกว่าจะได้ผู้ชนะ
6. วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมอภิปรายสิ่งที่ได้จากการเล่นเกมกลยุทธ์นี้วางแผน เช่น
 - (1) ผลลัพธ์ที่ได้เป็นไปอย่างที่ท่านคิดหรือไม่
 - (2) กลุ่มที่วางแผนได้ใกล้เคียงกับทฤษฎีที่สุดเป็นฝ่ายชนะเสมอหรือไม่
 - (3) จำเป็นต้องแข่งขันเบี้ยของอีกกลุ่มหมดหรือไม่ จึงจะทราบว่าผู้ชนะเป็นใคร
7. วิทยากรอธิบาย/ สรุปเพิ่มเติมโดยใช้ภาพนิ่งที่ 1.5 และภาพนิ่งที่ 1.6 ช่วยในการอธิบาย ดังนี้



กลยุทธ์นักวางแผน

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

E	n(E)
0	6
1	10
2	8
3	6
4	4
5	2

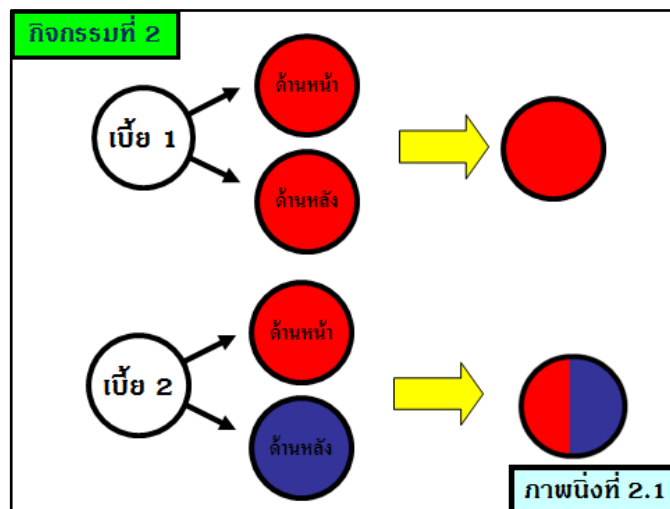
ภาพนิ่งที่ 1.6

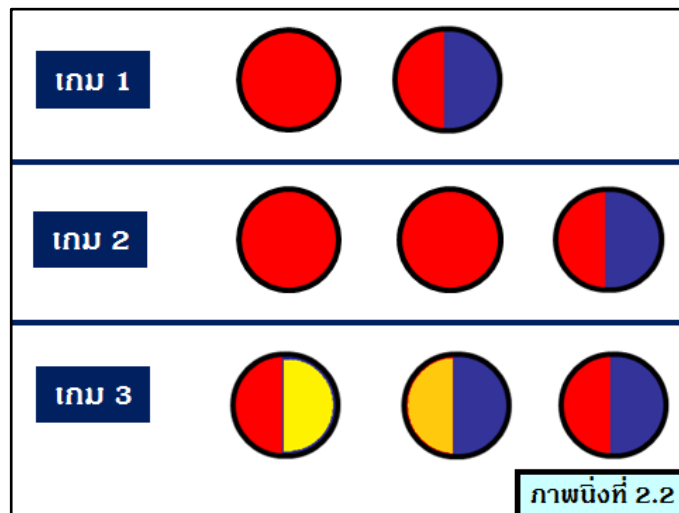


แนวทางการจัดกิจกรรม

เรื่อง ยุติธรรมหรือไม่

1. วิทยากรแจ้งให้ผู้เข้ารับการอบรมทราบว่า กิจกรรม “ยุติธรรมหรือไม่” ประกอบด้วยเกมย่อยจำนวน 3 เกม จากนั้นวิทยากรชี้แจงถึงอุปกรณ์ประกอบการเล่นเกมแต่ละเกม ดังนี้
(ดูรายละเอียดจาก ภาพนิ่งที่ 2.1 และภาพนิ่งที่ 2.2)
- เกมที่ 1 (1) เบี้ยสีแดงทั้งสองด้าน จำนวน 1 เบี้ย
(2) เบี้ยที่มีด้านหนึ่งสีแดง อีกด้านหนึ่งสีน้ำเงิน จำนวน 1 เบี้ย
- เกมที่ 2 (1) เบี้ยสีแดงทั้งสองด้าน จำนวน 2 เบี้ย
(2) เบี้ยที่มีด้านหนึ่งสีแดง อีกด้านหนึ่งสีน้ำเงิน จำนวน 1 เบี้ย
- เกมที่ 3 (1) เบี้ยที่มีด้านหนึ่งสีแดง อีกด้านหนึ่งสีเหลือง จำนวน 1 เบี้ย
(2) เบี้ยที่มีด้านหนึ่งสีเหลือง อีกด้านหนึ่งสีน้ำเงิน จำนวน 1 เบี้ย
(3) เบี้ยที่มีด้านหนึ่งสีแดง อีกด้านหนึ่งสีน้ำเงิน จำนวน 1 เบี้ย

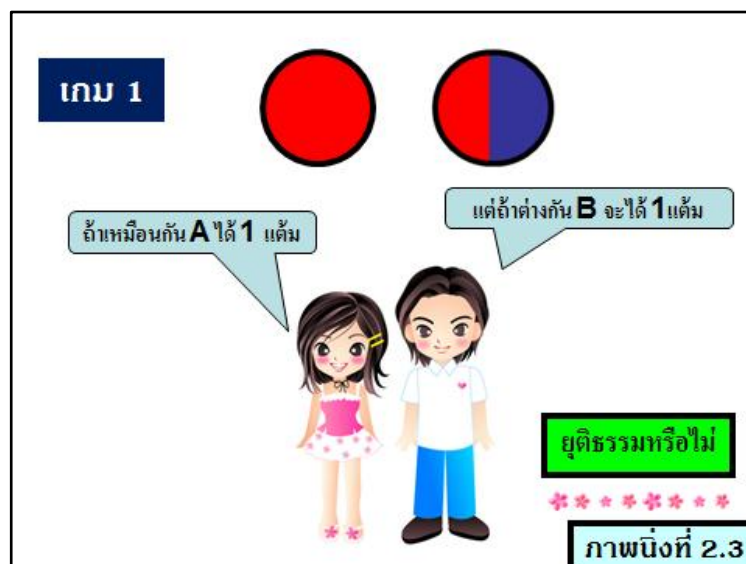


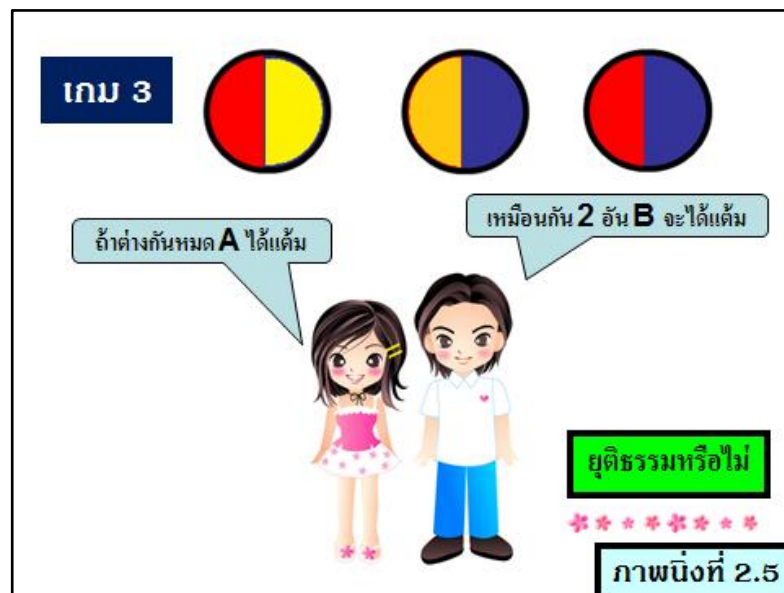
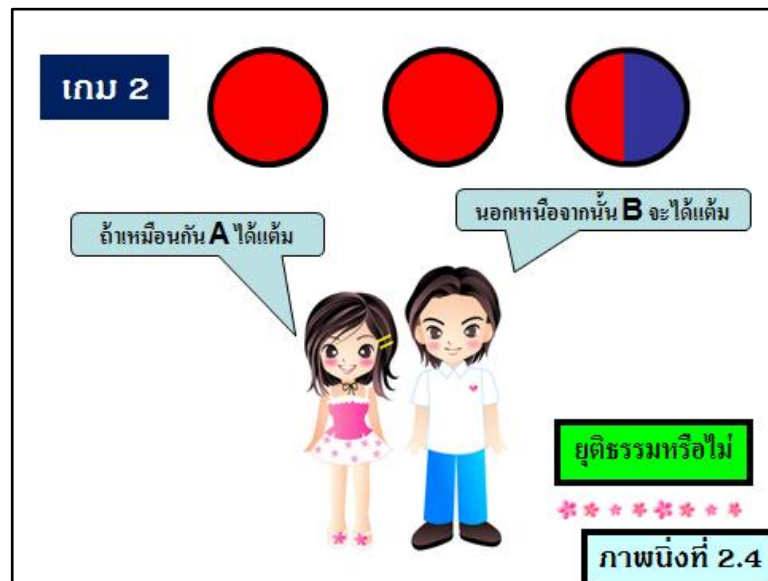


2. วิทยากรอธิบายวิธีการเล่นเกมทั้งสามเกมของกิจกรรม “ยุติธรรมหรือไม่” ดังนี้

วิธีการเล่นเกม

- (1) ผู้เข้ารับการอบรมจับคู่ แล้วให้แต่ละคู่เป่ายี่จูป โดยผู้ชนะเป็น A และผู้แพ้เป็น B
 - (2) A และ B สลับกันโยนเบี้ยทั้งหมดพร้อมกัน โดยในการโยนแต่ละครั้ง
 - ⇒ ถ้าเบี้ยทั้งหมดแสดงสีเดียวกันแล้ว A ได้ 1 แด้ม
 - ⇒ ถ้าหากเบี้ยทั้งหมดแสดงสีต่างกันอย่างน้อย 1 คู่แล้ว B ได้ 1 แด้ม
 - (3) ผู้ชนะคือผู้ที่ได้ผลรวมของแด้มเท่ากับ 5 แด้มเป็นคนแรก
- (ดูรายละเอียดจาก ภาพนิ่งที่ 2.3 ภาพนิ่งที่ 2.4 และภาพนิ่งที่ 2.5)



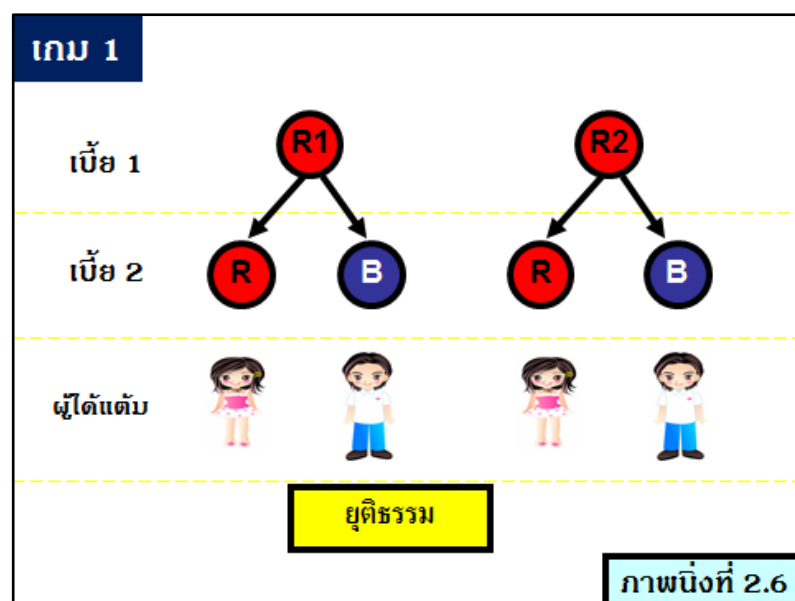


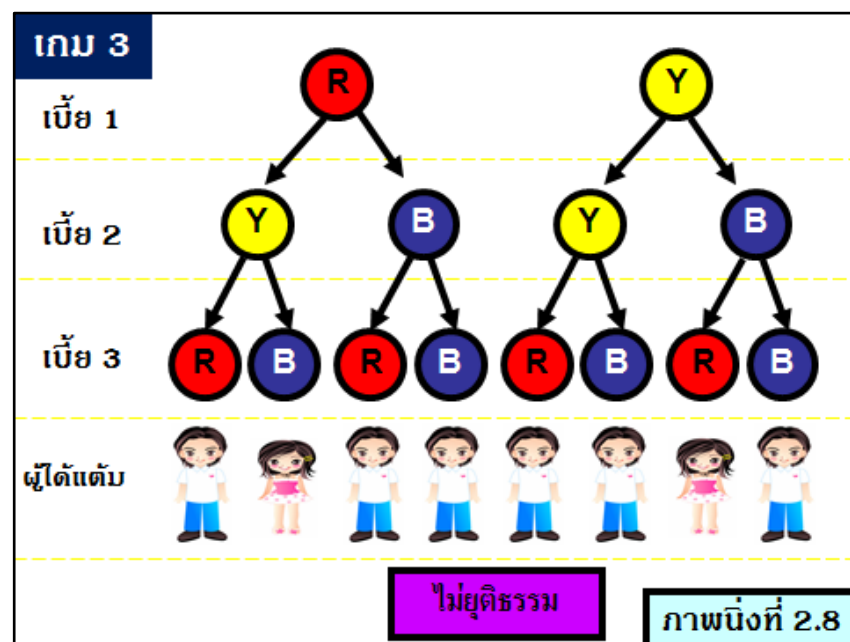
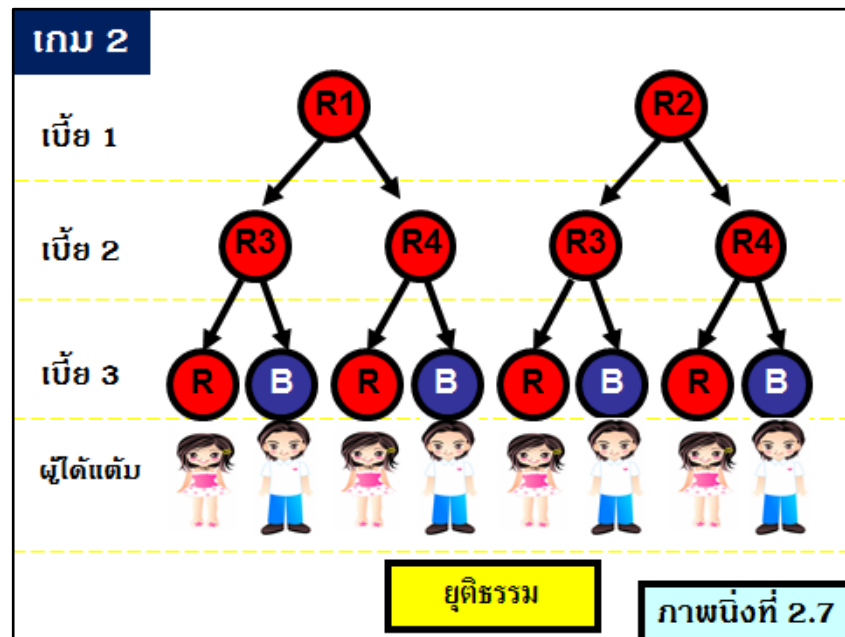
3. วิทยากรชี้แจงสิ่งเหล่านี้ให้ผู้เข้ารับการอบรมก่อนทำกิจกรรม “ยุติธรรมหรือไม่”
 - (1) เรียงลำดับการเล่นจากเกมที่ 1 ไปเกมที่ 2 และเกมที่ 3 ตามลำดับ
 - (2) ในการเริ่มเล่นเกมที่ 2 หรือเกมที่ 3 ผู้เล่นทั้งสองคนสามารถตกลงกันได้ว่า จะเลือกเป็น A หรือ B เหมือนเดิม หรือจะสลับกันเป็น A หรือ B ก็ได้
 - (3) ในแต่ละเกมนั้น ทั้งก่อนเล่นเกมและหลังเล่นเกม ผู้เข้ารับการอบรมแต่ละคนต้องเขียนเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องในตารางที่ 2.1 ที่ตรงกับความคิดเห็นของตนว่าเกมแต่ละเกมนั้น ยุติธรรมหรือไม่ยุติธรรม

ตารางที่ 2.1 จงทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องว่างที่ตรงกับความคิดเห็นของท่าน

เกมที่	ท่านคิดว่าเกมนี้อยุติธรรมหรือไม่	ก่อนเล่น		หลังเล่น	
		ยุติธรรม	ไม่ยุติธรรม	ยุติธรรม	ไม่ยุติธรรม
1.	 				
2.	  				
3.	  				

4. วิทยากรเป็นผู้ดำเนินการให้ผู้เข้ารับการอบรมทำกิจกรรม“ยุติธรรมหรือไม่” ภายในเวลาไม่เกิน 10 นาที
5. วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมอภิปรายสิ่งที่ได้จากการทำกิจกรรม “ยุติธรรมหรือไม่”
6. วิทยากรอธิบาย/ สรุปเพิ่มเติม โดยใช้ภาพนิ่งที่ 2.6 ภาพนิ่งที่ 2.7 และภาพนิ่งที่ 2.8 ประกอบการอธิบาย





แนวทางการจัดกิจกรรม

เรื่อง แผนภาพต้นไม้และกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

สถานการณ์ปัญหาที่ 1

เอและบี แข่งเป่ากบ โดยมีกติกาว่าถ้าใครชนะ 2 เกมติดต่อกันหรือชนะ 3 เกมก่อนจะเป็นผู้ชนะ
จงหาจำนวนวิธีของรูปแบบทั้งหมดที่เป็นไปได้ของการแข่งขันที่มีผู้ชนะ (ไม่มีการเสมอกัน)

แนวทางการจัดกิจกรรม

1. วิทยากรยกสถานการณ์ปัญหาที่ 1 ซึ่งเป็นปัญหาต้องอาศัยการแจงกรณีหรือการใช้แผนภาพต้นไม้ช่วยในการหาคำตอบ โดยใช้ ภาพนิ่งที่ 3.1 ดังนี้

สถานการณ์ปัญหาที่ 1

เอและบี แข่งเป่ากบ

โดยมีกติกาว่า

ถ้าใครชนะ 2 เกมติดต่อกัน

หรือชนะ 3 เกมก่อนจะเป็นผู้ชนะ

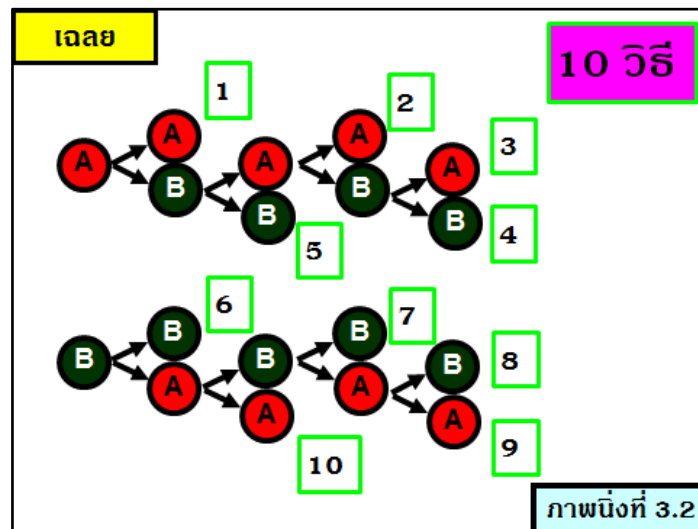
จงหาจำนวนวิธีของรูปแบบทั้งหมดที่

เป็นไปได้ของการแข่งขันที่มีผู้ชนะ

(ไม่มีการเสมอกัน)

ภาพนิ่งที่ 3.1

2. วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมแบ่งกลุ่มช่วยกันแก้สถานการณ์ปัญหาที่ 1 ภายในเวลา 3 นาทีหรือเมื่อผู้เข้ารับการอบรมส่วนใหญ่สามารถหาคำตอบได้แล้ว วิทยากรสามารถเฉลยได้ทันที โดยใช้ ภาพนิ่งที่ 3.2 ประกอบการเฉลย ดังนี้



3. วิทยากรอธิบายเพิ่มเติมว่า นอกจากนี้ คำตอบอาจอยู่ในรูปการเขียนแจงกรณีได้ทั้งหมด 10 กรณี ได้แก่ AA, ABAA, ABABA, ABABB, ABB , BB, BABB, BABAB, BABAA, BAA

[กรณี 1 AA ผล : A ชนะ เนื่องจาก A ชนะ 2 เกมติดกัน

กรณี 2 ABAA ผล : A ชนะ เนื่องจาก A ชนะ 2 เกมติดกันหรือชนะ 3 เกมก่อน

กรณี 3 ABABA ผล : A ชนะ เนื่องจาก A ชนะ 3 เกมก่อน

กรณี 4 ABABB ผล : B ชนะ เนื่องจาก B ชนะ 3 เกมก่อน

กรณี 5 ABB ผล : B ชนะ เนื่องจาก B ชนะ 2 เกมติดกัน

กรณี 6 BB ผล : B ชนะ เนื่องจาก B ชนะ 2 เกมติดกัน

กรณี 7 BABB ผล : B ชนะ เนื่องจาก B ชนะ 2 เกมติดกันหรือชนะ 3 เกมก่อน

กรณี 8 BABAB ผล : B ชนะ เนื่องจาก B ชนะ 3 เกมก่อน

กรณี 9 BABAA ผล : A ชนะ เนื่องจาก A ชนะ 2 เกมติดกันหรือชนะ 3 เกมก่อน

กรณี 10 BAA ผล : A ชนะ เนื่องจาก A ชนะ 2 เกมติดกัน]

สถานการณ์ปัญหาที่ 2 ในกระเป๋าเดินทางของนที มีเสื้ออยู่ 3 ตัว และกางเกง 2 ตัว

จงเขียนแผนภาพต้นไม้แสดงวิธีการแต่งตัวที่แตกต่างกันทั้งหมดของนที



s_1

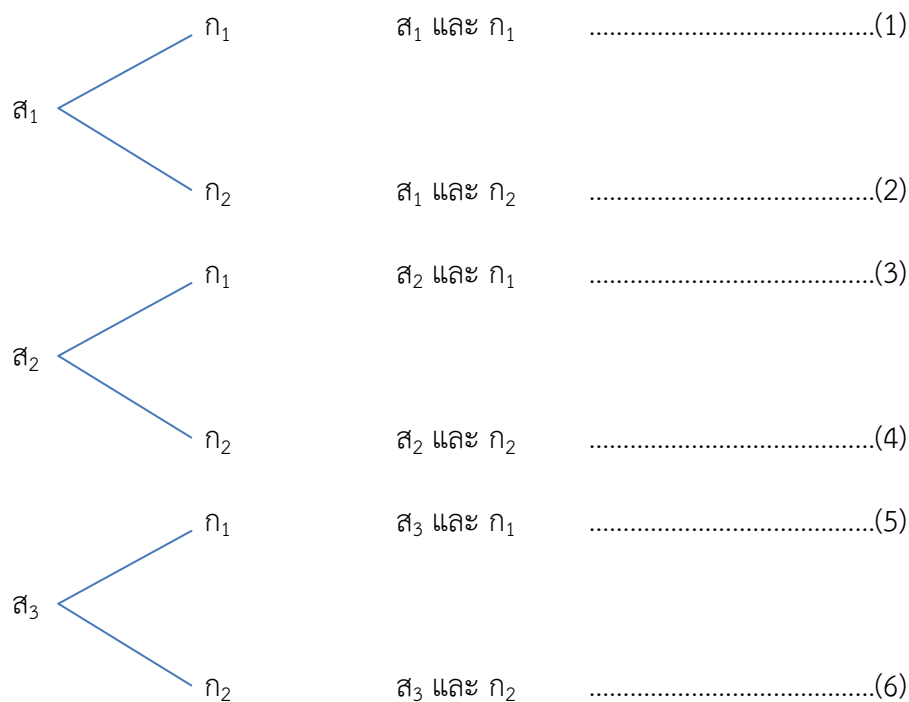
s_2

s_3

g_1

g_2

สมมติให้เสื้อทั้งสามตัวเป็น s_1, s_2, s_3 และให้กางเกงทั้งสองตัวเป็น g_1, g_2
ใช้แผนภาพต้นไม้ช่วยในการคิดได้ ดังนี้

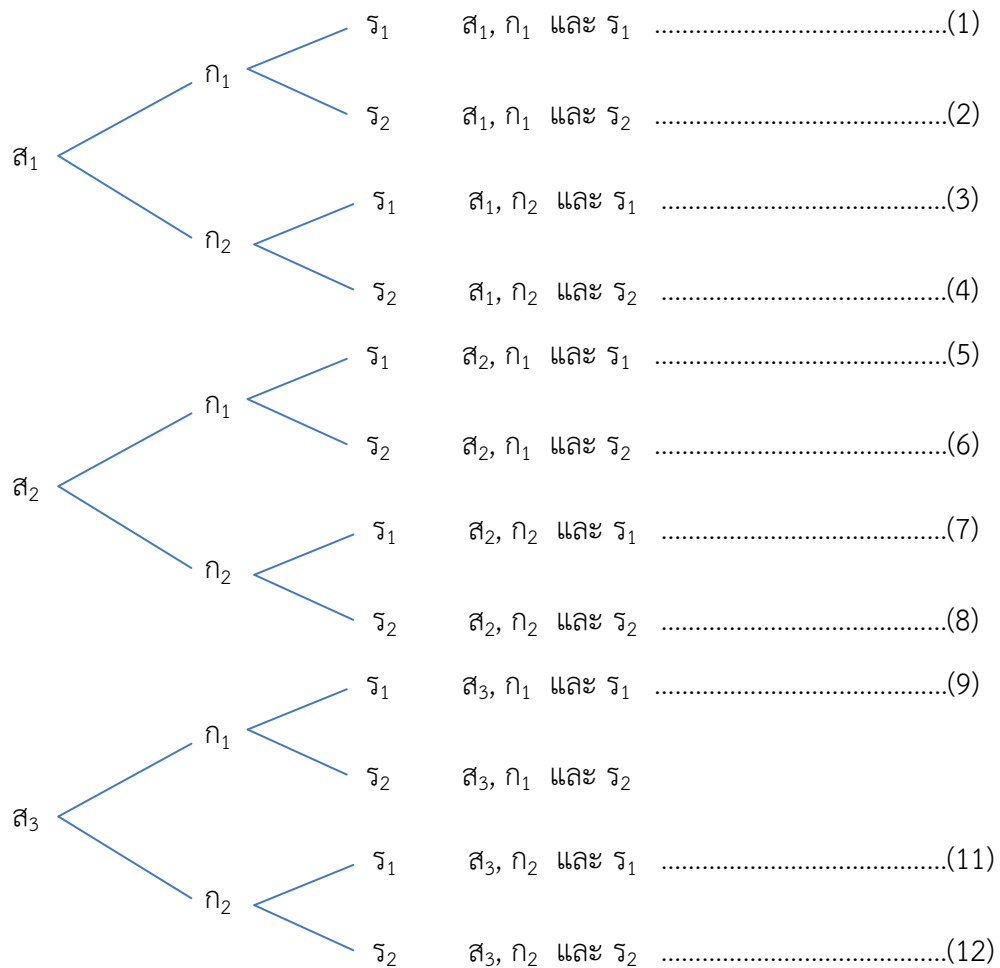


ดังนั้นที่จะแต่งตัวที่แตกต่างกันได้ทั้งหมด 6 วิธี ซึ่งเท่ากับผลคูณของจำนวนเสื้อคูณด้วยจำนวนกางเกง หรือเท่ากับ 3×2 หรือ 6 นั่นเอง

หากในการเดินทาง นทีนำรองเท้ามาด้วย 2 คู่
จงเขียนแผนภาพต้นไม้แสดงวิธีการแต่งตัวพร้อมรองเท้าที่แตกต่างกันทั้งหมดของนที



สมมุติเพิ่มให้รองเท้าทั้งสองคู่เป็น ร₁, ร₂ ใช้แผนภาพต้นไม้ช่วยในการคิดได้ ดังนี้



ดังนั้นที่จะแต่งตัวที่แตกต่างกันได้ทั้งหมด 12 วิธี ซึ่งเท่ากับผลคูณของจำนวนเสื้อคูณด้วยจำนวนกางเกงคูณด้วยจำนวนรองเท้า หรือเท่ากับ $3 \times 2 \times 2$ หรือ 12 นั่นเอง

จากนั้นวิทยากรกล่าวถึง **หลักการคูณของกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ** ดังนี้

หลักการคูณ

ถ้าการทำงานอย่างหนึ่งมี k ขั้นตอน ขั้นตอนหนึ่งที่มีวิธีเลือกทำได้ n_1 วิธี ในแต่ละวิธีของขั้นตอนหนึ่งที่มีวิธีเลือกทำขั้นตอนที่สองได้ n_2 วิธี ในแต่ละวิธีที่ทำงานขั้นตอนที่หนึ่งและขั้นตอนที่สองมีวิธีเลือกทำขั้นตอนที่สามได้ n_3 วิธี เช่นนี้เรื่อยไปจนถึงขั้นตอนสุดท้ายคือ ขั้นตอนที่ k จะทำได้ n_k วิธี จำนวนทั้งหมดที่จะเลือกทำงาน k อย่างเท่ากับ $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$ วิธี

สถานการณ์ปัญหาที่ 3

ในตู้เสื้อผ้าของตั้ม มีเสื้อเชิ้ตอยู่ 10 ตัว เนคไท 4 เส้น กางเกง 5 ตัว และถุงเท้าอีก 6 คู่
จงหาจำนวนวิธีการแต่งตัวที่แตกต่างกันทั้งหมดของตั้ม

ในการแต่งตัวของตั้ม มี 4 ขั้นตอนคือ

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเสื้อได้ 10 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกกางเกงได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกเนคไทได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 เลือกถุงเท้าได้ 6 วิธี

ดังนั้น วิธีแต่งตัวของตั้มทำได้ทั้งหมด $10 \times 5 \times 4 \times 6 = 1200$ วิธี

นั่นคือ ตั้มจะแต่งตัวได้แตกต่างกันทั้งหมด 1200 วิธี

สถานการณ์ปัญหาที่ 4

เจ้าของร้านผลิตแจกันร้านหนึ่งต้องการผลิตแจกันแบบใหม่จำนวน 6 แบบ

โดยแต่ละแบบมี 4 สี และแต่ละสีมี 3 ขนาด

หากเจ้าของร้านต้องการผลิตครบทุกแบบ ทุกสี ทุกขนาด จะมีแจกันแบบใหม่ที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่ใบ

ในการผลิตแจกันให้ได้ครบทุกแบบ ทุกสี ทุกขนาด มี 3 ขั้นตอน

ขั้นตอนที่ 1 เลือกแบบแจกันได้ 6 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกสีแจกันได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกขนาดของแจกันได้ 3 วิธี

ดังนั้น จะสามารถผลิตแจกันได้ $6 \times 4 \times 3 = 72$ วิธี

นั่นคือ เจ้าของร้านจะผลิตแจกันใหม่ครบทุกแบบ ทุกสี ทุกขนาด ที่ต่างกันทั้งหมด 72 ใบ

สถานการณ์ปัญหาที่ 5

คุณพ่อกำลังจัดสวนหน้าบ้าน



จงหาจำนวนวิธีที่แตกต่างกันทั้งหมดที่คุณพ่อจะวางกระถางจำนวน 4 กระถางตามแนวรั้วหน้าบ้าน

ในการวางกระถางดอกไม้จำนวน 4 กระถางตามแนวรั้วหน้าบ้าน มี 4 ขั้นตอน

ขั้นตอนที่ 1 เลือกกระถางดอกไม้กระถางแรกได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกกระถางดอกไม้กระถางที่สองได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกกระถางดอกไม้กระถางที่สามได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 เลือกกระถางดอกไม้กระถางสุดท้ายได้ 1 วิธี

ดังนั้น จะสามารถวางกระถางดอกไม้ตามแนวรั้วหน้าบ้านได้ $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$ วิธี

นั่นคือ คุณพ่อจะสามารถวางกระถางดอกไม้ตามแนวรั้วหน้าบ้านได้ต่างกันทั้งหมด 24 วิธี

แนวทางการจัดกิจกรรมเพิ่มเติม

1. วิทยากรยกสถานการณ์ปัญหาเพิ่มเติมจากสถานการณ์ปัญหาที่ 5 โดยเพิ่มจำนวนกระถางเป็น 5 กระถาง 6 กระถาง 10 กระถาง ไปเรื่อย ๆ จนกว่าผู้เข้ารับการอบรมจะบอกได้ว่า เมื่อจำนวนกระถางเพิ่มเป็น n กระถางจะสามารถจัดกระถางได้เป็น $n!$ วิธี
2. วิทยากรเปลี่ยนสถานการณ์จากจัดกระถางดอกไม้เป็นสถานการณ์อื่นเช่น จัดคน n คนเข้าแถวหน้ากระดาน เป็นต้น เพื่อนำเข้าสู่การสรุปว่า วิธีเรียงสับเปลี่ยนมีความเกี่ยวข้องกับหลักการคูณของกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับโดยสามารถสรุปได้ว่า จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด เท่ากับ $n!$
3. วิทยากรใช้สถานการณ์เดิมแต่เปลี่ยนจำนวนจากจัดเรียงกระถางทั้งหมดเป็นจัดเรียงเพียงบางส่วนหรือจากจัดคนทั้งหมดเป็นจัดคนมาเพียงบางคน เพื่อจะได้นำเข้าสู่การสรุปจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยจัดเรียงครั้งละ r สิ่ง ซึ่งสรุปได้ว่า จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยจัดเรียงครั้งละ r สิ่ง เท่ากับ $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ หรือ $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

เฉลยใบงานที่ 1

เรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

คำสั่งที่ 1 จงอธิบายถึงจำนวนวิธีในสถานการณ์ต่าง ๆ ต่อไปนี้ว่าเหมือนหรือต่างกันอย่างไร

- (1) โยนเหรียญ 3 เหรียญ 1 ครั้ง
- (2) โยนเหรียญ 1 เหรียญ 3 ครั้ง
- (3) ทำข้อสอบประเภทถูกผิดจำนวน 3 ข้อ (ทำทุกข้อ)
- (4) มีบุตร 3 คน
- (5) ชวนเพื่อน 3 คน ไปปลูกต้นไม้เนื่องในวันพ่อแห่งชาติ

[เช่น สถานการณ์ปัญหาไม่เหมือนกัน แต่จำนวนวิธีได้เท่ากันทุกข้อ คือ 8 วิธี จำนวนขั้นตอนในการคำนวณเหมือนกัน แผนภาพต้นไม้เหมือนกัน]

คำสั่งที่ 2 จงหาจำนวนวิธีที่แตกต่างกันทั้งหมดที่ได้จากการ

- | | |
|--|---------------|
| (1) โยนเหรียญ 5 เหรียญ 1 ครั้ง | [32 วิธี] |
| (2) โยนเหรียญ 1 เหรียญ 10 ครั้ง | [1,024 วิธี] |
| (3) โยนลูกเต๋า 1 ลูก 4 ครั้ง | [1,296 วิธี] |
| (4) ทำข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือกจำนวน 5 ข้อ | [1,024 วิธี] |
| (5) ชวนเพื่อน 4 คน ไปบริจาคโลหิตเนื่องในวันแม่แห่งชาติ | [16 วิธี] |
| (6) นัก 6 ตัวเลือกเกาะกิ่งไม้ 5 กิ่ง | [15,625 วิธี] |
| (7) นัก 4 ตัวเลือกเกาะกิ่งไม้ 7 กิ่ง ซึ่งถ้านักหัวหน้าผูกเกาะกิ่งไม้ใดแล้วนักตัวอื่นจะไม่เกาะกิ่งไม้กิ่งนั้น | [1,512 วิธี] |



เฉลยใบงานที่ 2
เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยน

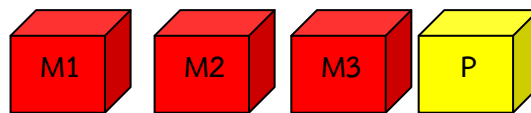
ข้อ	สถานการณ์ A	เปรียบเทียบ ($<$, $=$, $>$)	สถานการณ์ B
1	เขียนตัวเลขแสดงจำนวนที่มีสี่หลัก จากป้าย 4 ป้าย ที่มีหมายเลขกำกับ 1, 2, 3, 4 [24 วิธี]	$<$	เขียนตัวเลขแสดงจำนวนที่มีสี่หลัก โดยใช้สมาชิกในเซต {1, 2, 3, 4} [256 วิธี]
2	เขียนตัวเลขแสดงจำนวนคู่ที่มีสี่หลัก โดยใช้สมาชิกในเซต {1, 2, 3, 4} [128 วิธี]	$=$	เขียนตัวเลขแสดงจำนวนคี่ที่มีสี่หลัก โดยใช้สมาชิกในเซต {1, 2, 3, 4} [128 วิธี]
3	เขียนตัวเลขแสดงจำนวนคู่ที่มีสี่หลัก โดยใช้สมาชิกในเซต {1, 2, 3, 4} [128 วิธี]	$>$	เขียนตัวเลขแสดงจำนวนคู่ที่มีสี่หลัก โดยใช้สมาชิกในเซต {0, 1, 2, 3} [96 วิธี]
4	เขียนตัวเลขแสดงจำนวนคู่ที่มีสี่หลักที่ไม่ ซ้ำกัน โดยใช้สมาชิกในเซต {1, 2, 3, 4} [12 วิธี]	$<$	เขียนตัวเลขแสดงจำนวนคู่ที่มีสี่หลักที่ ไม่ซ้ำกัน โดยใช้สมาชิกในเซต {0, 2, 3, 4} [14 วิธี]
5	วิธีจัดเด็กอนุบาลจำนวน 9 คน มายืนรำ ถวายพระพรบนเวที โดยยืนเป็นแถวหน้า กระดาน 3 แถว แถวละ 3 คน [362,880 วิธี]	$=$	วิธีจัดเด็กอนุบาลจำนวน 9 คน มายืน รำถวายพระพรบนเวที โดยยืนเป็นแถว หน้ากระดาน 2 แถว แถวหน้า 4 คน แถวหลัง 5 คน [362,880 วิธี]
6	จัดเรียงหนังสือ 4 เล่ม บนชั้นหนังสือ ซึ่งประกอบด้วยหนังสือคณิตศาสตร์ที่ เหมือนกัน 3 เล่ม และฟิสิกส์ หนึ่งเล่ม [4 วิธี]	$<$	จัดเรียงหนังสือ 4 เล่ม บนชั้นหนังสือ ซึ่งประกอบด้วยหนังสือคณิตศาสตร์ที่ แตกต่างกัน 3 เล่ม และฟิสิกส์ หนึ่ง เล่ม [24 วิธี]
7	เขียนคำที่มีความหมายหรือไม่ก็ได้จากคำ ว่า “NUMBER” [720 วิธี]	$>$	เขียนคำที่มีความหมายหรือไม่ก็ได้จาก คำว่า “MEMBER” [180 วิธี]

แนวการจัดการอบรม

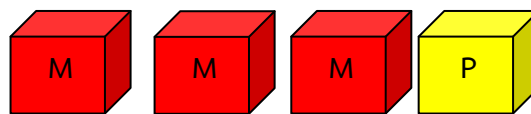
1. วิทยากรวิทยากรแบ่งกลุ่มผู้เข้ารับการอบรม กลุ่มละ 3-4 คน แต่ละกลุ่มช่วยกันทำใบงานที่ 2 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยน เป็นเวลา 20 นาที โดยวิทยากรชี้แจงให้ผู้รับการอบรมทราบว่าอาจจะไม่จำเป็นต้องหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของแต่ละสถานการณ์ก็ได้แต่ให้ผู้เข้ารับการอบรมเน้นการเปรียบเทียบว่าทั้งสองสถานการณ์มีจำนวนวิธีเท่ากันหรือไม่ หากไม่เท่ากันแล้วสถานการณ์ใดมีจำนวนวิธีมากกว่า
2. วิทยากรเฉลยใบงานที่ 2 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนข้อ 1-5 ที่ละข้อ โดยเน้นการใช้คำถามให้ผู้รับการอบรมบอกเหตุผลที่ทำให้ทราบว่าจำนวนวิธีในแต่ละสถานการณ์ไม่เท่ากันเพราะเหตุใดที่ละข้อ โดยวิทยากรเฉลยการหาคำตอบของจำนวนวิธีของแต่ละสถานการณ์ด้วย
3. วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมพิจารณาการจัดเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดกับสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมดในสถานการณ์ที่ 6 จากใบงานที่ 2 แล้วหาความสัมพันธ์ของการหาจำนวนวิธีจัดเรียงสับเปลี่ยนของทั้งสองแบบ จนนำไปสู่สูตรการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมดได้ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1

- (1) จำนวนวิธีที่แตกต่างกันทั้งหมดในการจัดเรียงหนังสือ 4 เล่มบนชั้นหนังสือ ซึ่งประกอบด้วยหนังสือคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกัน 3 เล่ม และฟิสิกส์ หนึ่งเล่ม เท่ากับ $4! = 24$ วิธี



- (2) จำนวนวิธีที่แตกต่างกันทั้งหมดในการจัดเรียงหนังสือ 4 เล่มบนชั้นหนังสือ ซึ่งประกอบด้วยหนังสือคณิตศาสตร์ที่เหมือนกัน 3 เล่ม และฟิสิกส์ หนึ่งเล่ม



เท่ากับ 4 วิธี ได้แก่ MMMP, MMPM, MPMM, PMMM

จะพบว่า ถ้าหนังสือคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกัน ได้เพียง 4 วิธี แต่หากแตกต่างกันได้ 24 วิธี ซึ่งกรณีที่หนังสือคณิตศาสตร์แตกต่างกันเป็น 6 เท่าของกรณีที่หนังสือคณิตศาสตร์ 3 เล่มไม่แตกต่างกัน นั่นคือ แต่ละวิธีของการจัดเรียงหนังสือคณิตศาสตร์ที่ไม่แตกต่างกัน เทียบได้กับ 6 วิธีของกรณีของวิธีการจัดเรียงหนังสือคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกัน เช่น

MMMP เทียบกับ $M_1M_2M_3P$, $M_1M_3M_2P$, $M_2M_1M_3P$, $M_2M_3M_1P$, $M_3M_1M_2P$, $M_3M_2M_1P$

หรือหากพิจารณาแต่ MMM เทียบกับ $M_1M_2M_3$, $M_1M_3M_2$, $M_2M_1M_3$, $M_2M_3M_1$,

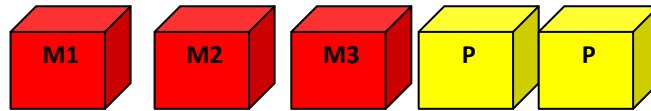
$M_3M_1M_2$, $M_3M_2M_1$ แสดงให้เห็นว่า หนังสือคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกัน 3 เล่มซึ่งเรียงได้ $3! = 6$ วิธี นั้นหากเป็นหนังสือที่ไม่แตกต่างกันจะสามารถเรียงได้เพียง 1 วิธี



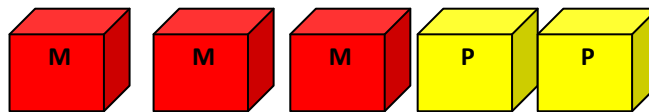
หรือสรุปได้ว่า $4! = 4 \times 3!$ หรือ $4 = \frac{4!}{3!}$

ตัวอย่างที่ 2

- (1) จงหาจำนวนวิธีที่แตกต่างกันทั้งหมดในการจัดเรียงหนังสือ 5 เล่มบนชั้นหนังสือ ซึ่งประกอบด้วยหนังสือคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกัน 3 เล่ม และฟิสิกส์ ที่เหมือนกัน 2 เล่ม



- (2) จงหาจำนวนวิธีที่แตกต่างกันทั้งหมดในการจัดเรียงหนังสือ 5 เล่มบนชั้นหนังสือ ซึ่งประกอบด้วยหนังสือคณิตศาสตร์ที่เหมือนกัน 3 เล่ม และฟิสิกส์ ที่เหมือนกัน 2 เล่ม



วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมหาคำตอบโดยสมมติว่าไม่ทราบสูตรการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด โดยทำคล้ายกับตัวอย่างที่ 1

จนสรุปได้ว่า $5! = 10 \times 3! \times 2!$ หรือ $10 = \frac{5!}{3!2!}$

4. วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมช่วยกันสรุปวิธีการหาวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด

[วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด ถ้ามีสิ่งของอยู่ n สิ่ง ในจำนวนนี้มี n_1 สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่หนึ่ง มี n_2 สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่สอง มี n_k สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ k โดยที่ $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ แล้วจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่ง เท่ากับ $\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$]

เฉลยใบงานที่ 3
เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่

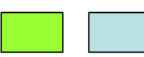
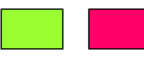
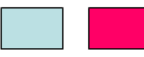
ข้อ	สถานการณ์ A	เปรียบเทียบ ($<$, $=$, $>$)	สถานการณ์ B
1	เลือกคณะกรรมการนักเรียนจำนวน 3 คน จากผู้สมัครทั้งหมด 10 คน [120 วิธี]	$<$	เลือกประธานนักเรียน รองประธาน นักเรียนและเหรัญญิกจากผู้สมัคร ทั้งหมด 10 คน [720 วิธี]
2	เลือกนักวิ่ง 4 คนจากทั้งหมด 7 คน เพื่อไป แข่งขันวิ่งผลัด 4×100 โดยระบุว่าใครได้ เป็นไม้หนึ่ง ไม้สอง ไม้สามและไม้สี่ [840 วิธี]	$>$	เลือกนักวิ่ง 4 คนจากทั้งหมด 7 คน เพื่อ ไปแข่งขันวิ่งผลัด 4×100 โดยไม่ระบุ ลำดับการวิ่ง [35 วิธี]
3	หยิบลูกปิงปอง 3 ลูกพร้อมกันจากกล่องที่มี ลูกปิงปองทั้งหมด 12 ลูก [220 วิธี]	$<$	หยิบลูกปิงปอง 3 ลูกโดยหยิบทีละลูก แบบไม่ใส่กลับคืนจากกล่องที่มีลูก ปิงปองทั้งหมด 12 ลูก [1,320 วิธี]
4	หยิบลูกปิงปอง 3 ลูกโดยหยิบทีละลูกแบบ ใส่กลับคืนจากกล่องที่มีลูกปิงปองทั้งหมด 10 ลูก [1,000 วิธี]	$>$	หยิบลูกปิงปอง 3 ลูกโดยหยิบทีละลูก แบบไม่ใส่กลับคืนจากกล่องที่มีลูก ปิงปองทั้งหมด 10 ลูก [720 วิธี]
5	เลือกคนเข้าทำงาน 4 คน โดยเลือกจาก ผู้สมัครชาย 5 คนเลือกมา 2 คนและจาก ผู้สมัครหญิง 5 คนเลือกมาอีก 2 คน [400 วิธี]	$<$	เลือกคนเข้าทำงาน 4 คนจากผู้สมัคร ชาย 5 คนและผู้สมัครหญิง 5 คน โดย จะเป็นผู้ชายหรือผู้หญิงก็ได้ [5,040 วิธี]
6	เลือกทำข้อสอบ 7 ข้อ จากข้อสอบทั้งหมด 10 ข้อ [120 วิธี]	$>$	ทำข้อสอบ 7 ข้อ โดยเลือกทำ 4 ข้อจาก 5 ข้อแรกและเลือกทำอีก 3 ข้อจาก 5 ข้อหลัง [50 วิธี]

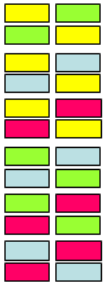


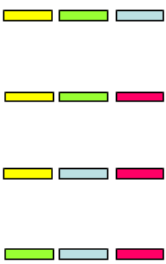
แนวทางการจัดการอบรม

1. วิทยากรแบ่งกลุ่มผู้เข้ารับการอบรม กลุ่มละ 3-4 คน แต่ละกลุ่มช่วยกันทำใบงานที่ 3 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ เป็นเวลา 5 นาที โดยวิทยากรชี้แจงให้ผู้รับการอบรมทราบว่าเน้นการเปรียบเทียบว่าทั้งสองสถานการณ์มีจำนวนวิธีเท่ากันหรือไม่ หากไม่เท่ากันแล้วสถานการณ์ใดมีจำนวนวิธีมากกว่า
2. วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมอภิปรายเกี่ยวกับความสัมพันธ์และความแตกต่างระหว่างวิธีเรียงสับเปลี่ยนและจำนวนวิธีจัดหมู่ จากนั้นวิทยากรอธิบายเพิ่มเติมโดยใช้ ภาพนิ่งที่ 6.1-6.4 ดังนี้

ภาพนิ่งที่ 6.1	
วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ของ 1 สิ่งจาก 3 สิ่ง	
วิธีเรียงสับเปลี่ยน	วิธีจัดหมู่
  	  
$P_{3,1} = 3$	$C_{3,1} = 3$

ภาพนิ่งที่ 6.2	
วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ของ 2 สิ่งจาก 3 สิ่ง	
วิธีเรียงสับเปลี่ยน	วิธีจัดหมู่
     	  
$P_{3,2} = 6$	$C_{3,2} = 3$

ภาพนิ่งที่ 6.3	
วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ของ 2 สิ่งจาก 4 สิ่ง	
วิธีเรียงสับเปลี่ยน	วิธีจัดหมู่
	
$P_{4,2} = 12$	$C_{4,2} = 6$

ภาพนิ่งที่ 6.4	
วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ของ 3 สิ่งจาก 4 สิ่ง	
วิธีเรียงสับเปลี่ยน	วิธีจัดหมู่
	
$P_{4,3} = 24$	$C_{4,3} = 4$

3. วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ของสิ่งของ 2 สิ่งจากสิ่งของทั้งหมด 5 สิ่ง โดยสมมติว่าถ้าผู้เข้าอบรมไม่รู้สูตรใด ๆ ทั้งสิ้นแล้วจะมีวิธีการหาคำตอบได้อย่างไร โดยชี้แนะเล็กน้อยว่าควรหาจำนวนวิธีจัดหมู่ก่อนแล้วนำคำตอบที่ได้มาหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน ต่อจากนั้นให้ผู้เข้ารับการอบรมหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ของสิ่งของ 3 สิ่งจากสิ่งของทั้งหมด 5 สิ่งโดยห้ามใช้สูตรเช่นเดิม
4. วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมหาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนกับจำนวนวิธีจัดหมู่ โดยอาศัยภาพนิ่งที่ 6.5 ให้ผู้เข้าอบรมเติมจำนวนลงไป แล้ววิทยากรชี้ให้เห็นว่าจำนวนที่เติมลงไปเกี่ยวข้องกับจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนกับจำนวนวิธีจัดหมู่อย่างไร จนกว่าผู้รับการอบรมจะสรุปได้ว่าความสัมพันธ์คือ $P_{n,r} = r! C_{n,r}$

ภาพนิ่งที่ 6.5

ความสัมพันธ์ระหว่างวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่

(n,r)	$P_{n,r}$	$C_{n,r}$	ความสัมพันธ์
(3,1)	3	3	$P_{n,r} = \dots C_{n,r}$
(3,2)	6	3	$P_{n,r} = \dots C_{n,r}$
(4,2)	12	6	$P_{n,r} = \dots C_{n,r}$
(4,3)	24	4	$P_{n,r} = \dots C_{n,r}$
(5,2)	20	10	$P_{n,r} = \dots C_{n,r}$
(5,3)	60	10	$P_{n,r} = \dots C_{n,r}$

5. วิทยากรกล่าวถึงสูตรการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนและจำนวนวิธีจัดหมู่คร่าว ๆ ดังนี้
วิธีเรียงสับเปลี่ยน

วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

- 1) จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด เท่ากับ $n!$
- 2) จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยจัดเรียงครั้งละ r

สิ่ง เท่ากับ $P_{n,r} = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$

วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด

ถ้ามีสิ่งของอยู่ n สิ่ง ในจำนวนนี้มี n_1 สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่หนึ่ง มี n_2 สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่สอง ... มี n_k สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ k โดยที่

$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ แล้วจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่ง เท่ากับ

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

วิธีจัดหมู่

จำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง โดยเลือกคราวละ r สิ่ง

$$(0 \leq r < n) \text{ เท่ากับ } C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! r!} \text{ วิทยากรเฉลย ใบงานที่ 3 เรื่องวิธีเรียง}$$

สับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ ที่ละข้อ โดยเน้นการใช้คำถามให้ผู้รับการอบรมบอกเหตุผลที่ทำให้ทราบจำนวนวิธีในแต่ละสถานการณ์ไม่เท่ากันเพราะเหตุใดที่ละข้อ โดยวิทยากรเฉลยการหาคำตอบของจำนวนวิธีของแต่ละสถานการณ์ด้วย

เฉลยใบงานที่ 4

เรื่อง ความน่าจะเป็น

1. วิทยากรให้ตัวแทนผู้เข้ารับการอบรมบอกความหมายของคำว่า การทดลองสุ่ม ปฏิบัติตัวอย่าง เหตุการณ์

[การทดลองสุ่ม คือ การทดลองหรือการกระทำใด ๆ ซึ่งทราบว่าผลลัพธ์อาจจะเป็นอะไรได้บ้าง แต่ไม่สามารถบอกได้อย่างถูกต้องแน่นอนว่าในแต่ละครั้งที่ทดลองผลที่เกิดขึ้นจะเป็นอะไรในบรรดาผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้เหล่านั้น]

ปฏิบัติตัวอย่าง คือ เซตของผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้จากการทดลองสุ่ม

เหตุการณ์ คือ สับเซตของปฏิบัติตัวอย่าง หรือ เซตของสิ่งที่สนใจจากการทดลองสุ่ม]
2. วิทยากรยกตัวอย่างการทดลองสุ่ม 2-3 ตัวอย่าง แล้วให้ผู้เข้ารับการอบรมบอกปฏิบัติตัวอย่างและ เหตุการณ์
3. วิทยากรนำเข้าสู่เรื่องความน่าจะเป็น โดยพูดถึงโอกาสในการเกิดสิ่งต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน เช่นโอกาสที่ฝนจะตก โอกาสที่จะถูกรางวัลที่ 1 เป็นต้น จากนั้นสุ่มเรียกผู้เข้ารับการอบรมให้ยกตัวอย่างเพิ่มอีก 2-3 ตัวอย่าง
4. วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมบอกความหมายของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

[ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ คือ อัตราส่วนของจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ต่อจำนวนสมาชิกของปฏิบัติตัวอย่าง]
5. วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมตอบคำถามต่อไปนี้

“ในการโยนเหรียญหนึ่งครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวคือ 0.5 ถ้าโยนเหรียญมาแล้ว 9 ครั้งออกหัวทั้ง 9 ครั้ง จงหา ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวในการโยนครั้งที่ 10” [0.5]

จากนั้นวิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมอภิปรายสั้น ๆ ถึงคำตอบที่ได้กับคำว่า “Chance has no memory.”
6. วิทยากรยกตัวอย่างสถานการณ์ 2-3 ตัวอย่าง แล้วให้ผู้เข้ารับการอบรมเรียงลำดับความน่าจะเป็นจากน้อยไปมาก เช่น

สถานการณ์ที่ 1: การโยนลูกเต๋าสองลูก

 1. ได้แต้มรวมกันมากกว่า 1
 2. ได้แต้มรวมกันเท่ากับ 15
 3. ได้แต้มรวมกันเท่ากับ 4



4. ได้แต้มรวมกันน้อยกว่า 10

เรียงลำดับความน่าจะเป็นจากน้อยไปมากได้เป็น [2, 3, 4, 1]

สถานการณ์ที่ 2: หยิบลูกบอล 1 ลูก จากกล่องที่มีลูกบอลสีเขียว 5 ลูก สีฟ้า 2 ลูก สีส้ม 3 ลูก

1. ได้ลูกบอลสีฟ้า
2. ได้ลูกบอลสีดำ
3. ได้ลูกบอลสีเขียวหรือสีส้ม
4. ได้ลูกบอลสีเขียวและสีฟ้า

เรียงลำดับความน่าจะเป็นจากน้อยไปหามากได้เป็น[2, 4, 1, 3 หรือ 4, 2, 1, 3]

7. วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมทำใบงานที่ 4 เรื่องความน่าจะเป็น โดยให้เวลาผู้เข้ารับการอบรม อภิปรายสถานการณ์ที่ 1 (ดูรายละเอียดที่ ภาพนิ่ง 7.1) เป็นเวลา 2 นาที ก่อนให้ตัวแทนผู้เข้ารับการอบรมสรุปสิ่งที่ได้อภิปรายร่วมกัน

สถานการณ์ที่ 1



8. วิทยากรให้เวลาผู้เข้ารับการอบรมอภิปรายสถานการณ์ที่ 2 ในใบงานที่ 4 เป็นเวลา 5 นาที ก่อนพูดสรุปหรือให้ตัวแทนผู้เข้ารับการอบรมสรุปสิ่งที่ได้อภิปราย

[การหาความน่าจะเป็นโดยการคำนวณจากอัตราส่วนระหว่างจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ต่อจำนวนสมาชิกของปริภูมิตัวอย่าง จะต้องเขียนปริภูมิตัวอย่างให้ประกอบด้วย สมาชิกที่มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กันเท่านั้น ดังนั้นคนที่หาค่าความน่าจะเป็นได้ถูกต้องคือ ต้ม]

สถานการณ์ที่ 2 ในการทอดลูกเต๋าสองลูกพร้อมกัน

หนูดีและตั้มหาความน่าจะเป็นที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าสองลูกมีค่าเท่ากับ 4 ดังนี้



$$S = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \} \text{ ดังนั้น } n(S) = 11$$

$$\text{และ } E = \{4\} \text{ ดังนั้น } n(E) = 1 \text{ จะได้ } P(E) = \frac{1}{11}$$

$$S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$$

$$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$$

$$: \quad :$$

$$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}$$

$$\text{ดังนั้น } n(S) = 36$$

$$\text{และ } E = \{ (1,3), (2,2), (3,1) \} \text{ ดังนั้น } n(E) = 3$$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$



เฉลยแบบตรวจสอบความเข้าใจ
เรื่อง เทคนิคการนับและความน่าจะเป็น

1. จะสร้างจำนวนที่มีสี่หลัก จากเลขโดด 2, 4, 6, 8, 9 ได้ทั้งหมดกี่จำนวน โดยที่แต่ละจำนวนนั้น ต้องไม่มีเลขโดดในหลักใดซ้ำกันเลย [120 จำนวน]
2. จะมีวิธีทิ้งจดหมาย 6 ฉบับ ลงตู้ไปรษณีย์ 8 ตู้ได้กี่วิธีหากไม่ทิ้งซ้ำตู้ [20,160 วิธี]
3. จงหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนอักษรจากคำว่า LETTER [180 วิธี]
4. จงหาจำนวนวิธีจัดเด็กอนุบาลจำนวน 6 คน มายืนร่ำถวายพระพรบนเวที โดยยืนเป็นแถวหน้า กระดาน 2 แถว แถวละ 3 คน [720 วิธี]
5. ข้อสอบฉบับหนึ่งมี 2 ตอน ตอนที่หนึ่งมี 4 ข้อ ตอนที่สองมี 3 ข้อ นักเรียนต้องเลือกทำข้อสอบ ทั้งหมด 4 ข้อ จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งเลือกทำตอนที่หนึ่งจำนวน 3 ข้อ และเลือก ทำตอนที่สองจำนวน 1 ข้อ $\left[\frac{6}{35} \right]$

แบบประเมินการมีส่วนร่วมในกิจกรรม

คำชี้แจง: ให้เขียนเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องตามความเห็นของท่านที่ตรงกับความเป็นจริงมากที่สุด

ที่	ชื่อ - สกุล	เข้าร่วมเมื่อในกิจกรรม	ความรับผิดชอบ	การเสนอความคิดเห็น	ความริเริ่มสร้างสรรค์	การเป็นผู้นำหรือผู้ตามที่ดี	การตรงเวลา	รวม (10 คะแนน)
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								

เกณฑ์การให้คะแนน

- ได้ 10 คะแนน เมื่อมีเครื่องหมาย ✓ ครบ 6 ข้อ
 ได้ 9 คะแนน เมื่อมีเครื่องหมาย ✓ อยู่ 5 ข้อ
 ได้ 8 คะแนน เมื่อมีเครื่องหมาย ✓ อยู่ 4 ข้อ
 ได้ 7 คะแนน เมื่อมีเครื่องหมาย ✓ อยู่ 3 ข้อ
 ได้ 6 คะแนน เมื่อมีเครื่องหมาย ✓ อยู่ 2 ข้อ
 ได้ 5 คะแนน เมื่อมีเครื่องหมาย ✓ อยู่ 1 ข้อ
 ได้ 0 คะแนน เมื่อไม่มีเครื่องหมาย ✓ อยู่เลย

ลงชื่อ.....วิทยากร
 วันที่ประเมิน.....



เรื่อง สถิติและการวิเคราะห์ข้อมูล

แผนการอบรม

แผนการอบรมครุคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สำหรับครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่
เรื่อง สถิติและการวิเคราะห์ข้อมูล
เวลา 4 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์ เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรม

1. มีความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับขอบข่ายเนื้อหาและสาระสำคัญของ เรื่อง สถิติและการวิเคราะห์ข้อมูล
2. มีความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับความเข้าใจคลาดเคลื่อน เรื่อง สถิติและการวิเคราะห์ข้อมูล
3. สามารถออกแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้และได้แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง สถิติและการวิเคราะห์ข้อมูล

สาระการเรียนรู้

1. การเลือกใช้สถิติและการวิเคราะห์ข้อมูลที่เหมาะสม
2. การสำรวจความคิดเห็น

สาระสำคัญ

1. สถิติ

1.1 ความหมายของสถิติ

สถิติเป็นศาสตร์ที่ว่าด้วยการเก็บรวบรวมและการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาข้อสรุปจากข้อมูลที่เกี่ยวข้องแล้วนำมาอธิบายปรากฏการณ์หนึ่ง หรือตอบคำถาม หรือประเด็นปัญหาที่สนใจ โดยอาศัยข้อมูลที่ได้จากการเกิดซ้ำ ๆ ของปรากฏการณ์การนั้น ๆ การวิเคราะห์ข้อมูลนี้อาจแบ่งออกเป็นสองส่วน คือ การวิเคราะห์ขั้นต้นที่มุ่งวิเคราะห์เพื่ออธิบายลักษณะกว้าง ๆ ของข้อมูลชุดนั้นซึ่งเรียกว่า **สถิติเชิงพรรณนา** (descriptive statistic) กับการวิเคราะห์ข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้จากตัวอย่างเพื่ออ้างอิงไปถึงข้อมูลทั้งหมดซึ่งเรียกว่า **สถิติเชิงอนุมาน** (inferential statistic)

1.2 องค์ประกอบของสถิติศาสตร์

- 1) การเก็บรวบรวมข้อมูล
- 2) การวิเคราะห์ข้อมูล
- 3) การนำเสนอข้อมูล

1.3 การจำแนกประเภทของข้อมูลตามลักษณะข้อมูล

เมื่อจำแนกประเภทของข้อมูลตามลักษณะของข้อมูลจะจำแนกเป็น 2 ลักษณะ คือ ข้อมูลเชิงปริมาณ (quantitative data) และข้อมูลเชิงคุณภาพ (qualitative data)



1.4 วิธีการเก็บรวบรวมข้อมูล

- 1) วิธีการรวบรวมข้อมูลทุติยภูมิ ซึ่งส่วนใหญ่มักจะอยู่ในหนังสือ รายงาน บทความ หรือเอกสารต่าง ๆ
- 2) วิธีการรวบรวมข้อมูลปฐมภูมิ
 - (1) การสัมภาษณ์
 - (2) การสอบถามทางไปรษณีย์
 - (3) การสอบถามทางโทรศัพท์
 - (4) การสังเกต
 - (5) การทดลอง

2. การวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น

2.1 การวัดค่ากลางของข้อมูล

- 1) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต
- 2) ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต
- 3) ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก
- 4) ค่ากึ่งกลางพิสัย
- 5) มัธยฐาน
- 6) ฐานนิยม

2.2 การวัดตำแหน่งที่หรือตำแหน่งสัมพัทธ์ของข้อมูล

- 1) ควอร์ไทล์

ซึ่งวิธีการหาควอร์ไทล์ที่ 2 เหมือนกับการหามัธยฐานของข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่ กล่าวคือ เรียงข้อมูลจากค่าที่น้อยที่สุดไปหาค่าที่มากที่สุด แล้วหาตำแหน่งที่ของควอร์ไทล์ที่ต้องการ โดยการหา Q_1 คือ การหามัธยฐานของข้อมูลที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับมัธยฐาน และการหา Q_3 คือ การหามัธยฐานของข้อมูลที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับมัธยฐาน

จากข้อมูลข้างต้นเมื่อหาข้อมูลที่มีค่าต่ำสุด ข้อมูลที่มีค่าสูงสุด ควอร์ไทล์ที่ 1 ควอร์ไทล์ที่ 2 และควอร์ไทล์ที่ 3 จะสร้างแผนภาพที่เรียกว่า box-and-whisker plot หรือ box-plot ซึ่งในที่นี้จะเรียกว่า แผนภาพกล่อง

- 2) เดไซล์
- 3) เปอร์เซ็นไทล์

2.3 การวัดการกระจายของข้อมูล

โดยทั่ว ๆ ไป การวัดการกระจายของข้อมูลแบ่งออกได้เป็น 2 วิธี คือ

- 1) การกระจายสัมบูรณ์
 - (1) พิสัย
 - (2) ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ หรือกึ่งช่วงควอร์ไทล์
 - (3) ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย
 - (4) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
- 2) การกระจายสัมพัทธ์
 - (1) สัมประสิทธิ์ของพิสัย
 - (2) สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์
 - (3) สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย
 - (4) สัมประสิทธิ์ของความแปรผัน

3) การสำรวจความคิดเห็น

การสำรวจความคิดเห็นของกลุ่มบุคคลเกี่ยวกับเรื่องใดเรื่องหนึ่งก็คือการเก็บรวบรวมข้อมูลโดยวิธีสอบถามความคิดเห็นเกี่ยวกับเรื่องดังกล่าวจากกลุ่มบุคคลนั้น ข้อมูลที่ได้จากความคิดเห็นของแต่ละบุคคลในเรื่องใด ๆ มิใช่ข้อเท็จจริงของเรื่องนั้น ๆ ทั้งหมด จะมีความแตกต่างกันเนื่องจากเพศ อายุ ระดับการศึกษา รายได้ อาชีพ สถานภาพสมรส ศาสนาหรือพื้นที่อยู่อาศัยก็ได้ การสรุปผลการสำรวจความคิดเห็นของกลุ่มบุคคล จึงนิยมสรุปผลจำแนกตามลักษณะต่าง ๆ ของกลุ่มผู้ตอบ

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน/ ยาก

1. ข้อมูลทุกชนิดสามารถหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตได้เสมอ
2. ข้อมูลที่มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากันย่อมมีการกระจายของข้อมูลเหมือนกัน
3. ข้อมูลที่มีการกระจายของข้อมูลเหมือนกันย่อมมีค่ากลางของข้อมูลเท่ากัน
4. ก่อนการหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐานหรือฐานนิยม ต้องแจกแจงความถี่ลงในตารางแจกแจงความถี่ก่อนแล้วจึงคำนวณจากตารางแจกแจงความถี่
5. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็นค่ากลางของข้อมูลดังนั้นค่าเฉลี่ยเลขคณิตจึงอยู่ตรงกลางของข้อมูลทั้งหมด
6. เป็นไปไม่ได้ที่จะมีข้อมูลชุดใด ๆ ที่มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และ ฐานนิยมเท่ากัน
7. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานใช้วัดการกระจายได้ดีกว่าการวัดการกระจายแบบอื่นเพราะมีการคำนวณที่ซับซ้อน
8. แผนภาพต้น – ใบ นำเสนอข้อมูลได้ดีกว่าตารางแจกแจงความถี่
9. แผนภาพกล่องไม่ได้ให้ข้อมูลอะไรนอกจากบอกการกระจายของข้อมูล
10. ผลการสำรวจความคิดเห็นที่สถาบันที่มีชื่อเสียงสำรวจย่อมน่าเชื่อถือ



11. ผลการสำรวจจะน่าเชื่อถือถ้ามีคนตอบแบบสอบถามจำนวนมาก
12. สัญลักษณ์สำหรับใช้ในสูตรการคำนวณข้อมูลของกลุ่มตัวอย่างกับสูตรที่ใช้คำนวณข้อมูลของประชากรไม่ต่างกัน
13. ผู้เรียนเข้าใจผิดเกี่ยวกับประชากรและกลุ่มตัวอย่าง (ถ้าโจทย์ไม่ระบุมา ถือว่าเป็นประชากร แต่ถ้าสุ่มมาถือว่าเป็นกลุ่มตัวอย่าง)

สื่อและแหล่งการเรียนรู้

1. สำหรับผู้เข้ารับการอบรม

- 1.1 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1: ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง การเลือกค่ากลางที่เหมาะสม
- 1.2 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 2: ใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง กราฟที่ใช้แสดงการแจกแจงความถี่
- 1.3 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 3: ใบกิจกรรมที่ 3 เรื่อง ค่ากลาง และการวัดการกระจาย
- 1.4 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 4: ใบกิจกรรมที่ 4 เรื่อง จริงหรือไม่
- 1.5 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 5: ใบกิจกรรมที่ 5 เรื่อง ผีวิเคราะห์ผลสำรวจ
- 1.6 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 6: ใบกิจกรรมที่ 6 เรื่อง การเลือกประเด็นที่สนใจ
- 1.7 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 7: ใบงานที่ 1 เรื่อง ส่วนใหญ่เป็นอย่างไร
- 1.8 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 8: ใบงานที่ 2 เรื่อง ข้อมูลที่เหมาะสมกับค่ากลาง
- 1.9 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 9: ใบงานที่ 3 เรื่อง การออกแบบการสำรวจความคิดเห็น
- 1.10 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 10: ใบงานที่ 4 เรื่อง ประเด็นคำถามที่สำคัญ
- 1.11 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 11: แบบสะท้อนความคิดเห็น
- 1.12 หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติและการวิเคราะห์ข้อมูล
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
- 1.13 คู่มือครู รายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติและการวิเคราะห์ข้อมูล
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
- 1.14 ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลาง
การศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

2. สำหรับวิทยากร

- 2.1 เอกสารสำหรับวิทยากร 1: แบบบันทึกผลการประเมิน เรื่อง สถิติและการวิเคราะห์ข้อมูล
- 2.2 เอกสารสำหรับวิทยากร 2: แบบประเมินการมีส่วนร่วมในกิจกรรม
- 2.3 แผนผังมโนทัศน์แสดงความสัมพันธ์เรื่อง สถิติและการวิเคราะห์ข้อมูล
- 2.4 ป้ายติดคำศัพท์ไว้และสามารถใส่หรือติดป้ายสำหรับลงคะแนน
- 2.5 ตารางสรุปผลโหวต
- 2.6 ตัวอย่างผลการสำรวจ
- 2.7 ป้ายคำถามพร้อมตัวเลือกที่สามารถขีดเขียน/ หรือใส่ป้ายคะแนนได้

2.8 ภาพฮิสโทแกรม และแผนภาพต้น-ใบของข้อมูล 6 ชุด

2.9 คู่มือสำหรับวิทยากร

การประเมินผล

รายการประเมิน	เกณฑ์การให้คะแนน (คะแนนเต็ม 13.5 คะแนน)	เครื่องมือ
1. การมีส่วนร่วมในกิจกรรม พิจารณาจากกิจกรรม 7 กิจกรรม ได้แก่ 1.1 กิจกรรมนำเข้าสู่บทเรียน 1.2 กิจกรรมที่ 1 1.3 กิจกรรมที่ 2 1.4 กิจกรรมที่ 3 1.5 กิจกรรมที่ 4 1.6 กิจกรรมที่ 5 1.7 กิจกรรมที่ 6	คะแนนเต็ม 8 คะแนน โดย ได้ 8 คะแนน เมื่อมีส่วนร่วมครบ 7 กิจกรรม ได้ 7 คะแนน เมื่อมีส่วนร่วมครบ 6 กิจกรรม ได้ 6 คะแนน เมื่อมีส่วนร่วมครบ 5 กิจกรรม ได้ 5 คะแนน เมื่อมีส่วนร่วมครบ 4 กิจกรรม ได้ 4 คะแนน เมื่อมีส่วนร่วมครบ 3 กิจกรรม ได้ 3 คะแนน เมื่อมีส่วนร่วมครบ 2 กิจกรรม ได้ 2 คะแนน เมื่อมีส่วนร่วมครบ 1 กิจกรรม ได้ 0 คะแนน เมื่อไม่มีส่วนร่วม	- แบบประเมินการมีส่วนร่วมในกิจกรรม
2. ชิ้นงาน พิจารณาจาก ข้อ 2.1 – 2.2 2.1 ความสำเร็จของการปฏิบัติงาน 2.2 คุณภาพของผลงาน	คะแนนเต็ม 2 คะแนน โดย ได้ 2 คะแนน เมื่อปฏิบัติงานสำเร็จและมีคุณภาพ ได้ 1 คะแนน เมื่อปฏิบัติงานสำเร็จแต่มีคุณภาพไม่สมบูรณ์ ได้ 0 คะแนน เมื่อปฏิบัติงานไม่สำเร็จ	- แบบประเมินชิ้นงาน
3. การทดสอบความรู้	คะแนนเต็ม 3.5 คะแนน โดย ตรวจให้คะแนนจากแบบทดสอบหลังเรียน 7 ข้อ ข้อละ 0.5 คะแนน	- แบบทดสอบหลังเรียน

แนวทางปฏิบัติสำหรับวิทยากร

1. ศึกษาแผนการจัดการเรียนรู้ เอกสารสำหรับวิทยากร และเอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม เรื่อง สถิติและการวิเคราะห์ข้อมูล โดยละเอียด
2. จัดเตรียมสื่อต่างๆ เช่น บัตรคำ อุปกรณ์รับลงคะแนน ป้ายสรุปคะแนน และตัวอย่างผลการสำรวจตามแหล่งสื่อต่าง ๆ แผนภาพต้น-ใบ ฮิสโทแกรม
3. จัดเตรียมเอกสารนำเสนอความรู้กิจกรรม เช่น PowerPoint
4. ศึกษา หลักสูตร คู่มือครูรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 ซึ่งมีประเด็นให้ดังนี้
 - เนื้อหาเรื่องสถิติและการวิเคราะห์ข้อมูลในแต่ละชั้นอยู่ในบทใดบ้าง
 - ในแต่ละบทมีหัวข้ออะไรบ้าง
 - ในแต่ละบทมีสาระสำคัญอะไรบ้าง
5. ศึกษาความเข้าใจคลาดเคลื่อนในเรื่อง สถิติและการวิเคราะห์ข้อมูล ในคู่มือการอบรม วิทยากรอาจเพิ่มเติมความเข้าใจคลาดเคลื่อนในเรื่องสถิติและการวิเคราะห์ข้อมูลที่วิทยากรพบนอกเหนือจากที่กล่าวไว้ในเอกสาร
6. ทำสำเนาเอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม (ใบงาน ใบกิจกรรม และเอกสารตัวอย่างการสำรวจ) ตามจำนวนผู้เข้ารับการอบรม
7. เตรียมแผนผังสรุปความสัมพันธ์ของมโนทัศน์ที่สำคัญเรื่องสถิติและการวิเคราะห์ข้อมูล เพื่อแสดงให้ผู้เข้ารับการอบรมทราบ ศึกษาโครงสร้างความสัมพันธ์เรื่องสถิติและการวิเคราะห์ข้อมูล และชี้แจงขอบเขตตามจุดประสงค์การอบรม รวมถึงการวัดผลและการประเมินผล ในช่วงก่อนนำเข้าสู่บทเรียน
8. ดำเนินการจัดการอบรมตามแนวทางการจัดกิจกรรม พร้อมทั้งประเมินผลผู้เข้ารับการอบรมตามรายการประเมินและเครื่องมือที่กำหนด แล้วกรอกคะแนนสรุปลง แบบบันทึกผลการประเมิน เรื่อง สถิติและการวิเคราะห์ข้อมูล

แนวทางการจัดกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
วิทยากรแจ้งให้ผู้เข้ารับการอบรมทราบเกี่ยวกับจุดประสงค์ในการอบรมเรื่อง สถิติและการวิเคราะห์ข้อมูล และแนวทางการประเมินผล ซึ่งแบ่งการอบรมออกเป็น 2 ส่วนคือ 1. การเลือกใช้สถิติและการวิเคราะห์ข้อมูลที่เหมาะสม 2. การสำรวจความคิดเห็น	- แผนผังมโนทัศน์ แสดงความสัมพันธ์ เรื่อง สถิติและการวิเคราะห์ข้อมูล	

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน (15 นาที) 1) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมพิจารณาคำวิเศษณ์ที่กำหนดให้ แล้วเลือกเพียง 1 คำที่ตรงกับลักษณะของผู้เข้ารับการอบรมมากที่สุด เช่น สวย เก่ง ดี อ้วน ผอม เท่ งาม หยิ่ง ฉลาด เปรี๊ยะ เป็น เปรี๊ยะ ทันสมัย อวบ มีเสน่ห์ เซ็กซี่ น่ารัก อ่อนหวาน ตระหนี่ มัธยัสถ์ ใจแข็ง ขยัน อดทน นอบน้อม กตัญญู อ่อนไหว มีน้ำใจ ใจดี 2) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมยกมือตามคำที่เลือก แล้วนับผลการเลือกคำวิเศษณ์ ลงตารางสรุปผลโหวต ที่เตรียมไว้แล้วสรุปว่าผู้เข้าอบรมส่วนใหญ่เป็นคน (ตามผลการตอบที่มีความถี่สูงสุด) ซึ่งการดำเนินการจนได้สรุปผลดังกล่าวเป็นการใช้ความรู้ “สถิติ” และการเลือกสรุปการใช้ค่ากลางในการนำเสนอข้อมูลคือ “ฐานนิยม” 3) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมยกตัวอย่างกิจกรรมที่เคยปฏิบัติและประทับใจจำนวน 1 เรื่อง พร้อมบอกปริมาณที่เคยปฏิบัติได้มากหรือน้อยที่สุด เช่น อ่านหนังสือเรียน ต่อเนื่องนานที่สุดกี่ชั่วโมง กินข้าวมากที่สุดกี่จาน น้ำหนักมากที่สุดกี่กิโลกรัม ลดน้ำหนักได้มากที่สุดกี่กิโลกรัม ออกกำลังกายนานที่สุดกี่ชั่วโมง นอนนานที่สุดกี่ชั่วโมง จังหวัดที่นั่งรถไปไกลที่สุด ฯลฯ 4) วิทยากรชี้ให้เห็นว่าตัวอย่างที่กล่าวมาในข้อ (3) เป็นการใช้ความรู้ “สถิติ” ซึ่งสามารถเลือกสรุปโดยใช้ค่ากลางในการนำเสนอข้อมูลได้ทั้ง “ฐานนิยม มัธยฐาน และค่าเฉลี่ยเลขคณิต” 5) วิทยากรแสดงผลการสำรวจให้ผู้เข้ารับการอบรมดู 1 เรื่อง แล้วสรุปว่า การสำรวจดังกล่าวเป็นการใช้ความรู้ “สถิติ” 6) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรม บอก อธิบายความเหมือน และความแตกต่างของการใช้ความรู้เกี่ยวกับ “สถิติ” ทั้ง 3 ตัวอย่าง	- ป้ายติดคำศัพท์ไว้และสามารถใส่หรือติดเบาะสำหรับลงคะแนน - ตารางสรุปผลโหวต - ตัวอย่างผลการสำรวจ	- การมีส่วนร่วมในกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
ชั้นสอน (3 ชั่วโมง 30 นาที) กิจกรรมที่ 1 การเลือกค่ากลางที่เหมาะสมกับข้อมูล 1) วิทยากรกำหนดคำถามแบบมีตัวเลือกให้ผู้เข้ารับการอบรมตอบ แล้วให้ผู้เข้ารับการอบรมมาหยิบป้ายใส่ให้ตรงตามสิ่งที่สนใจมากที่สุดเพียงคำถามละ 1 คำตอบ คำถามที่ 1 เลขโดดที่ชอบมากที่สุด (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) คำถามที่ 2 ผลไม้ที่ชอบรับประทานมากที่สุด (มะม่วง ฝรั่ง มังคุด เงาะ ทูเรียน สับปะรด น้อยหน่า แอปเปิ้ล องุ่น ส้ม อื่น ๆ) คำถามที่ 3 ขนาดของเสื้อเชิ้ตที่ใส่ได้พอดี (SS S M L XL XXL XXXL) คำถามที่ 4 ระดับความชอบที่มีต่อคณิตศาสตร์ (มากที่สุด มากเลย ๆ น้อย ไม่ชอบเลย) คำถามที่ 5 น้ำหนักของผู้เข้ารับการอบรม (ตอบตามจริง/ตอบตามช่วงที่กำหนดให้) (1) น้ำหนัก.....กิโลกรัม (2) ให้เลือกตอบตามช่วงน้ำหนักที่กำหนด น้อยกว่า 30 กิโลกรัม, 30 – 39 กิโลกรัม, 40 – 49 กิโลกรัม, 50 – 59 กิโลกรัม, 60 – 69 กิโลกรัม, 70 – 79 กิโลกรัม, 80 – 89 กิโลกรัม, 90 – 99 กิโลกรัม, มากกว่า 99 กิโลกรัม 2) วิทยากรและผู้เข้ารับการอบรมช่วยกันตรวจสอบความถูกต้องของผลการตอบคำถามทุกข้อ จากนั้นวิทยากรถามคำถามเพื่อให้ ผู้เข้ารับการอบรมตกลงกันว่า จะสรุปลักษณะของผู้เข้ารับการอบรมส่วนใหญ่ตามแต่ละข้อคำถามได้อย่างไรบ้าง และข้อสรุปนั้นได้มาโดยวิธีการใด เหตุใดจึงเลือกใช้วิธีการนั้น (โดยวิทยากรอาจจะมอบหมายผู้รับผิดชอบหาคำตอบเป็นกลุ่ม ๆ จำนวน 6 กลุ่ม) 3) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมทำใบงานที่ 1 เรื่อง ส่วนใหญ่เป็นอย่างไร	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1: ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง การเลือกค่ากลางที่เหมาะสม - ป้ายคำถามพร้อมตัวเลือกที่สามารถขีดเขียน/ หรือใส่ป้ายคะแนนได้ - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 7: ใบงานที่ 1 เรื่อง ส่วนใหญ่เป็นอย่างไร	- การมีส่วนร่วมในกิจกรรม - ผลการทำใบงานที่ 1 เรื่อง ส่วนใหญ่เป็นอย่างไร

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล												
4) วิทยากรและผู้เข้ารับการอบรมร่วมกันเฉลยคำตอบของใบงานที่ 1 เรื่อง ส่วนใหญ่เป็นอย่างไร 5) วิทยากรสรุปแนวทางในการเลือกใช้ค่ากลางระหว่าง “ค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และ ฐานนิยม” ขึ้นอยู่กับลักษณะและประเภทของข้อมูล แต่อย่างไรก็ตามข้อมูลบางประเภทสามารถเลือกใช้ค่ากลางได้หลายตัว ข้อสังเกตเพิ่มเติมเกี่ยวกับข้อมูลนั้นว่าควรใช้ค่ากลางชนิดใดจึงจะเหมาะสม														
กิจกรรมที่ 2 กราฟที่ใช้แสดงการแจกแจงความถี่ 6) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมเขียนฮิสโทแกรมและแผนภาพ ต้น-ใบ พร้อมทั้งทั้งคำนวณค่าเฉลี่ยเลขคณิตเลขคณิต มัธยฐาน และ ฐานนิยม ของข้อมูลที่กำหนดให้จำนวน 6 ชุด (อาจกำหนด กลุ่มละ 1 – 2 ข้อ ข้อมูลทุกชุดต้องมีกลุ่มใดกลุ่มหนึ่งรับผิดชอบ) ข้อมูลชุดที่ 1 (แจกแจงปกติ) <table><tr><th>คะแนน</th><th>ความถี่</th></tr><tr><td>10</td><td>5</td></tr><tr><td>15</td><td>10</td></tr><tr><td>20</td><td>15</td></tr><tr><td>25</td><td>10</td></tr><tr><td>30</td><td>5</td></tr></table> (ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเลขคณิต คือ 20 มัธยฐาน คือ 20 ฐานนิยมคือ 20)	คะแนน	ความถี่	10	5	15	10	20	15	25	10	30	5	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 2: ใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง กราฟที่ใช้แสดงการแจกแจงความถี่ - ภาพฮิสโทแกรม และแผนภาพ ต้น-ใบ ของข้อมูล 6 ชุด	- การมีส่วนร่วมในกิจกรรม
คะแนน	ความถี่													
10	5													
15	10													
20	15													
25	10													
30	5													

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล																																				
ข้อมูลชุดที่ 2 (แจกแจงแบบเบ้ขวา) <table><tr><th>คะแนน</th><th>ความถี่</th></tr><tr><td>10</td><td>10</td></tr><tr><td>15</td><td>12</td></tr><tr><td>20</td><td>9</td></tr><tr><td>25</td><td>9</td></tr><tr><td>30</td><td>5</td></tr></table> (ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเลขคณิต คือ 18.33 มัธยฐาน คือ 17.5 ฐานนิยมคือ 15) ข้อมูลชุดที่ 3 (แจกแจงแบบเบ้ซ้าย) <table><tr><th>คะแนน</th><th>ความถี่</th></tr><tr><td>10</td><td>5</td></tr><tr><td>15</td><td>9</td></tr><tr><td>20</td><td>9</td></tr><tr><td>25</td><td>12</td></tr><tr><td>30</td><td>10</td></tr></table> (ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเลขคณิต คือ 21.44 มัธยฐาน คือ 17.5 ฐานนิยมคือ 25) ข้อมูลชุดที่ 4 (ค่าคงที่) <table><tr><th>คะแนน</th><th>ความถี่</th></tr><tr><td>10</td><td>0</td></tr><tr><td>15</td><td>0</td></tr><tr><td>20</td><td>45</td></tr><tr><td>25</td><td>0</td></tr><tr><td>30</td><td>0</td></tr></table> (ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเลขคณิต คือ 20 มัธยฐาน คือ 20 ฐานนิยมคือ 20)	คะแนน	ความถี่	10	10	15	12	20	9	25	9	30	5	คะแนน	ความถี่	10	5	15	9	20	9	25	12	30	10	คะแนน	ความถี่	10	0	15	0	20	45	25	0	30	0		
คะแนน	ความถี่																																					
10	10																																					
15	12																																					
20	9																																					
25	9																																					
30	5																																					
คะแนน	ความถี่																																					
10	5																																					
15	9																																					
20	9																																					
25	12																																					
30	10																																					
คะแนน	ความถี่																																					
10	0																																					
15	0																																					
20	45																																					
25	0																																					
30	0																																					

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล																								
ข้อมูลชุดที่ 5 (ข้อมูลสุดโต่ง) <table><tr><th>คะแนน</th><th>ความถี่</th></tr><tr><td>10</td><td>10</td></tr><tr><td>15</td><td>14</td></tr><tr><td>20</td><td>16</td></tr><tr><td>60</td><td>2</td></tr><tr><td>65</td><td>3</td></tr></table> (ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเลขคณิต คือ 21 มัธยฐาน คือ 17.5 ฐานนิยมคือ 20) ข้อมูลชุดที่ 6 <table><tr><th>คะแนน</th><th>ความถี่</th></tr><tr><td>10</td><td>5</td></tr><tr><td>15</td><td>15</td></tr><tr><td>20</td><td>5</td></tr><tr><td>60</td><td>15</td></tr><tr><td>65</td><td>5</td></tr></table> (ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเลขคณิต คือ 20 มัธยฐาน คือ 20) 7) วิทยากรให้แต่ละกลุ่มแสดงฮิสโทแกรมและแผนภาพ ต้น-ใบ ของข้อมูลแต่ละชุด แล้วช่วยกันตั้งข้อสังเกตเกี่ยวกับ การกระจายของข้อมูล 8) วิทยากรให้แต่ละกลุ่มแสดงผลการคำนวณค่าเฉลี่ย เลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยมของข้อมูลแต่ละชุด แล้ว ช่วยกันตั้งข้อสังเกตเกี่ยวกับค่ากลางเหล่านั้นเมื่อข้อมูลมี การกระจายแตกต่างกัน 9) วิทยากรสรุปว่า ลักษณะการกระจายของข้อมูลด้วยมี ผลต่อค่ากลางที่ได้ ดังนั้นการเลือกใช้ค่ากลางนอกจาก จะต้องพิจารณาประเภทของข้อมูลแล้ว ควรคำนึงถึง ลักษณะการกระจายของข้อมูลด้วย	คะแนน	ความถี่	10	10	15	14	20	16	60	2	65	3	คะแนน	ความถี่	10	5	15	15	20	5	60	15	65	5		
คะแนน	ความถี่																									
10	10																									
15	14																									
20	16																									
60	2																									
65	3																									
คะแนน	ความถี่																									
10	5																									
15	15																									
20	5																									
60	15																									
65	5																									

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
กรณีข้อมูลมีการกระจายหรือแจกแจงปกติ สามารถเลือกใช้ค่ากลางแบบใดก็ได้ ตามระดับการวัดของข้อมูล กรณีมีข้อมูลบางตัวค่าที่แตกต่างจากค่าอื่นมากควรพิจารณาใช้มัธยฐาน สำหรับฐานนิยมนั้นมักเกิดปัญหาเมื่อมีข้อมูลที่มีความถี่สูงสุดเท่ากันหลายจำนวนถือว่าไม่มีฐานนิยม		
กิจกรรมที่ 3 ค่ากลางและการวัดการกระจาย 10) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมคำนวณ พิสัย ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย และ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของข้อมูลที่กำหนดให้ 10 ชุด ในใบกิจกรรมที่ 3 เรื่อง ค่ากลางและการวัดการกระจาย (ทำกลุ่มละ 1 ชุด) 11) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมแต่ละกลุ่มเฉลยคำตอบ กำหนดให้จนครบ 10 ชุด ให้ให้ผู้เข้ารับการอบรมสังเกตความสัมพันธ์ของข้อมูล ♦ กรณีข้อมูลมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเลขคณิตเท่ากัน ค่าการกระจายของข้อมูลเป็นอย่างไร กรณีข้อมูลมีค่าการกระจายเท่ากัน ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็นอย่างไรแล้ว 12) วิทยากรสรุปว่า การนำเสนอข้อมูลไม่ควรใช้ค่ากลางของข้อมูลเพียงค่าเดียวแต่ควรนำเสนอค่าการวัดการกระจายของข้อมูลด้วย ส่วนจะเลือกใช้ค่าใดนั้นขึ้นอยู่กับลักษณะของข้อมูล 13) วิทยากรให้ผู้เข้าอบรมยกตัวอย่างชุดข้อมูลที่เหมาะสมสำหรับนำเสนอค่ากลางด้วยค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน ฐานนิยม อย่างละ 1 ตัวอย่างลงในใบงานที่ 2 เรื่อง ข้อมูลที่เหมาะสมกับค่ากลาง	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 3: ใบกิจกรรมที่ 3 เรื่อง ค่ากลางและการวัดการกระจาย - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 8: ใบงานที่ 2 เรื่อง ข้อมูลที่เหมาะสมกับค่ากลาง	- การมีส่วนร่วมในกิจกรรม - ผลการทำใบงานที่ 2 เรื่อง ข้อมูลที่เหมาะสมกับค่ากลาง
กิจกรรมที่ 4 การตรวจสอบความเหมาะสมโดยแสดงเหตุผล 14) วิทยากรให้ตัวแทนกลุ่มจับสลากเลือกประเด็น	- เอกสารสำหรับ	- การมีส่วนร่วมใน

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
คำถามในใบกิจกรรมที่ 4 เรื่อง จริงหรือไม่ กลุ่มละ 1-2 ข้อความ และเขียนตัวอย่างอธิบายสนับสนุนหรือโต้แย้ง 15) สุ่มกลุ่มนำเสนอตัวอย่างเพื่ออธิบายสนับสนุนหรือโต้แย้งคำถามที่ได้รับมอบหมายครบทุกข้อ โดยให้เพื่อนต่างกลุ่มตรวจสอบความเหมาะสมของการให้เหตุผล (วิทยากรเก็บผลการตอบคำถามของแต่ละกลุ่ม) 16) วิทยากรสรุปประเด็นสำคัญเพิ่มเติม	ผู้เข้ารับการอบรม 4: ใบกิจกรรมที่ 4 เรื่อง จริงหรือไม่ - บันทึกคำตอบของกลุ่มในกิจกรรมที่ 4	กิจกรรม
กิจกรรมที่ 5 การวิเคราะห์ผลการสำรวจความคิดเห็น 17) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมศึกษาใบกิจกรรมที่ 5 เรื่อง ผีวิเคราะห์ผลการสำรวจ โดยให้ผู้เข้ารับการอบรมวิเคราะห์ผลการสำรวจความคิดเห็นซึ่งให้วิเคราะห์ตัวอย่างละ 2 - 3 กลุ่ม 18) วิทยากรสุ่มกลุ่มนำเสนอผลการวิเคราะห์ และรับฟังความคิดเห็นจากกลุ่มอื่น ๆ 19) วิทยากรสรุปว่าการสำรวจข้อมูลต่าง ๆ นั้นดำเนินการตามจุดประสงค์ และนำเสนอผลการสำรวจตามจุดประสงค์ที่ตั้งไว้ แล้วดำเนินการตามระเบียบวิธีสถิติ ได้แก่ การเก็บรวบรวมข้อมูล (data collection) การวิเคราะห์ข้อมูล (data analysis) การตีความหมายข้อมูล (data interpretation) และการนำเสนอข้อมูล (data presentation) จากตัวอย่างสำรวจ 1 จะพบว่าเป็นการสำรวจความคิดเห็นของประชาชนที่มีต่อการใช้คำว่า “ชิมิ” แทน คำว่า “ใช้ไหมอย่างไร” ซึ่งผลการตอบเป็นข้อมูลเชิงคุณภาพอยู่ในระดับการวัด “นามบัญญัติ” ไม่สามารถบอกได้ว่าคำตอบใดดีกว่ากัน ทำได้เพียงนับจำนวนผู้เลือกตอบในแต่ละคำตอบว่ามีจำนวนเท่าใด ดังนั้น “ฐานนิยม” จึงเป็นค่ากลางที่เหมาะสมที่สุดในการนำเสนอข้อมูล ข้อสังเกตอีกประการหนึ่งคือ ประชากรในการศึกษาครั้งนี้คือ ประชาชน ซึ่งไม่ได้ระบุว่าเป็นคนไทยทั้งหมด	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 5: ใบกิจกรรมที่ 5 เรื่องผีวิเคราะห์ผลการสำรวจ	- การมีส่วนร่วมในกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
คนไทยจังหวัดใด หรือประชาชนในวัยใด ดังนั้นจึงอนุมานว่า การสำรวจครั้งนี้เป็นการสำรวจจากประชาชนบางคน (กลุ่มตัวอย่าง) ซึ่งอาจจะเป็น ตัวแทนที่ดีหรือไม่ใช่ตัวแทนที่ดีของประชากรก็ได้ ซึ่งกลุ่มตัวอย่างที่ดีจะเป็นตัวแทนของ ประชากรได้		
กิจกรรมที่ 6 การวางแผนการสำรวจความคิดเห็น 20) วิทยากรแบ่งกลุ่มผู้เข้ารับการอบรม ให้วางแผนสำรวจความคิดเห็นที่มีต่อประเด็นที่กำหนดประเด็นใด ประเด็นหนึ่งหรือกำหนดประเด็นขึ้นมาใหม่เอง พร้อมร่างแบบสอบถามสำหรับสำรวจความคิดเห็น ประเด็นสำหรับการสำรวจความคิดเห็นของผู้เข้ารับการอบรม ประเด็น 1 การสูบบุหรี่ในที่สาธารณะ ประเด็น 2 การใช้โทรศัพท์มือถือขณะอยู่ในห้องประชุม ประเด็น 3 การรับจ้างทำผลงานเพื่อเลื่อนวิทยฐานะ ประเด็น 4 การทำศัลยกรรมเสริมความงาม ประเด็น 5 การให้โรงเรียนในประเทศสมาคมเศรษฐกิจอาเซียนเปิดเทอมพร้อมกัน ประเด็น 6 ความจำเป็นในการเรียนพิเศษ ประเด็น 7 ความสำคัญของการทดสอบระดับชาติ ประเด็น 8 การให้ครูคณิตศาสตร์เข้ารับการทดสอบวัดความรู้คณิตศาสตร์ทุกปี ประเด็น 9 อุปสรรคในการทำวิจัยในชั้นเรียน ประเด็น 10 หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ในทศวรรษที่สองของการปฏิรูปการศึกษา 21) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมแต่ละกลุ่มวางแผนการสำรวจความคิดเห็นร่วมกัน โดยเขียนลงในใบงานที่ 3 เรื่อง การออกแบบการสำรวจความคิดเห็น โดยให้ผู้เข้ารับการอบรมออกแบบการสำรวจความคิดเห็น ซึ่งวิทยากรอธิบายหลักการสำคัญในแต่ละหัวข้ออย่างคร่าว ๆ	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 6: ใบกิจกรรมที่ 6 เรื่อง การเลือกประเด็นที่สนใจ - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 9: ใบงานที่ 3 เรื่อง การออกแบบการสำรวจความคิดเห็น - แบบสะท้อนความคิดเห็น	- การมีส่วนร่วมในกิจกรรม - ผลการทำใบงานที่ 3 เรื่อง การออกแบบการสำรวจความคิดเห็น

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
(1) ระบุเหตุผลที่เลือกประเด็นที่สนใจสำรวจปัญหา - การศึกษาความคิดเห็นประเด็นนี้สำคัญอย่างไร - ก่อให้เกิดผลดีอย่างไร ข้อมูลที่ได้จะเกิดประโยชน์อย่างไร (2) กลุ่มประชากร/ กลุ่มเป้าหมาย ที่สนใจศึกษาคือใคร (3) ข้อมูลลักษณะใดที่สนใจศึกษา เชิงปริมาณ หรือเชิงคุณภาพ (4) มีสิ่งใดที่จะทำให้คำตอบ หรือผลสำรวจออกมาแตกต่างกันบ้างเช่น ความคิดเห็นที่มีต่อ “การกำหนดให้นักเรียนต้องแต่งกายแบบฟอร์มเดียวกันทั่วประเทศ” อาจจะแตกต่างกันเช่น ครูที่อยู่เอกชน อาจจะเห็นด้วย ครูที่อยู่สังกัดรัฐบาล อาจจะเห็นด้วย ครูสังกัดเทศบาล มีแนวโน้มไม่เห็นด้วย ดังนั้นตัวแปรที่เราสนใจคือ “สังกัดโรงเรียน” พบว่า ครูรุ่นใหม่ที่มีอายุน้อย ๆ มีแนวโน้มจะไม่เห็นด้วย แต่ครูที่อายุมาก ๆ มีแนวโน้มจะเห็นด้วย ตัวแปรที่เราสนใจคือ “อายุ” พบว่า ครูผู้สอนคณิตศาสตร์ระดับประถมมีแนวโน้มจะเห็นด้วย ครูผู้สอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นมีแนวโน้มจะเห็นด้วย ครูผู้สอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายก็มีแนวโน้มจะเห็นด้วย เช่นกัน ดังนั้น “ระดับชั้นที่สอน” จึงไม่เหมาะสำหรับใช้เป็นตัวแปรที่ศึกษา ตัวแปรที่เราสนใจศึกษานี้ผู้สำรวจจำเป็นต้องตัดสินใจเลือกให้เหมาะสม เพื่อช่วยกำหนดทิศทางการสำรวจ นำไปสู่การกำหนดจุดประสงค์การสำรวจ และการออกแบบคำถามในแบบสอบถามได้ (5) ตัวอย่างการเขียนจุดประสงค์ เช่น “เพื่อศึกษาความคิดเห็นของครูผู้สอนคณิตศาสตร์ที่มีต่อ		

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
การกำหนดให้นักเรียนต้องแต่งกายแบบฟอร์มเดียวกันทั่วประเทศ เมื่อครูผู้สอนคณิตศาสตร์มีสังกัดโรงเรียน และอายุแตกต่างกัน” หรือ อาจเขียนว่า “เพื่อศึกษาความคิดเห็นของครูผู้สอนคณิตศาสตร์ที่มีต่อการกำหนดให้นักเรียนต้องแต่งกายแบบฟอร์มเดียวกันทั่วประเทศ” หากสนใจศึกษาเพียงข้อเดียว ผู้สำรวจจะต้อง ออกแบบแบบสอบถามเพื่อถามประชากรหรือกลุ่มตัวอย่าง (6) การสร้างแบบสอบถามโดยทั่วไปมักประกอบด้วย ส่วนสำคัญสองส่วนคือ ข้อมูลส่วนตัวของผู้ตอบแบบสอบถาม และข้อมูลที่เป็นความคิดเห็นของผู้ตอบแบบสอบถามที่สนใจศึกษา ซึ่งควรเลือกสอบถามเฉพาะคำถามที่สอดคล้องกับจุดประสงค์เท่านั้น 22) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมนำเสนอแบบแผนการสำรวจประมาณ 3 – 4 กลุ่ม กลุ่มละประมาณ 5 - 8 นาที 23) วิทยากรให้ข้อเสนอแนะเพิ่มเติมในการสำรวจตามประเด็นที่ผู้เข้ารับการอบรมนำเสนอ 24) วิทยากรสุ่มตัวแทนผู้เข้ารับการอบรมกล่าวสรุปหลักการสำรวจความคิดเห็น และให้ข้อเสนอแนะ หากจะต้องจัดกิจกรรมสำรวจความคิดเห็นให้กับนักเรียน ให้แต่ละคนเขียนสะท้อนความคิดลงในแบบสะท้อนความคิดเห็น		
3. ขั้นสรุป (15 นาที) วิทยากรให้ผู้เข้ารับการอบรมตั้งคำถามพร้อมเฉลยเพื่อประเมินความเข้าใจในเรื่องที่อบรมจำนวน 2 ข้อและเป็นคำถามวัดการคิดวิเคราะห์ ข้อ 1 ถามเกี่ยวกับการเลือกใช้สถิติและการวิเคราะห์ข้อมูล ข้อ 2 ถามเกี่ยวกับการสำรวจความคิดเห็น	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 10:ใบงานที่ 4 เรื่อง ประเด็นคำถามที่สำคัญ	- การตั้งคำถามเกี่ยวกับเรื่องที่อบรม

เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม

ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง การเลือกค่ากลางที่เหมาะสม

คำชี้แจง ให้ผู้เข้ารับการอบรมตอบคำถามต่อไปนี้ทุกข้อ โดยการหีบแป้นใส่หรือติดในป้ายลงคะแนนที่เตรียมไว้ให้ ที่ตรงความจริงของท่านมากที่สุด (ตอบได้เพียงคำถามละ 1 คำตอบ)

คำถามที่ 1 เลขโดดที่ชอบมากที่สุด (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)

เลขโดด	ความถี่																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	รวม
0																				
1																				
2																				
3																				
4																				
5																				
6																				
7																				
8																				
9																				

คำถามที่ 2 ผลไม้ที่ชอบรับประทานมากที่สุด (มะม่วง ฝรั่ง มังคุด เงาะ ทูเรียน สับปะรด น้อยหน่า แอปเปิ้ล องุ่น ส้ม อื่น ๆ)

ผลไม้	ความถี่																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	รวม
มะม่วง																				
ฝรั่ง																				
มังคุด																				
เงาะ																				
ทุเรียน																				
สับปะรด																				
น้อยหน่า																				
แอปเปิ้ล																				
องุ่น																				
ส้ม																				
อื่น ๆ																				

คำถามที่ 3 ขนาดของเสื้อเชิ้ตที่ใส่ได้พอดี (SS S M L XL XXL XXXL)

ขนาด ของ เสื้อ	ความถี่																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	รวม
SS																				
S																				
M																				
L																				
XL																				
XXL																				
XXXL																				

คำถามที่ 4 ระดับความชอบที่มีต่อคณิตศาสตร์ (มากที่สุด มาก เฉย ๆ น้อย ไม่ชอบเลย)

ระดับ ความชอบ	ความถี่																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	รวม
มากที่สุด																				
มาก																				
เฉย ๆ																				
น้อย																				
ไม่ชอบ เลย																				

คำถามที่ 5 น้ำหนักของผู้เข้ารับการอบรม (ตอบตามจริง/ ตอบตามช่วงที่กำหนดให้)

1) น้ำหนัก.....กิโลกรัม

2) ให้เลือกตอบตามช่วงน้ำหนักที่กำหนด

น้ำหนัก	ความถี่																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	รวม
น้อยกว่า 30																				
30 – 39																				
40 – 49																				
50 – 59																				
60 – 69																				
70 – 79																				
80 – 89																				
90 – 99																				
มากกว่า 99																				

ใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง กราฟที่ใช้แสดงการแจกแจงความถี่

คำชี้แจง จงเขียนฮิสโทแกรมและแผนภาพต้น-ใบของข้อมูลแต่ละชุดที่กำหนดให้ พร้อมทั้งคำนวณค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐานและฐานนิยม

❁ ข้อมูลชุดที่ 1

คะแนน	ความถี่
10	5
15	10
20	15
25	10
30	5

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คือ.....

มัธยฐาน คือ.....

ฐานนิยมคือ.....

❁ ข้อมูลชุดที่ 2

คะแนน	ความถี่
10	10
15	12
20	9
25	9
30	5

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คือ.....

มัธยฐาน คือ.....

ฐานนิยมคือ.....

❁ ข้อมูลชุดที่ 3

คะแนน	ความถี่
10	5
15	9
20	9
25	12
30	10

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คือ.....

มัธยฐาน คือ.....

ฐานนิยมคือ.....

❁ ข้อมูลชุดที่ 4

คะแนน	ความถี่
10	0
15	0
20	45
25	0
30	0

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คือ.....

มัธยฐาน คือ.....

ฐานนิยมคือ.....

❁ ข้อมูลชุดที่ 5

คะแนน	ความถี่
10	10
15	14
20	16
60	2
65	3

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คือ.....

มัธยฐาน คือ.....

ฐานนิยมคือ.....



❁ ข้อมูลชุดที่ 6

คะแนน	ความถี่
10	5
15	15
20	5
60	15
65	5

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คือ.....

มัธยฐาน คือ.....

ฐานนิยมคือ.....



ใบกิจกรรมที่ 3 เรื่อง ค่ากลางและการวัดการกระจาย

คำชี้แจง ให้คำนวณค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน ฐานนิยม พิสัย ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลที่กำหนดให้

ชุด	ข้อมูล																			ค่ากลาง			การวัดการกระจาย			
																				Mean	Median	Mode	Range	Quartile Deviation	Mean Deviation	Standard Deviation
A	3	3	4	4	4	5	5	5	5	9	9	9	9	9	9	12	12	12	16							
B	5	5	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	9	9	9	9	10	10	10							
C	2	2	3	3	3	5	5	6	6	8	8	9	9	9	9	14	14	15	15							
D	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	6	8	9	10	12	13	15	25							
E	7	7	7	7	7	7	7	7	7	8	8	9	9	9	9	9	9	9	9							
F	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8							
G	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	7	9	10	11	13	14	16	26							
H	4	4	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	9	9	9							
I	6	6	8	8	8	10	10	10	10	18	18	18	18	18	18	24	24	24	32							
J	3	4	4	4	4	4	5	5	5	8	8	9	9	10	11	11	12	12	16							



- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)
- 6)
- 7)
- 8)
- 9)
- 10)



ใบกิจกรรมที่ 4 เรื่อง จริงหรือไม่

❖ ให้พิจารณาว่าข้อความที่กำหนดให้เป็นจริงหรือเป็นเท็จ พร้อมให้เหตุผลสนับสนุนหรือยกตัวอย่างค้าน

1) ข้อมูลทุกชนิดสามารถหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตได้เสมอ

ข้อสรุป	เหตุผล/ ตัวอย่าง
☐ จริง	
☐ เท็จ	

2) ข้อมูลที่มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากันย่อมมีการกระจายของข้อมูลเหมือนกัน

ข้อสรุป	เหตุผล/ ตัวอย่าง
☐ จริง	
☐ เท็จ	

3) ข้อมูลที่มีการกระจายของข้อมูลเหมือนกันย่อมมีค่ากลางของข้อมูลเท่ากัน

ข้อสรุป	เหตุผล/ ตัวอย่าง
☐ จริง	
☐ เท็จ	

- 4) ก่อนการหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน หรือ ฐานนิยมต้องแจกแจงความถี่ลงในตารางแจกแจงความถี่ก่อนแล้วจึงคำนวณจากตารางแจกแจงความถี่

ข้อสรุป	เหตุผล/ ตัวอย่าง
☐ จริง	
☐ เท็จ	

- 5) ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็นค่ากลางของข้อมูลดังนั้นค่าเฉลี่ยเลขคณิตจึงอยู่ตรงกลางของข้อมูลทั้งหมด

ข้อสรุป	เหตุผล/ ตัวอย่าง
☐ จริง	
☐ เท็จ	

- 6) เป็นไปไม่ได้ที่จะมีข้อมูลชุดใด ๆ ที่มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และ ฐานนิยมเท่ากัน

ข้อสรุป	เหตุผล/ ตัวอย่าง
☐ จริง	
☐ เท็จ	

- 7) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานใช้วัดการกระจายได้ดีกว่าการวัดการกระจายแบบอื่นเพราะมีการคำนวณที่ซับซ้อน

ข้อสรุป	เหตุผล/ ตัวอย่าง
☐ จริง	
☐ เท็จ	

- 8) แผนภาพต้นไม้-ใบนำเสนอข้อมูลได้ดีกว่าตารางแจกแจงความถี่

ข้อสรุป	เหตุผล/ ตัวอย่าง
☐ จริง	
☐ เท็จ	

- 9) แผนภาพกล่องไม่ได้ให้ข้อมูลอะไรนอกจากบอกการกระจายของข้อมูล

ข้อสรุป	เหตุผล/ ตัวอย่าง
☐ จริง	
☐ เท็จ	

10) ผลการสำรวจความคิดเห็นที่ดำเนินการโดยสถาบันหรือหน่วยงานที่มีชื่อเสียงสำรวจย่อมน่าเชื่อถือ

ข้อสรุป	เหตุผล/ ตัวอย่าง
☐ จริง	
☐ เท็จ	

11) ผลการสำรวจจะน่าเชื่อถือถ้ามีคนตอบแบบสอบถามจำนวนมาก

ข้อสรุป	เหตุผล/ ตัวอย่าง
☐ จริง	
☐ เท็จ	

12) สัญลักษณ์สำหรับใช้ในสูตรการคำนวณข้อมูลของกลุ่มตัวอย่างกับสูตรที่ใช้คำนวณข้อมูลของประชากรไม่ต่างกัน

ข้อสรุป	เหตุผล/ ตัวอย่าง
☐ จริง	
☐ เท็จ	

บันทึกคำตอบของกลุ่มในใบกิจกรรม 4

ข้อความที่ได้ คือ

ข้อสรุป	เหตุผล/ ตัวอย่าง
☐ จริง	
☐ เท็จ	

รายชื่อสมาชิก

.....

.....

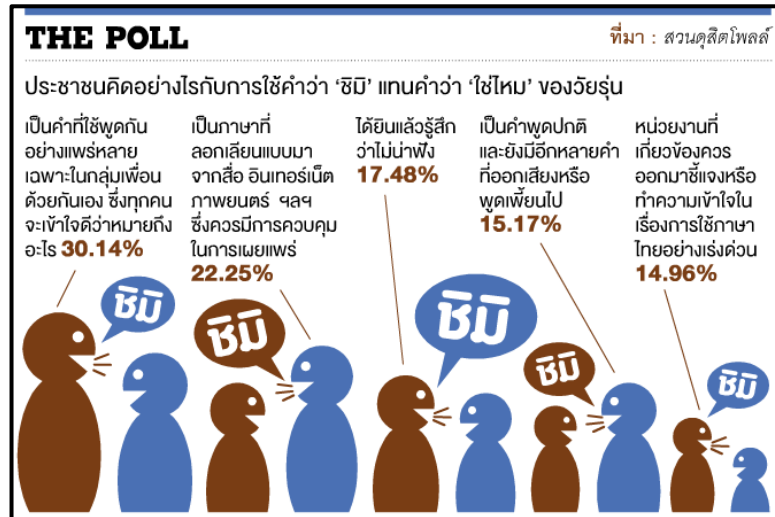
.....

.....

ใบกิจกรรมที่ 5 เรื่อง ผังวิเคราะห์การสำรวจ

คำชี้แจง พิจารณาดตัวอย่างผลการสำรวจความคิดเห็นที่กำหนดให้ แล้วตอบคำถาม

ตัวอย่างสำรวจ 1



จาก Aday Bulletin issue 123, หน้า 6, 26 November – 2 December 2010 <http://issuu.com/adaybulletin/docs/adb123>

คำถาม

- 1) ประเด็นการสำรวจคือ

.....

.....

- 2) เป็นการสำรวจความคิดเห็นของ.....

(ประชากร) โดยศึกษาทั้ง ☐ ทุกคน (ประชากร) หรือ ☐ บางคน (กลุ่มตัวอย่าง)

- 3) เครื่องมือที่ใช้สำรวจคือ

.....

.....

- 4) สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลคือ

.....

.....

ค่ากลางที่ใช้นำเสนอข้อมูลคือ

.....

5) สรุปผลการสำรวจได้ว่า

.....

.....

.....

6) ท่านคิดว่าผลการสำรวจนี้สมบูรณ์หรือไม่

.....

มีประเด็นสงสัยต้องการถามดังนี้คือ

.....

.....

ตัวอย่างสำรวจ 2



จาก Aday Bulletin issue 126, หน้า 3, 17 – 23 December 2010; <http://www.daypoets.com/adb/adb126.html>

คำถาม

1) ประเด็นการสำรวจคือ

.....

.....

2) เป็นการสำรวจจาก.....

(ประชากร) โดยศึกษากับ ☐ ทุกคน (ประชากร) หรือ ☐ บางคน (กลุ่มตัวอย่าง)

.....

.....



3) เครื่องมือที่ใช้สำรวจคือ

.....

.....

4) สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลคือ

.....

.....

ค่ากลางที่ใช้นำเสนอข้อมูลคือ

.....

5) สรุปผลการสำรวจได้ว่า

.....

.....

.....

6) ท่านคิดว่าผลการสำรวจนี้สมบูรณ์หรือไม่

.....

มีประเด็นสงสัยต้องการถามดังนี้คือ

.....

.....

.....

ตัวอย่างสำรวจ 3



จาก Aday Bulletin issue 126, หน้า 3, 17 – 23 December 2010; [http://www.daypoets.com/ad126.html](http://www.daypoets.com/adb/ad126.html)

คำถาม

1) ประเด็นการสำรวจคือ

.....

.....

.....

2) เป็นการสำรวจจาก.....

(ประชากร) โดยศึกษาทั้ง ☐ ทุกคน (ประชากร) หรือ ☐ บางคน (กลุ่มตัวอย่าง)

.....

.....

3) เครื่องมือที่ใช้สำรวจคือ

.....

.....

4) สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลคือ

.....

.....

ค่ากลางที่ใช้นำเสนอข้อมูลคือ

.....

5) สรุปผลการสำรวจได้ว่า

.....

.....

.....

6) ท่านคิดว่าผลการสำรวจนี้สมบูรณ์หรือไม่

.....

มีประเด็นสงสัยต้องการถามดังนี้คือ

.....

.....

.....

ตัวอย่างสำรวจ 4



จาก Aday Bulletin issue 251, หน้า 3, 10 – 16 May 2013; <http://www.daypoets.com/adb/adb251.html>

คำถาม

1) ประเด็นการสำรวจคือ

.....

.....

2) เป็นการสำรวจจาก.....

(ประชากร) โดยศึกษากับ ☐ ทุกคน (ประชากร) หรือ ☐ บางคน (กลุ่มตัวอย่าง)

.....

.....

3) เครื่องมือที่ใช้สำรวจคือ

.....

.....

4) สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลคือ

.....

.....

ค่ากลางที่นำเสนอข้อมูลคือ

.....

.....

5) สรุปผลการสำรวจได้ว่า

.....

.....

.....

.....

6) ท่านคิดว่าผลการสำรวจนี้สมบูรณ์หรือไม่

.....

.....

มีประเด็นสงสัยต้องการถามดังนี้คือ

.....

.....

.....

.....



ตัวอย่างสำรวจ 5



คำถาม

1) ประเด็นการสำรวจคือ

.....

.....

2) เป็นการสำรวจจาก.....

(ประชากร) โดยศึกษาทั้ง ☐ ทุกคน (ประชากร) หรือ ☐ บางคน (กลุ่มตัวอย่าง)

.....

.....

3) เครื่องมือที่ใช้สำรวจคือ

.....

.....

4) สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลคือ

.....

.....

ค่ากลางที่นำเสนอข้อมูลคือ

.....

.....

5) สรุปผลการสำรวจได้ว่า

.....

.....

.....

6) ท่านคิดว่าผลการสำรวจนี้สมบูรณ์หรือไม่

.....

มีประเด็นสงสัยต้องการถามดังนี้คือ

.....

.....

.....



ใบกิจกรรมที่ 6 เรื่อง การเลือกประเด็นที่สนใจ

คำชี้แจง ให้อ้างแผนสำรวจความคิดเห็นที่มีต่อประเด็นที่กำหนดให้ต่อไปนี้ประเด็นใดประเด็นหนึ่งหรือกำหนดประเด็นขึ้นมาใหม่เองลงใน ใบงานที่ 3

ประเด็นสำหรับการสำรวจความคิดเห็นของผู้เข้ารับการอบรม

ประเด็น 1 การสูบบุหรี่ในที่สาธารณะ

ประเด็น 2 การใช้โทรศัพท์มือถือขณะอยู่ในห้องประชุม

ประเด็น 3 การรับจ้างทำผลงานเพื่อเลื่อนวิทยฐานะ

ประเด็น 4 การทำศัลยกรรมเสริมความงาม

ประเด็น 5 การให้โรงเรียนในประเทศสมาคมเศรษฐกิจอาเซียนเปิดเทอมพร้อมกัน

ประเด็น 6 ความจำเป็นในการเรียนพิเศษ

ประเด็น 7 ความสำคัญของการทดสอบระดับชาติ

ประเด็น 8 การให้ครูคณิตศาสตร์เข้ารับการทดสอบวัดความรู้คณิตศาสตร์ทุกปี

ประเด็น 9 อุปสรรคในการทำวิจัยในชั้นเรียน

ประเด็น 10 หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายในทศวรรษที่สองของการปฏิรูปการศึกษาฯลฯ

ใบงานที่ 1 เรื่อง ส่วนใหญ่เป็นอย่างไร

❖ **คำชี้แจง** พิจารณาคำถามจำนวน 16 ข้อต่อไปนี้ แล้วนำชื่อตัวแปรที่ขีดเส้นใต้ในแต่ละข้อใส่ลงตารางที่ตรงตามประเภทข้อมูลที่กำหนดให้ และให้เลือกว่าในการนำเสนอข้อมูลควรใช้ค่ากลางใดระหว่าง ค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน หรือ ฐานนิยม

- | | |
|---|--|
| <p>1. ผู้เข้ารับการอบรมในห้องนี้ส่วนใหญ่เกิด<u>วัน</u>อะไร
(จันทร์ อังคาร พุธ พฤหัสบดี ศุกร์ เสาร์หรือ อาทิตย์)</p> <p>2. ผู้เข้ารับการอบรมในห้องนี้ส่วนใหญ่เกิด<u>วันที่</u>
เท่าใด
(1, 2, 3, ..., 31)</p> <p>3. ผู้เข้ารับการอบรมในห้องนี้ส่วนใหญ่เกิด <u>พ.ศ.</u> ใด
(เช่น 24.., 25..)</p> <p>4. ผู้เข้ารับการอบรมในห้องนี้ส่วนใหญ่<u>อายุ</u>เท่าใด
(เช่น 21, 22, ..., 60)</p> <p>5. ผู้เข้ารับการอบรมในห้องนี้ส่วนใหญ่มีภูมิลำเนา
<u>จังหวัด</u>ใด</p> <p>6. ผู้เข้ารับการอบรมในห้องนี้ส่วนใหญ่มี<u>จำนวนที่</u>
<u>น้อง</u>กี่คนรวมตนเองด้วย (1,2,3, ...)</p> <p>7. ผู้เข้ารับการอบรมในห้องนี้ส่วนใหญ่<u>สูง</u>กี่
เซนติเมตร
(เช่น 140, ...)</p> <p>8. ผู้เข้ารับการอบรมในห้องนี้ส่วนใหญ่มี
โทรศัพท์มือถือราคาประมาณกี่บาท
(เช่น 600, 1,000, 4,000, 5,000, 6,000, ...)</p> | <p>9. ผู้เข้ารับการอบรมในห้องนี้ส่วนใหญ่<u>สอบ</u>
<u>ก่อนเรียน</u>ได้ที่คะแนน</p> <p>10. ผู้เข้ารับการอบรมในห้องนี้ส่วนใหญ่<u>ใส่รองเท้า</u>
<u>เบอร์</u>อะไร
(เช่น 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)</p> <p>11. ผู้เข้ารับการอบรมในห้องนี้ส่วนใหญ่มี<u>รอบเอว</u>
กี่นิ้ว</p> <p>12. ผู้เข้ารับการอบรมในห้องนี้ส่วนใหญ่<u>จ่ายเงิน</u>
<u>ค่าอาหาร</u>วันละกี่บาท</p> <p>13. <u>อุณหภูมิ</u>หนาวสุดที่ผู้เข้ารับการอบรมเคยสัมผัส</p> <p>14. ผู้เข้ารับการอบรมในห้องนี้ส่วนใหญ่มี<u>ระดับ</u>
<u>สายตา</u>แบบใด
(สั้น ปกติ ยาว)</p> <p>15. ผู้เข้ารับการอบรมในห้องนี้ส่วนใหญ่<u>จ่ายค่า</u>
<u>โทรศัพท์</u>เดือนละกี่บาท</p> <p>16. ผู้เข้ารับการอบรมในห้องนี้ส่วนใหญ่มี<u>ความ</u>
<u>พร้อม</u>ในการสอนคณิตศาสตร์เป็นภาษาอังกฤษ
ในระดับใด
(มากที่สุด มาก ปานกลาง น้อย น้อยที่สุด)</p> |
|---|--|



ข้อมูลเชิงปริมาณ	ข้อมูลเชิงคุณภาพ
ข้อมูลต่อเนื่อง	ข้อมูลไม่ต่อเนื่อง

หาฐานนิยมได้	หามัธยฐานได้	หาค่าเฉลี่ยเลขคณิตได้

ใบงานที่ 2 เรื่อง ข้อมูลที่เหมาะสมกับค่ากลาง

คำชี้แจง ให้ผู้เข้ารับการอบรมยกตัวอย่างชุดข้อมูลที่เหมาะสมสำหรับนำเสนอค่ากลางด้วยค่าเฉลี่ย

เลขคณิต มัธยฐานฐานนิยม อย่างละ 1 ตัวอย่าง

ค่ากลางที่เหมาะสม	ตัวอย่างข้อมูล	อธิบายเพิ่มเติม
ค่าเฉลี่ยเลขคณิต		
มัธยฐาน		
ฐานนิยม		

ชื่อกลุ่ม.....เลขที่สมาชิก.....

ใบงานที่ 3 เรื่อง การออกแบบการสำรวจความคิดเห็น

1. ประเด็นปัญหาที่นำไปสู่การสำรวจ (ที่มาและเหตุผลที่เลือกประเด็นนี้สำรวจ ประเด็นสำคัญอย่างไร)

.....

.....

.....

.....

2. ชื่อเรื่อง

.....

.....

.....

3. จุดประสงค์

.....

.....

.....

4. ขอบเขตการสำรวจ

ประชากร

.....

เนื้อหา

.....

5. วิธีการเก็บข้อมูล

เก็บรวบรวมจาก ☐ ประชากร ☐ กลุ่มตัวอย่าง ซึ่งได้มาโดยการสุ่มแบบ.....

หรือ เลือกมาแบบ

.....

จำนวน

.....



6. เครื่องมือเก็บรวบรวมข้อมูล

คือ.....

คำถามที่จะถามในเครื่องมือ ได้แก่

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. สถิติที่จะใช้วิเคราะห์ข้อมูล

.....

8. การแปลความหมายข้อมูล

.....

9. รูปแบบที่ใช้การนำเสนอข้อมูล

.....



ข้อ 2 ถามเกี่ยวกับการสำรวจความคิดเห็น

This image shows a full page of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, typical of notebook or legal stationery. There are no margins, text, or other markings on the page.

แบบสะท้อนความคิดเห็น

ฉันคิดว่าความรู้เรื่องการสำรวจของฉันนั้น

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

หากต้องสอนนักเรียนฉันให้สำรวจเป็น ฉันจะ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



เอกสารสำหรับวิทยากร

แบบบันทึกผลการประเมิน เรื่อง สถิติและการวิเคราะห์ข้อมูล

ที่	ชื่อ-สกุล	การมีส่วนร่วมในกิจกรรม (8)	ชิ้นงาน (2)	รวม (10)
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				

ลงชื่อ.....วิทยากร

วันที่ประเมิน.....



แบบประเมินการมีส่วนร่วมในกิจกรรม

คำชี้แจง ทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องเมื่อผู้เข้ารับการอบรมแต่ละคนเข้าร่วมกิจกรรมต่าง ๆ

เลขที่	ชื่อ-สกุล	กิจกรรมที่							รวม คะแนน (8 คะแนน)
		นำเข้าสู่ บทเรียน	1	2	3	4	5	6	
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									
19									
20									
21									
22									
23									
24									
25									
26									

เลขที่	ชื่อ-สกุล	กิจกรรมที่							รวม คะแนน (8 คะแนน)
		นำเข้าสู่ บทเรียน	1	2	3	4	5	6	
27									
28									
29									
30									
31									
32									
33									
34									
35									
36									
37									
38									
39									
40									

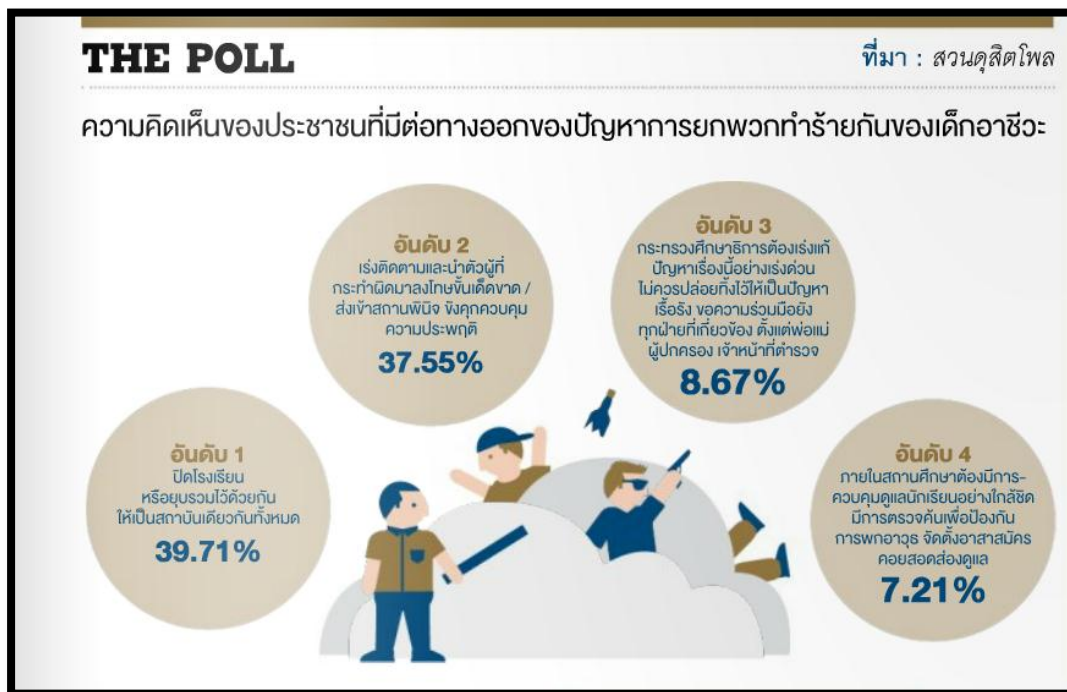
ลงชื่อ.....วิทยากร

วันที่สังเกต.....



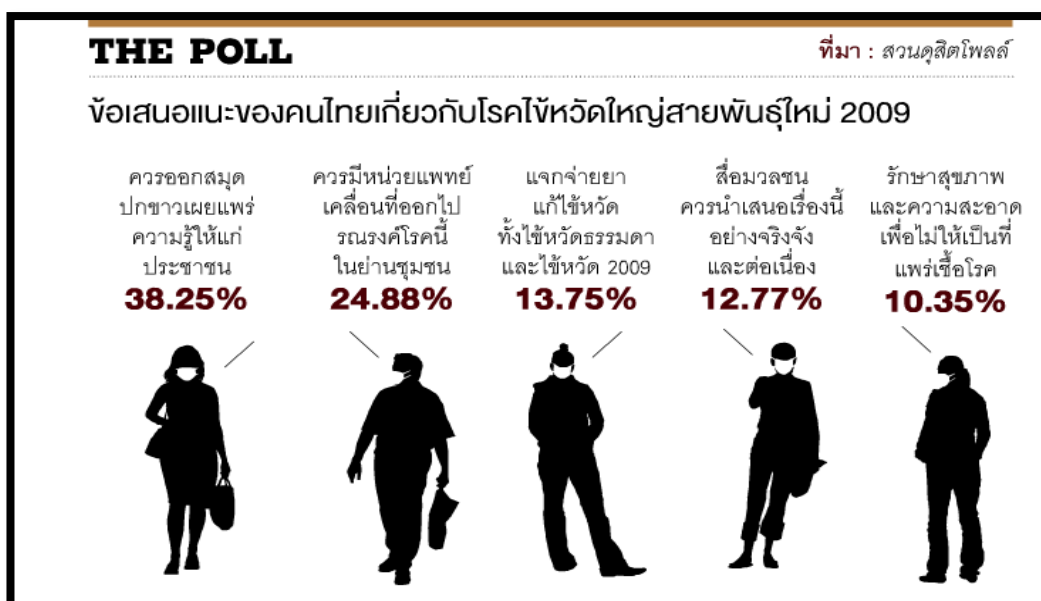
ตัวอย่างผลการสำรวจ

เรื่องที่ 1



จาก Aday Bulletin 29 มิย. 5 ก.ค 2555 ฉบับ 206 เดือน ปี หน้า 2

เรื่องที่ 2



จาก Aday Bulletin 26 June – 2 July 2009 ฉบับ 49 เดือน ปี หน้า 4

รายชื่อคณะเรียบเรียงเนื้อหา
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

หน่วยการเรียนรู้ที่ 6 การออกแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ที่	ชื่อ - สกุล	โรงเรียน/สังกัด
1	รศ.ดร.ปรีชา เนาว์เย็นผล	ข้าราชการบำนาญ
2	ดร.ไพโรจน์ น่วมนุ้ม	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
3	ดร.สุนีย์ เงินยวง	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
4	ดร.นัฐจิรา บุศย์ดี	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
5	ดร.รัชนิกร ชลไชยะ	มหาวิทยาลัยบูรพา
6	นางสาวจำเริญ เจียวหวาน	นักวิชาการอิสระ
7	นายสมนึก บุญพาไสว	นักวิชาการอิสระ
8	นางสาวยุฑาธรัตน์ เพ็ชรรุ่ง	โรงเรียนปรางจินราชวรวิหาร
9	นางธัญสินี ฐานา	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาน้อมเกล้า
10	ดร.รชยา ศรีสุริฉิน	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
11	นางนวลจันทร์ ฤทธิขำ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
12	นางสาวรัชนิกร กลิ่นหอมหวล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
13	นางสาวกชพร วงศ์สว่างศิริ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะกรรมการโครงการ

โครงการพัฒนาชุดการอบรมครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี ระดับประถมศึกษาถึงระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่เน้นกระบวนการคิดวิเคราะห์แก้ปัญหา

1. ผู้อำนวยการ สสวท. (นางพรพรรณ ไวย่างกูร)	ที่ปรึกษา
2. ผู้อำนวยการ สคบศ. (นางสาวนฤมล ไทยวิรัช)	ที่ปรึกษา
3. นางดวงสมร คล่องสารา	ประธานกรรมการ
4. นางกัญณัฐ สวัสดิ์สว่าง	รองประธานกรรมการ
5. นายดุสิต สังข์ร่วมใจ	กรรมการ
6. นายประสงค์ เมธิพิณฑกุล	กรรมการ
7. นางชมัยพร ตั้งตน	กรรมการ
8. นายราม ติวารี	กรรมการ
9. นางสาวสุพรรณิชา ชาญประเสริฐ	กรรมการ
10. นางสาววนิดา ธนประโยชน์ศักดิ์	กรรมการ
11. นายสุพจน์ วุฒิโสภณ	กรรมการ
12. นางเบญจวรรณ ศรีเจริญ	กรรมการ
13. นางสาวกุศลีน มุสิกกุล	กรรมการ
14. นายสมเกียรติ เพ็ญทอง	กรรมการ
15. นายวัฒน วัฒนากุล	กรรมการ
16. นายวิสูตร ปฐมโรจนฤทธิ์	กรรมการ
17. นางสาวสร้อยดี มุสิกบุตร	กรรมการ
18. นางจิรัฐ อนุเชิงชัย	กรรมการ
19. นางสาวสุนทรี ไกรกบแก้ว	กรรมการ
20. นายโชคชัย อัครวินชัย	กรรมการ
21. นางสาวทิพย์วรรณ สุดปฐม	กรรมการ
22. นางสาวไศวิจันต์ เสริฐศรี	กรรมการและเลขานุการ
23. นางสาวนิอร ภูรัตน์	กรรมการและผู้ช่วยเลขานุการ
24. นางสาวรัชนีกร กลิ่นหอมหวล	กรรมการและผู้ช่วยเลขานุการ
25. นางสาวกชพร วงศ์สว่างศิริ	กรรมการและผู้ช่วยเลขานุการ
26. นางสาวยุริย์ พันทวีศักดิ์	กรรมการและผู้ช่วยเลขานุการ