คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ร่วมกับ สถาบันพัฒนาครู คณาจารย์และบุคลากรทางการศึกษา (สคบศ.) ดำเนินการพัฒนาชุดการอบรมครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี ระดับประถมศึกษาถึงระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ตามโครงการพัฒนาชุดการอบรมครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี ระดับประถมศึกษาถึงระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่เน้นกระบวนการคิดวิเคราะห์แก้ปัญหา โดยเริ่มโครงการระหว่างปีงบประมาณ 2555 – 2557

เพื่อให้การอบรมรมครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่ดำเนินตามนโยบาย เป้าหมาย และวัตถุประสงค์ สสวท. จึงได้จัดทำชุดการอบรมครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่ จำนวน 13 ชุด ได้แก่ (1) วิชาวิทยาศาสตร์ประถมศึกษา (2) วิชาวิทยาศาสตร์มัธยมศึกษาตอนต้น (3) วิชาเคมีมัธยมศึกษาตอนปลาย (4) วิชาชีววิทยามัธยมศึกษาตอนปลาย (5) วิชาฟิสิกส์มัธยมศึกษาตอนปลาย (6) วิชาโลก ดาราศาสตร์และอวกาศมัธยมศึกษาตอนปลาย (7) วิชาคณิตศาสตร์ประถมศึกษาตอนต้น (8) วิชาคณิตศาสตร์ประถมศึกษาตอนปลาย (9) วิชาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษาตอนต้น (10) วิชาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษาตอนปลาย (11) วิชาเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสารประถมศึกษา (12) วิชาเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสารมัธยมศึกษาตอนต้น (13) วิชาเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสารมัธยมศึกษาตอนปลาย แต่ละชุดประกอบด้วย แผนการอบรม เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม เอกสารสำหรับวิทยากร และสื่อประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เพื่อมอบให้กับสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาและหน่วยงานที่มีส่วนเกี่ยวข้องดำเนินการอบรมครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่ในสังกัดต่อไป

สสวท. ขอขอบพระคุณคณะผู้เชี่ยวชาญ คุณครู และคณะกรรมการ ทุกท่าน ที่ให้ความร่วมมือในการพัฒนาหลักสูตร และจัดทำเอกสาร หวังเป็นอย่างยิ่งว่า เอกสารเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้เกี่ยวข้องทุกฝ่าย หากมีข้อเสนอแนะโปรดแจ้งแก่ คณะทำงานโครงการพัฒนาชุดการอบรมครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่ สสวท. ทราบด้วย จักขอบคุณยิ่ง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

กันยายน 2557

สารบัญ

	หน้า
หน่วยการเรียนรู้ที่ 6 การออกแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้	**1**
เรื่อง แคลคูลัส	**3**
แผนการอบรม	5
เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม	19
เอกสารสำหรับวิทยากร	49
เรื่อง ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เน้นโครงงานคณิตศาสตร์	**75**
แผนการอบรม	77
เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม	85
เอกสารสำหรับวิทยากร	123
เรื่อง การใช้ ICT ในการสอน	**127**
แผนการอบรม	129
เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม	147
เอกสารสำหรับวิทยากร	203

หน่วยการเรียนรู้ที่ 6

การออกแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

เรื่อง แคลคูลัส

แผนการอบรม

แผนการอบรมครูคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สำหรับครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่

เรื่อง แคลคูลัส

เวลา 2 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์ เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรม

1. มีความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับขอบข่ายเนื้อหาและสาระสำคัญของ เรื่อง แคลคูลัส
2. มีความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับความเข้าใจคลาดเคลื่อน เรื่อง แคลคูลัส
3. สามารถออกแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้และได้แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง แคลคูลัส

สาระการเรียนรู้

1. ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
2. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
3. ปริพันธ์ของฟังก์ชัน

สาระสำคัญ

1. สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ที่มีโดเมนเป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง ถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L เมื่อ x เข้าใกล้ a เรียก L ว่าลิมิตของ f ที่ a และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x\to a} f(x) = L$

แต่ถ้าไม่มีจำนวนจริง L ซึ่ง $f(x)$ เข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a แล้วเราจะกล่าวว่า f ไม่มีลิมิตที่ a และเขียนแทนว่า $\lim_{x\to a} f(x)$ หาค่าไม่ได้

นอกจากนี้สัญลักษณ์ $\lim_{x\to a} f(x) = L$ อาจแทนด้วย $f(x) \to L$ เมื่อ $x \to a$ ซึ่งอ่านว่า " $f(x)$ เข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a "

1.1 ถ้า $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L_1 เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย ($x < a$) และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1$ สัญลักษณ์ " $x \to a^-$ " แสดงถึงการพิจารณาค่าของ x ที่น้อยกว่า a เท่านั้น เรียกจำนวนจริง L_1 ว่า ลิมิตซ้ายของฟังก์ชัน f (left-handed limit)

1.2 ถ้า $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L_2 เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา ($x > a$) และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$ สัญลักษณ์ " $x \to a^+$ " แสดงถึงการพิจารณาค่าของ x ที่มากกว่า a เท่านั้นเรียกจำนวนจริง L_2 ว่า ลิมิตขวาของฟังก์ชัน f (right-handed limit)

ดังนั้น ถ้า $L_1 = L_2 = L$ จะได้ว่า ฟังก์ชัน f มีลิมิตเป็น L เมื่อ x เข้าใกล้ a นั่นคือ $\lim_{x\to a} f(x) = L$ แต่ถ้า $L_1 \neq L_2$ จะได้ว่าฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิตเมื่อ x เข้าใกล้ a นั่นคือ $\lim_{x\to a} f(x)$ หาค่าไม่ได้

2. ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต มีดังนี้

ทฤษฎีบท 1 เมื่อ a, L และ M เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = M$ แล้วจะได้ว่า

1) $\lim_{x\to a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

2) $\lim_{x\to a} x = a$

3) $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ เมื่อ $n \in I^+$

4) $\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

5) $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + M$

6) $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L - M$

7) $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x) = L\cdot M$

8) $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$

9) $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n = L^n$ เมื่อ $n \in I^+$

10) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ เมื่อ $n \in I^+ - \{1\}$, $\sqrt[n]{f(x)} \in R$ และ $\sqrt[n]{L} \in R$

ทฤษฎีบท 2 ถ้า p เป็นฟังก์ชันพหุนาม แล้วสำหรับจำนวนจริง a ใดๆ $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$

ทฤษฎีบท 3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันตรรกยะ โดยที่ $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ เมื่อ p และ q เป็นฟังก์ชันพหุนาม แล้ว $\lim_{x\to a} f(x) = \frac{p(a)}{q(a)}$ สำหรับจำนวนจริง a ใดๆ ที่ $q(a) \neq 0$

3. **บทนิยาม** ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามบนช่วงเปิด (a,b) และ $c \in (a,b)$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = c$ ก็ต่อเมื่อ

1) $f(c)$ หาค่าได้

2) $\lim_{x\to c} f(x)$ หาค่าได้

3) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

4. ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 4 สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ ฟังก์ชันพหุนาม p เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=a$

ทฤษฎีบท 5 ถ้า f เป็นฟังก์ชันตรรกยะ โดยที่ $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ เมื่อ p และ q เป็นฟังก์ชันพหุนาม แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $q(a)\neq 0$

5. **บทนิยาม** ถ้าเส้นโค้งเป็นกราฟของ $y=f(x)$ เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $P(x,y)$ ใด ๆ จะเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด P และมีความชันเท่ากับ $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (ถ้าลิมิตหาค่าได้) ความชันของเส้นโค้งณ จุด $P(x,y)$ หมายถึงความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด P

6. **บทนิยาม** ถ้า $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง และ $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ หาค่าได้ แล้ว เรียกค่าของลิมิตที่ได้นี้ว่า "**อนุพันธ์ (derivative) ของฟังก์ชัน** f **ที่** x" เขียนแทนด้วย $f'(x)$

7. **บทนิยาม** ถ้า $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชัน และ a อยู่ในโดเมนของ f แล้ว

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y **เทียบกับ** x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก a เป็น $a+h$ คือ $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ **อัตราการเปลี่ยนแปลงของ** y **เทียบกับ** x ขณะที่ $x=a$ คือ $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

8. เพื่อให้การหาอนุพันธ์สามารถทำได้สะดวกและรวดเร็ว จึงได้มีการสร้างสูตรที่ใช้สำหรับหาอนุพันธ์ ซึ่งสามารถพิสูจน์สูตรเหล่านี้ได้โดยนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน สูตรที่ใช้ในการหาอนุพันธ์มีดังนี้

สูตรที่ 1 ถ้า $f(x)=c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว แล้ว $f'(x)=0$

สูตรที่ 2 ถ้า $f(x)=x$ แล้ว $f'(x)=1$

สูตรที่ 3 ถ้า $f(x)=x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริง แล้ว $f'(x)=nx^{n-1}$

สูตรที่ 4 ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$

สูตรที่ 5 ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$

สูตรที่ 6 ถ้า c เป็นค่าคงตัวและ f หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $(cf)'(x)=cf'(x)$

สูตรที่ 7 ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $(fg)'(x)=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$

สูตรที่ 8 ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

9. "กฎลูกโซ่ (chain rule)" เป็นสูตรสำหรับหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

สูตร ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(x)$ แล้ว $g\circ f$ หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))f'(x)$

10. **บทนิยาม** ให้ f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ และ $f'(x)$ เป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้ จะเรียกอนุพันธ์ของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x หรืออนุพันธ์ของฟังก์ชัน f' ที่ x ว่าอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ f ที่ x และเขียนแทน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f' ที่ x ด้วย $f''(x)$

11. การพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดบนช่วงใดบ้าง อาจทำได้โดยพิจารณาจากค่าของความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $A\subset D_f$

1) ถ้า $f'(x)<0$ สำหรับทุก x ในช่วง A แล้ว f เป็นฟังก์ชันลด (decreasing function) บนช่วง A

2) ถ้า $f'(x)>0$ สำหรับทุก x ในช่วง A แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) บนช่วง A

12. **บทนิยาม** ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$ ถ้ามีช่วง $(a,b)\subset D_f$ ซึ่ง $c\in(a,b)$ และ $f(c)\geq f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง (a,b) เรียก $f(c)$ ว่า ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum) ของฟังก์ชัน f และจุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(c,f(c))$

ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$ ถ้ามีช่วง $(a,b)\subset D_f$ ซึ่ง $c\in(a,b)$ และ $f(c)\leq f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง (a,b) เรียก $f(c)$ ว่า ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum) ของฟังก์ชัน f และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $(c,f(c))$

13. การพิจารณาค่าต่ำสุดสัมพัทธ์และค่าสูงสุดสัมพัทธ์อาจใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a,b) และ $f'(c)$ หาค่าได้ ถ้า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f จะได้ว่า $f'(c)=0$

14. **บทนิยาม** ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a,b) ค่าของ $c\in(a,b)$ ซึ่งทำให้ $f'(c)=0$ จะเรียกว่า **ค่าวิกฤต** (critical value) ของฟังก์ชัน f

15. **บทนิยาม** ฟังก์ชัน F เป็น**ปฏิยานุพันธ์** (antiderivative) หนึ่งของ f ถ้า $F'(x)=f(x)$ สำหรับทุกค่า x ที่อยู่ในโดเมนของ f

16. เขียนแทนรูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f ด้วยสัญลักษณ์ $\int f(x)dx$ อ่านว่า "ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต (indefinite integral) ของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร x"

ดังนั้น ถ้า $F'(x)=f(x)$ แล้วจะได้ว่า

$$\int f(x)dx=F(x)+c \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

เรียกกระบวนการหา $\int f(x)dx$ ว่า "การหาปริพันธ์ (integration)" เครื่องหมาย " $\int$ " เรียกว่าเครื่องหมาย "ปริพันธ์ (integral)" เรียก $f(x)$ ว่า "ปริพัทธ์ (integrand)" และเรียก dx ว่าเป็น "ผลต่างเชิงอนุพัทธ์ (differential)" เป็นสัญลักษณ์ที่บอกว่า การหาปริพันธ์นี้เทียบกับตัวแปร x

17. สูตรต่อไปนี้เป็นสูตรเกี่ยวกับการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน

สูตรที่ 1 $\int kdx=kx+c$ เมื่อ k และ c เป็นค่าคงตัว

สูตรที่ 2 ถ้า n เป็นจำนวนจริงโดยที่ $n\neq -1$ แล้ว $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

สูตรที่ 3 $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวและ $f(x)$ มีปริพันธ์

สูตรที่ 4 $\int\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$ เมื่อ $f(x)$ และ $g(x)$ มีปริพันธ์

สูตรที่ 5 $\int\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$ เมื่อ $f(x)$ และ $g(x)$ มีปริพันธ์

จากสูตรที่ 3 สูตรที่ 4 และ สูตรที่ 5 จะได้

$$\int\left[k_1f_1(x)\pm k_2f_2(x)\pm\cdots\pm k_nf_n(x)\right]dx=k_1\int f_1(x)dx\pm k_2\int f_2(x)dx\pm\cdots\pm k_n\int f_n(x)dx$$

เมื่อ $f_1(x), f_2(x),\ldots, f_n(x)$ มีปริพันธ์ และ $k_1,k_2,\ldots,k_n$ เป็นค่าคงตัว

18. ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่นิยามบนช่วงปิด $[a,b]$ พิจารณาขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 แบ่งช่วงปิด $[a,b]$ออกเป็นช่วงย่อย n ช่วงที่มีความกว้างเท่า ๆ กันซึ่งแต่ละช่วงจะกว้าง $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ โดยมีจุดแบ่งอยู่ที่ $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$

ขั้นที่ 2 เลือกค่า x_i^* ในแต่ละช่วงปิด $[x_{i-1},x_i]$ เมื่อ $i\in\{1,2,3,\ldots,n\}$ และหาผลบวก

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}f(x_i^*)\Delta x$$

ขั้นที่ 3 หาลิมิต $\lim_{n\to\infty}S_n$

ค่าของ $\lim_{n\to\infty} S_n$ เรียกว่า ปริพันธ์จำกัดเขต (definite integral) ของฟังก์ชัน f บนช่วงปิด $[a,b]$ และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)dx$ เรียก a ว่า **ลิมิตล่าง** (lower limit) ของปริพันธ์ และเรียก b ว่า**ลิมิตบน** (upper limit) ของปริพันธ์ นั่นคือ $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$

19. การหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของ $y=f(x)$ จาก $x=a$ ถึง $x=b$ สามารถหาได้โดยอาศัยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8 เมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ A เป็นพื้นที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ f จาก $x=a$ ถึง $x=b$

1) ถ้า $f(x)\geq 0$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่บนช่วง $[a,b]$ และ A เป็นพื้นที่เหนือแกน X แล้ว $A=\int_a^b f(x)dx$

2) ถ้า $f(x)\leq 0$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่บนช่วง $[a,b]$ และ A เป็นพื้นที่ใต้แกน X แล้ว $A=-\int_a^b f(x)dx$

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน/ ยาก

ตัวอย่างของความเข้าใจคลาดเคลื่อน มีดังต่อไปนี้

1. ด้านตีความจากโจทย์ พบว่านักเรียนบางส่วนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ดังนี้

1.1) เปลี่ยนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ไม่ถูกต้อง เช่น จากโจทย์ สวนส้มสีทองสวนหนึ่งปลูกส้มไร่ละ 50 ต้น ซึ่งจะให้ผลโดยเฉลี่ยต้นละ 600 ผล ถ้าเจ้าของสวนปลูกส้มเพิ่มขึ้นอีกจะทำให้ต้นที่ปลูกอยู่เดิมให้ผลเฉลี่ยลดลงต้นละ 10 ผลต่อส้มทุก ๆ ต้นที่ปลูกเพิ่มขึ้น

ถ้าให้ x แทนจำนวนต้นส้มที่ปลูกเพิ่มขึ้นในพื้นที่หนึ่งไร่

และให้ y แทนจำนวนผลส้มที่เก็บได้ทั้งหมดในพื้นที่หนึ่งไร่

แล้วจะเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y เป็นอย่างไร

นักเรียนตอบว่า $x=\frac{600}{50}y$

1.2) ไม่ใช้ข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ เช่น จากโจทย์ ให้อนุพันธ์ของ f คือ $4x^3+1$ และเส้นตรง $y=x+1$ สัมผัสกับเส้นโค้ง $y=f(x)$ ที่จุด $x=0$ จงหาสมการของ $f(x)$

นักเรียนไม่ใช้ข้อมูลที่กำหนดให้ แต่ใช้ข้อมูล $f(x)=4x^3+1$ แทน

2. ด้านการใช้ทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม และ สมบัติ พบว่านักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน 2 มโนทัศน์ ดังนี้

2.1) ขาดความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยามและสมบัติ เช่น เข้าใจว่า

2.1.1) เข้าใจว่า $y' = \frac{1}{y}$

2.1.2) นักเรียนใช้สัญลักษณ์ที่ไม่สัมพันธ์กัน เช่น

จาก $f(x) = x^4$ ได้ $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + c$

2.2) ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยามและสมบัติไม่ถูกต้อง เช่น

จาก $f'(x) = 4x^3 + 1$ ได้ $f(x) = 12x^2$

สื่อและแหล่งการเรียนรู้

1. สำหรับผู้เข้ารับการอบรม

1.1 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1: ใบงานที่ 1 เรื่อง แคลคูลัส

1.2 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 2: ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง กฎลูกโซ่

1.3 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 3: ใบความรู้ที่ 1 เรื่อง ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน

1.4 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 4: ใบความรู้ที่ 2 เรื่อง ติดอาวุธครูคณิต พิชิตความเข้าใจคลาดเคลื่อน

1.5 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 5: แบบตรวจสอบความเข้าใจ เรื่อง แคลคูลัส

1.6 คู่มือการใช้โปรแกรม Geogebra

1.7 คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

2. สำหรับวิทยากร

2.1 เอกสารสำหรับวิทยากร 1: เฉลยใบงานที่ 1 เรื่อง แคลคูลัส

2.2 เอกสารสำหรับวิทยากร 2: เฉลยใบความรู้ที่ 2 เรื่อง ติดอาวุธครูคณิต พิชิตความเข้าใจคลาดเคลื่อน

2.3 เอกสารสำหรับวิทยากร 3: เฉลยแบบตรวจสอบความเข้าใจ เรื่อง แคลคูลัส

2.4 เอกสารสำหรับวิทยากร 4: แบบบันทึกผลการประเมิน เรื่อง แคลคูลัส

2.5 เอกสารสำหรับวิทยากร 5: แบบประเมินการมีส่วนร่วมในกิจกรรม

2.6 คู่มือการใช้โปรแกรม Geogebra

2.7 คลิปเพลง ไกลแค่ไหนคือใกล้ ของศิลปินวง getsunova

2.8 ไฟล์ RiemannSum.gbb

การประเมินผล

รายการประเมิน	**เกณฑ์การให้คะแนน (คะแนนเต็ม 10.5 คะแนน)**	**เครื่องมือ**
1. การมีส่วนร่วมในกิจกรรม พิจารณาจาก 1.1 - 1.6 ดังนี้ 1.1 ความร่วมมือในกิจกรรม 1.2 ความรับผิดชอบ 1.3 การเสนอความคิดเห็น 1.4 ความริเริ่มสร้างสรรค์ 1.5 การเป็นผู้นำหรือผู้ตามที่ดี 1.6 การตรงเวลา	**คะแนนเต็ม 5 คะแนน โดย** ได้ 5 คะแนน เมื่อมี 5 – 6 ข้อ ได้ 4 คะแนน เมื่อมี 3 – 4 ข้อ ได้ 3 คะแนน เมื่อมี 1 – 2 ข้อ ได้ 0 คะแนน เมื่อไม่มีทั้ง 6 ข้อ	- แบบประเมินการมีส่วนร่วมในกิจกรรม
2. การสรุปองค์ความรู้	**คะแนนเต็ม 5 คะแนน โดย** คะแนนจากแบบตรวจสอบความเข้าใจเรื่อง แคลคูลัส 10 ข้อ ข้อละ 0.5 คะแนน	- แบบบตรวจสอบความเข้าใจ
3. การทดสอบความรู้	**คะแนนเต็ม 0.5 คะแนน โดย** ตรวจให้คะแนนจากแบบทดสอบหลังเรียน 1 ข้อ ข้อละ 0.5 คะแนน	- แบบทดสอบหลังเรียน

แนวทางปฏิบัติสำหรับวิทยากร

1. ศึกษาแผนการจัดการเรียนรู้ เอกสารสำหรับวิทยากร และเอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม ในเรื่อง แคลคูลัส
2. ศึกษาแบบทดสอบ เรื่อง แคลคูลัส พร้อมทั้งทำความเข้าใจแนวการตอบคำถามจากเอกสารใบงานที่ 1 และ ใบงานที่ 2 สำหรับผู้เข้ารับการอบรม
3. ศึกษา ความเข้าใจคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการเรียนรู้เรื่อง แคลคูลัส วิทยากรอาจเพิ่มเติมความเข้าใจคลาดเคลื่อนนอกเหนือจากที่กล่าวไว้ในเอกสาร

4. แจ้งให้ผู้เข้ารับการอบรมทราบเกี่ยวกับวัตถุประสงค์ในการอบรม เรื่องแคลคูลัส และการวัดผลและการประเมินผล
5. ดำเนินการจัดการอบรมตามแนวทางการจัดกิจกรรม พร้อมทั้งประเมินผลผู้เข้ารับการอบรมตามรายการประเมินและเครื่องมือที่กำหนด แล้วกรอกคะแนนสรุปลงในเอกสารสำหรับวิทยากร 6: แบบกรอกคะแนน เรื่อง แคลคูลัส

แนวทางการจัดกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
1. การทบทวนความรู้ (45 นาที) **1.1 ขั้นนำ** (20 นาที) วิทยากรเปิดเพลง ไกลแค่ไหนคือใกล้ (เอกสารสำหรับวิทยากร 1) อย่างเบา ๆ และในขณะเดียวกันก็ทำการแบ่งกลุ่มผู้เข้ารับการอบรมออกเป็น 5 กลุ่ม เมื่อจบเพลง วิทยากรชี้แจงให้ทราบเกี่ยวกับวัตถุประสงค์และสาระการเรียนรู้ ตลอดจนการแนะนำเทคนิคการสอนแคลคูลัสในบางหัวข้อ และตัวอย่างมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน วิทยากรตั้งคำถามนำเกี่ยวกับชื่อเพลงว่า “ทุกท่านสงสัยไหมครับว่าทำไมผมถึงต้องเปิดเพลง ไกลแค่ไหนคือใกล้ด้วย แล้วเพลงนี้จะเกี่ยวข้องกับวิชาแคลคูลัสอย่างไรนะ” หลังจากนั้น ให้วิทยากรขออาสาสมัคร 1 คน ออกมาร่วมกิจกรรม ให้อาสาสมัครหันหน้าเข้าหากำแพงหรือ ฝาผนัง แล้วเปลี่ยนตำแหน่งของตัวเองโดยการก้าวออกจากจุดที่ตัวเองยืนอยู่ไปยังจุดกึ่งกลางระหว่างกำแพงและตัวผู้อาสาสมัครเอง แล้วถามอาสาสมัครว่า **คิดว่าเขาอยู่ใกล้กำแพงมากพอหรือยัง** หรือถามว่า คิดว่า**เขาสามารถเข้าใกล้กำแพงมากกว่านี้ได้ไหม** แล้วให้	- เพลง ไกลแค่ไหนคือใกล้	

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
อาสาสมัครก้าวเข้าหากำแพงในลักษณะข้างต้นนี้ ไปเรื่อย ๆ โดยทำการถามอาสาสมัครไปเรื่อย ๆ ว่า **เขาอยู่ใกล้กำแพงมากพอหรือยัง แล้ว "อีกไกลแค่ไหนถึงจะใกล้"** ซึ่งเป็นการเฉลยคำตอบแก่ผู้เข้ารับการอบรมทุกคนว่า **วิทยากรได้ใช้สำนวนสั้น ๆ ของชื่อเพลง มากล่าวถึงเทคนิคการสอนเกี่ยวกับเรื่องลิมิตเมื่อ x เข้าใกล้ค่าใดค่าหนึ่งนั่นเอง** ต่อจากนั้น วิทยากรถือกระดาษขนาด A4 จำนวน 1 แผ่น แล้วแบ่งกระดาษแผ่นนั้น โดยการฉีกออกครั้งละ $\frac{1}{2}$ ของกระดาษที่มีอยู่ ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ **จนพบประเด็นที่น่าสนใจคือ เราไม่สามารถฉีกกระดาษไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งไม่เหลือกระดาษอยู่ในมือเลย** แล้วให้ผู้เข้ารับการอบรมทุกคนตั้งข้อสังเกตว่าที่เป็นเช่นนี้ เพราะเหตุใด คำตอบที่เป็นไปได้ อาจมีได้มากกว่า 1 รูปแบบเช่น **1. เป็นการแสดงว่า** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ **2. เป็นการหาผลบวกของอนุกรม** $$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$$ เป็นต้น วิทยากรสอบถามผู้เข้ารับการอบรมเกี่ยวกับปัญหาในการสอนเรื่องการหาปริพันธ์ และ ให้คำแนะนำในการใช้ Geogebra มาช่วยในขั้นนำเข้าสู่บทเรียน เรื่องผลบวกรีมันน์ โดยวิทยากรจะกล่าวว่าการสร้างเป็นภาพให้ดูเข้าใจง่ายขึ้น จะทำให้นักเรียนสามารถเรียนรู้ได้ด้วยความเข้าใจจริง	- กระดาษ A4 1 แผ่น - ไฟล์ RiemannSum.ggb	- ประเมินการมีส่วนร่วมในกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
1.2 ขั้นระดมสมอง (10 นาที) วิทยากร แจกใบงานที่ 1 เรื่องแคลคูลัสให้กับผู้เข้ารับการอบรมคนละ 1 ใบงาน เพื่อศึกษาเรียนรู้จากคู่มือครู พร้อมทั้งวัดความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาเรื่องแคลคูลัส จำนวน 10 ข้อ ใช้เวลา 10 นาที **1.3 วิทยากรและผู้เข้ารับการอบรมร่วมกันสรุป** (15 นาที) วิทยากรเฉลยใบงานที่ 1 พร้อมทั้งสอบถามว่าส่วนใหญ่จะทำผิดข้อไหน แล้วทำการอภิปรายว่าอะไรคือความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน	- เอกสารสำหรับผู้ข้ารับการอบรม 1: ใบงานที่ 1 เรื่อง แคลคูลัส - เอกสารสำหรับวิทยากร 1: เฉลยใบงานที่ 1 เรื่อง แคลคูลัส	
2. การปฏิบัติการตามเนื้อหาสาระ (1 ชั่วโมง 5 นาที) 2.1 วิทยากรแจกตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้เรื่อง กฎลูกโซ่ เพื่อแนะนำวิธีจัดการเรียนรู้เรื่องแคลคูลัสโดยอาศัย Inquiry Based Learning (20 นาที) 2.2 วิทยากรแจกใบความรู้ที่ 1 เรื่อง ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน ให้กับผู้เข้ารับการอบรมในแต่ละกลุ่มเพื่อวิเคราะห์เกี่ยวกับความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนที่เกิดขึ้นจริง หลังจากนั้น ให้วิทยากรสุ่มหมายเลขกลุ่มของผู้เข้ารับการอบรม เพื่อส่งตัวแทนออกมาเขียนวิธีคิดที่ถูกต้องเสนอต่อผู้เข้ารับการอบรมคนอื่น ๆ (20 นาที) 2.3 วิทยากรแจกใบความรู้ที่ 2 เรื่อง ติดอาวุธครูคณิต พิชิตความเข้าใจคลาดเคลื่อน เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรมในกลุ่มที่ 1 ทำข้อที่ 1 ผู้เข้าอบรมในกลุ่มที่ 2 ทำข้อที่ 2 แต่ละกลุ่มวิเคราะห์และประเมินว่า จากตัวอย่างการแสดงวิธีทำของนักเรียนแต่ละข้อ แสดงถึงความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนอย่างไร อีกทั้งได้ตระหนักถึง	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 2: ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง กฎลูกโซ่ - คู่มือการใช้โปรแกรม Geogebra - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 3: ใบความรู้ที่ 1 เรื่อง ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 4: ใบความรู้ที่ 2 เรื่อง ติดอาวุธครูคณิต พิชิตความเข้าใจคลาดเคลื่อน	- ประเมินการมีส่วนร่วมในกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
การตั้งเกณฑ์การให้คะแนนอย่างรัดกุมและมีหลักการ โดยที่วิทยากรต้องชี้แจงว่า การที่นักเรียนเขียนผิดนิดผิดหน่อยหรือการที่นักเรียนเขียนไม่ตรงกับเฉลยของตนแล้วตรวจว่าผิด หรือให้คะแนนน้อยกว่าที่ควรจะเป็น จะทำให้เราไม่สามารถแยกระดับความสามารถที่แท้จริงของนักเรียนได้ (20 นาที)	- เอกสารสำหรับวิทยากร 2: เฉลยใบความรู้ที่ 2 เรื่อง ติดอาวุธครูคณิต พิชิตความเข้าใจคลาดเคลื่อน	
3. การสรุปบทเรียน (10 นาที) วิทยากรให้ทำแบบตรวจสอบความเข้าใจ เรื่อง แคลคูลัส และทำการเก็บคะแนน 5 คะแนน จากการทดสอบ	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 5: แบบตรวจสอบความเข้าใจ เรื่อง แคลคูลัส - เอกสารสำหรับวิทยากร 3: เฉลยแบบตรวจสอบความเข้าใจ เรื่อง แคลคูลัส	- แบบตรวจสอบความเข้าใจ

เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม

ใบงานที่ 1 เรื่อง แคลคูลัส

จงเขียน ✓ หน้าข้อความที่กล่าวถูกต้องและ ✗ หน้าข้อความที่กล่าวไม่ถูกต้อง

.....1.	ลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใกล้ a คือ ค่าของฟังก์ชัน f ณ ตำแหน่งที่ $x=a$
.....2.	เราสามารถใช้ ลิมิต ในการอธิบายว่า ค่าของฟังก์ชันเปลี่ยนแปลงไปอย่างไรเมื่อค่า x เปลี่ยนไปทีละนิด
.....3.	ลิมิตของฟังก์ชัน f ใด ๆ อาจจะหาค่าไม่ได้ ณ จุดใดจุดหนึ่งในโดเมนก็ได้
.....4.	การหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน f จาก $x=a$ ถึง $x=b$ คือการคำนวณหาพื้นที่ใต้โค้งของของฟังก์ชัน f จาก $x=a$ ถึง $x=b$
.....5.	อนุพันธ์อันดับสองของสมการ $y=f(x)$ คือ $f''(x)$ หรือ $\frac{dy^2}{dx^2}$
.....6.	$\frac{d}{dx}\left(f(x)\times g(x)\right)=f'(x)g'(x)$
.....7.	$f'\left(g(2)\right)=f'(2)g(2)$

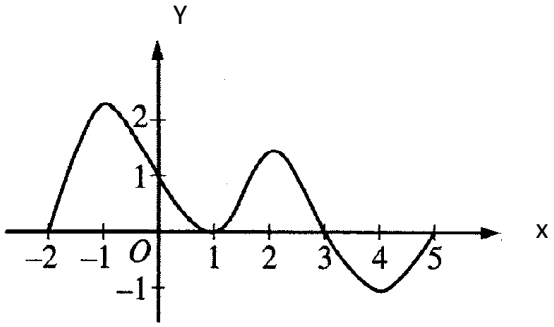
จงเขียนเฉพาะคำตอบ

8. กำหนดให้

ก. $f(x)=\left|x\right|$ ข. $f(x)=\tan x$ ค. $f(x)=3x^2+x-7$

มีฟังก์ชันใดบ้างที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับจำนวนจริงทุกจำนวน

ตอบ.....



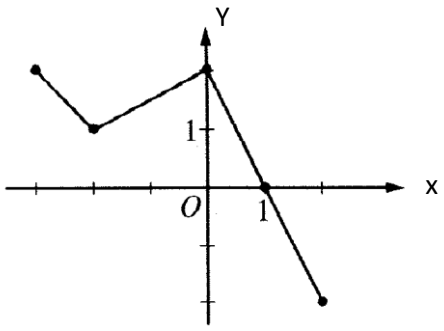
Graph of f'

9. จากกราฟของ f' ซึ่งเป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f บนช่วง $-2 \le x \le 5$ ดังที่แสดงในภาพข้างต้น อยากทราบว่า ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันลดบนช่วงใด

A. $[-2,1]$ เท่านั้น B. $[-2,3]$ C. $[3,5]$ เท่านั้น

D. $[0,1.5]$ และ $[3,5]$ E. $[-2,-1],[1,2]$ และ $[4,5]$

10. จากกราฟของฟังก์ชัน f ดังที่แสดงข้างล่างนี้ ถ้านิยามฟังก์ชัน $g(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,dt$ อยากทราบว่าค่าฟังก์ชันที่จุดใดต่อไปนี้ ให้ค่าสูงที่สุด



Graph of f

A. $g(-2)$ B. $g(-1)$ C. $g(0)$

D. $g(1)$ E. $g(2)$

ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง กฎลูกโซ่

1. สาระสำคัญ

"กฎลูกโซ่ (chain rule)" เป็นสูตรสำหรับหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

2. ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

เข้าใจและสามารถทำการหาอนุพันธ์โดยใช้กฎลูกโซ่ได้

3. จุดประสงค์การเรียนรู้

สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบได้

4. เนื้อหาสาระ

ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(x)$ แล้ว $g \circ f$ หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$

5. กระบวนการจัดการเรียนรู้ (โดยใช้กระบวนการสืบเสาะทางวิทยาศาสตร์)

ขั้นที่ 1 ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

ผู้สอนทำการทบทวนเนื้อหาในคาบเรียนที่ผ่านมา โดยเฉพาะอย่างยิ่ง สูตรการหาอนุพันธ์ $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ เช่น $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$ แล้วทำการถามนักเรียนว่า แล้วทำการอภิปรายว่าหากเราต้องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $(g(x))^2$ แล้วผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจะเป็น $2g(x)$ หรือไม่

ขั้นที่ 2 ขั้นสำรวจและค้นพบ

ก่อนอื่น ให้ผู้สอนเขียนฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $g(x) = (ax+b)^2$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ง่ายต่อการกระจายกำลังสองสมบูรณ์และอีกทั้งยังง่ายต่อการหาอนุพันธ์ ผู้สอนให้นักเรียนทำการกระจายพจน์ในฟังก์ชันนี้ แล้วใช้การถาม – ตอบ เพื่อทำการหาว่า ค่า k ที่ทำให้ $g'(x) = 2(ax+b)k$ มีค่าเท่าใด

ต่อมาผู้สอนเขียนฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $g(x) = (ax^2+bx+c)^2$ และเช่นเดิม ผู้สอนให้นักเรียนทำการกระจายพจน์ในฟังก์ชันนี้ แล้วใช้การถาม-ตอบ เพื่อทำการหาว่าฟังก์ชัน $k(x)$ ที่ทำให้ $g'(x) = 2(ax^2+bx+c)k(x)$ คือฟังก์ชันใด

ขั้นที่ 3 ขั้นอธิบายและลงข้อสรุป

ผู้สอนทำการอภิปรายคำตอบที่นักเรียนได้ พร้อมทั้งทำการถาม – ตอบเพื่อทำการอภิปรายว่าค่า k หรือ ฟังก์ชัน $k(x)$ ที่ได้มาจากตัวอย่างข้างต้นนี้เกิดจากการหาอนุพันธ์ของนิพจน์ใดในฟังก์ชัน g

ขั้นที่ 4 ขั้นขยายความรู้

ผู้สอนพานักเรียนไปยังห้องคอมพิวเตอร์ หลังจากนั้นให้นักเรียนเปิดโปรแกรม Geogebra เพื่อสอนเกี่ยวกับวิธีการวาดกราฟในโปรแกรม อีกทั้งวิธีการหาเส้นสัมผัสรวมไปถึงความชัน ณ ตำแหน่งของจุดบนกราฟใด ๆ ที่เราต้องการ

ผู้สอนทำการแจกใบกิจกรรมแล้วให้เวลานักเรียน 30 นาทีในการทดลองใช้โปรแกรมด้วยตนเองพร้อมทั้งตอบคำถามทุกข้อในใบงานให้ครบถ้วน สมบูรณ์

ขั้นที่ 5 ขั้นประเมินผล

ผู้สอนทำการแจกใบกิจกรรม เรื่อง กฎลูกโซ่ แล้วทำการสังเกตจากการตอบคำถาม

6. สื่อการเรียนรู้ เอกสารที่ใช้

ใบกิจกรรม เรื่อง กฎลูกโซ่

เฉลยใบกิจกรรมเรื่อง กฎลูกโซ่

คู่มือครูสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 6

ใบกิจกรรม เรื่อง กฎลูกโซ่

1. เติมตารางข้างล่างนี้ให้สมบูรณ์ ในคอลัมน์ที่หนึ่ง นักเรียนจะพบกับฟังก์ชัน 3 ฟังก์ชัน ที่อยู่ในรูป $f(x)=(g(x))^n$ เมื่อ $g(x)=x^2-3x$ ในหลักที่สองของตาราง นักเรียนสามารถทำการคำนวณได้ด้วยตนเอง ในคอลัมน์ที่สามของตาราง ให้นักเรียนใช้เครื่องคิดเลข หรือ Geogebra ในการหาความชันของฟังก์ชัน f ณ จุด $x=-1$ ในคอลัมน์สุดท้าย ให้เติมจำนวนจริง (อาจจะเป็นจำนวนเต็ม หรือเศษส่วน) ที่เมื่อนำตัวเลขนี้ไปคูณกับจำนวนในหลักที่สองที่เกิดจาก $n(g(x))^{n-1}$ แล้วจะให้ผลลัพธ์ออกมามีค่าเท่ากับความชันที่ได้ในคอลัมน์ที่สาม ซึ่งก็คือ $f'(-1)$

ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x)=(g(x))^n$	**ค่าของ** $n(g(x))^{n-1}$ **ณ จุด** $x=-1$	**ความชันของฟังก์ชัน** f **ณ จุด** $x=-1$ **นั่นคือ** $f'(-1)$	**จำนวนจริง** k **ที่ทำให้** $f'(-1)=n(g(1))^{n-1}\times k$
$(x^2-3x)^2$			
$(x^2-3x)^3$			
$\sqrt{x^2-3x}$			

2. อยากทราบว่า ค่า k ที่ได้ในแต่ละข้อย่อยนั้น มีค่าเท่ากันหรือไม่ นักเรียนคิดว่าค่า k ที่ได้เกิดจากการหาอนุพันธ์ของนิพจน์ใด

3. เมื่อพิจารณาฟังก์ชัน $f(x)=(x^3-2x^2-2x+6)^3$ จงหาค่าของ $f'(1)$ โดยไม่อาศัยเครื่องคิดเลข หรือ โปรแกรม Geogebra พร้อมทั้งอธิบายคำตอบที่ได้มาพอเข้าใจ

4. โดยทั่วไปแล้ว สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y=(g(x))^n$ คือ

$$\frac{d}{dx}(g(x))^n=n(g(x))^{n-1}k(x)$$

อยากทราบว่า $k(x)$ คืออะไร?

เฉลยใบกิจกรรม เรื่อง กฎลูกโซ่

1.

ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x)=(g(x))^n$	**ค่าของ** $n(g(x))^{n-1}$ **ณ จุด** $x=-1$	**ความชันของฟังก์ชัน** f **ณ จุด** $x=-1$ **นั่นคือ** $f'(-1)$	**จำนวนจริง** k **ที่ทำให้** $f'(-1)=n(g(1))^{n-1}\times k$
$(x^2-3x)^2$	8	-40	-5
$(x^2-3x)^3$	48	-240	-5
$\sqrt{x^2-3x}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	-5

2. ในปัญหานี้ พบว่าค่า k ที่ได้ในแต่ละข้อย่อยนั้น มีค่าเท่ากัน เนื่องจากค่า k ที่ได้เกิดจากการหาอนุพันธ์ของนิพจน์ $\frac{d}{dx}(x^2-3x)$ คำนวณค่าที่จุด $x=-1$

3. พิจารณาฟังก์ชัน $f(x)=(x^3-2x^2-2x+6)^3$

เราพบว่า $f'(x)=3(x^3-2x^2-2x+6)^2(3x^2-4x-2)$

ดังนั้น เราจะได้ว่า $f'(1)$ มีค่าเท่ากับ -81

4. โดยทั่วไปแล้ว $\frac{d}{dx}(g(x))^n=n(g(x))^{n-1}k(x)$ เมื่อ $k(x)=\frac{d}{dx}(g(x))$

ใบความรู้ที่ 1

เรื่อง ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน

สิ่งที่นักเรียนต้องการหา	**ข้อผิดพลาด**	**ควรจะแก้ไขเป็น**	**คำอธิบายมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนนั้น**
1. ต้องการคำนวณค่าของ $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x-3}$	นักเรียนแสดงวิธีทำดังนี้ $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x-3}$ $=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-4)}{x-3}$ $=-4$	$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x-3}$ $=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+4)}{x-3}$ $=7$	**<u>การหาลิมิต</u>** นักเรียนทำการแยกตัวประกอบไม่ถูกต้อง มากไปกว่านั้น ยังทำการคำนวณค่าเมื่อ $x\to 0$ แทนที่จะเป็น $x\to 3$
2. ต้องการคำนวณค่าของ $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$	นักเรียนแสดงวิธีทำดังนี้ $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$ $=\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$ $=\frac{1}{2}$	$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$ $=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$ $=\frac{1}{2}$	**<u>การหาลิมิต</u>**
3. ต้องการคำนวณค่าของ $\lim_{x\to 5} x$	นักเรียนแสดงวิธีทำดังนี้ $\lim_{x\to 5} x=\lim_{x\to 5} 5=5$	$\lim_{x\to 5} x=5$	**<u>การหาลิมิต</u>**
4. ต้องการคำนวณค่าของ $\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x+1}$	นักเรียนแสดงวิธีทำดังนี้ $\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x+1}$ $=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+0}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=1$	$\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x+1}$ $=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{\sqrt{1+0}}{(1+0)}=1$	**<u>การหาลิมิตอนันต์</u>**

สิ่งที่นักเรียนต้องการหา	**ข้อผิดพลาด**	**ควรจะแก้ไขเป็น**	**คำอธิบายมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนนั้น**
5. ในการหาอนุพันธ์โดยใช้นิยาม นักเรียนต้องการหา $f\left(x+h\right)$ ของฟังก์ชัน $f\left(x\right)=\sqrt{2x+1}$	$f\left(x+h\right)=\sqrt{2x+1}+h$	$f\left(x+h\right)=\sqrt{2\left(x+h\right)+1}$	**<u>ความเข้าใจเรื่องฟังก์ชัน</u>** มีฟังก์ชันเพียงไม่กี่ฟังก์ชันเท่านั้น ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $f\left(x+h\right)=f\left(x\right)+h$
6. ต้องการคำนวณค่าของ $\frac{d}{dx}\left(x^2+5\right)$	นักเรียนแสดงวิธีทำดังนี้ $\frac{d}{dx}\left(x^2+5\right)=2x+5$	$\frac{d}{dx}\left(x^2+5\right)=2x$	**<u>กฎการบวก</u>**
7. ต้องการคำนวณค่าของ $\frac{d}{dx}\left[x\left(\frac{400-2x}{\pi}\right)\right]$	นักเรียนแสดงวิธีทำดังนี้ $\frac{d}{dx}\left[x\left(\frac{400-2x}{\pi}\right)\right]$ $=-2x+1\left(\frac{400-2x}{\pi}\right)$	$\frac{d}{dx}\left[x\left(\frac{400-2x}{\pi}\right)\right]$ $=-\frac{2x}{\pi}+1\left(\frac{400-2x}{\pi}\right)$ หรือ	**<u>กฎการคูณ</u>**
8. ต้องการคำนวณค่าของ $\frac{d}{dx}\left[x\left(\frac{400-2x}{\pi}\right)\right]$	นักเรียนแสดงวิธีทำดังนี้ $\frac{d}{dx}\left[x\left(\frac{400-2x}{\pi}\right)\right]$ $=x\left(\frac{\pi+0-2}{\pi^2}\right)+\left(\frac{400-2x}{\pi}\right)$	$\frac{d}{dx}\left[x\left(\frac{400-2x}{\pi}\right)\right]$ $=x\left[\frac{\pi\left(0-2\right)}{\pi^2}\right]+\left(\frac{400-2x}{\pi}\right)$	**<u>กฎการหาร</u>**

สิ่งที่นักเรียนต้องการหา	**ข้อผิดพลาด**	**ควรจะแก้ไขเป็น**	**คำอธิบายมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนนั้น**
9. ต้องการคำนวณค่าของ $\frac{d}{dz}\left(\frac{3z^2+1}{z^4-5}\right)$	นักเรียนแสดงวิธีทำดังนี้ $\frac{d}{dz}\left(\frac{3z^2+1}{z^4-5}\right)$ $=\frac{6z\cdot z^4-5-\left(3z^2+1\right)4z^3}{\left(z^4-5\right)^2}$ $=\frac{6z^5-4z^3-5}{\left(z^4-5\right)^2}$	$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{3z^2+1}{z^4-5}\right)\right]$ $=\frac{\left(z^4-5\right)\left(6z\right)-\left(3z^2+1\right)4z^3}{\left(z^4-5\right)^2}$ $=\frac{6z^5-30z-12z^5-4z^3}{\left(z^4-5\right)^2}$ $=\frac{-6z^5-4z^3-30z}{\left(z^4-5\right)^2}$	**<u>กฎการหาร</u>**
10. ต้องการคำนวณค่าของ $\frac{d}{dz}\left(\frac{3z^2+1}{z^4-5}\right)$	นักเรียนแสดงวิธีทำดังนี้ $\frac{d}{dz}\left(\frac{3z^2+1}{z^4-5}\right)$ $=\frac{4z^3\left(3z^2+1\right)-\left(z^4-5\right)\left(6z\right)}{\left(z^4-5\right)^2}$ $=\frac{6z^5+4z^3+30z}{\left(z^4-5\right)^2}$		**<u>กฎการหาร</u>**
11. ต้องการคำนวณค่าของ $\frac{d}{dz}\left(\frac{5z^2}{4z^2-11}\right)$	นักเรียนแสดงวิธีทำดังนี้ $\frac{d}{dz}\left(\frac{5z^2}{4z^2-11}\right)$ $=\frac{10z-8z}{\left(4z^2-11\right)^2}$		**<u>กฎการหาร</u>**

สิ่งที่นักเรียนต้องการหา	**ข้อผิดพลาด**	**ควรจะแก้ไขเป็น**	**คำอธิบายมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนนั้น**
12. ต้องการคำนวณค่าของ $\frac{d}{dz}\left(\frac{5z^2}{4z^2-11}\right)$	นักเรียนแสดงวิธีทำดังนี้ $\frac{d}{dz}\left(\frac{5z^2}{4z^2-11}\right)$ $=\frac{\left(4z^2-11\right)10z-5z^2\left(8z\right)}{4z^2-11}$ $=-\frac{110z}{4z^2-11}$		**<u>กฎการหาร</u>**
13. ต้องการหาอนุพันธ์ $\frac{d}{dz}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$	นักเรียนแสดงวิธีทำดังนี้ $\frac{d}{dz}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$		**<u>กฎลูกโซ่</u>**
14. ต้องการหาเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ของสมการ $f\left(x\right)=x^3$ ณ จุด $x=2$	นักเรียนแสดงวิธีทำดังนี้ เนื่องจาก $f\left(x\right)=x^3$ ดังนั้น $f\left(2\right)=8$ และ $\frac{d}{dx}f\left(x\right)=3x^2$ ดังนั้น เส้นสัมผัสคือ $y-8=3x^2\left(x-2\right)$ $y=3x^3-6x^2+8$		**<u>เส้นสัมผัสเส้นโค้ง</u>**

ที่มา: http://mathmistakes.info/index.html

ใบความรู้ที่ 2

เรื่อง ติดอาวุธครูคณิต พิชิตความเข้าใจคลาดเคลื่อน

ตารางกิจกรรม : จงวิเคราะห์วิธีการเขียนคำตอบของนักเรียน พร้อมทั้งทำการวิเคราะห์ความผิดพลาดที่พบในตารางต่อไปนี้

คำถามข้อที่ 1. จงแสดงว่า ถ้า $f(x)=-x^2$ แล้ว $f'(x)=-2x$ โดยใช้นิยามของการหาอนุพันธ์

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของณเดช</u> $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-f(x)}{h}$ $=\lim_{h\to 0}\frac{-(x+h)^2-(-x^2)}{h}$ $=\lim_{h\to 0}\frac{-2xh-h^2}{h}$ $=\lim_{h\to 0}\frac{h(-2x-h)}{h}=-2x$	

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการ สอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของญาญ่า</u> $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $= \lim_{h\to} \frac{-(x+h)^2 - (-x^2)}{h}$ $= \lim_{h\to} \frac{-2xh - h^2}{h}$ $= \lim_{h\to} \frac{h(-2x-h)}{h} = -2x$	
<u>วิธีทำของโตโน่</u> $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)^2 - (-x^2)}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{-2x^2 + 4xh - 2h^2 + x^2}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{4xh - 2h^2}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{h(4x-2h)}{h} = 4x$	

คำถามข้อที่ 2. จงหาอนุพันธ์ของ $y=\left(x^3+1\right)\left(x^2-2\right)$ เทียบกับ x

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของหนูดี</u> $\frac{dy}{dx}=\left(x^3+1\right)\left(x^2-2\right)$ $=\left(x^3+1\right)(2x)+\left(x^2-2\right)\left(3x^2\right)$	
<u>วิธีทำของแบมบี้</u> $\frac{dy}{dx}=\left(x^3+1\right)(2x)+\left(x^2-2\right)\left(3x^2\right)$ $=0$	
<u>วิธีทำของพลอย</u> $\frac{dy}{dx}=\left(3x^2\right)(2x)$	

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการ สอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของคุณลำไย</u> ทำการกระจายเทอมในวงเล็บจะทำให้เราได้ว่า $y = \left(x^3+1\right)\left(x^2-2\right)$ $= x^5 - 2x^3 + x^2 - 2$ $= x^7 - 2x^3 - 2$ เราจึงได้ว่า $\frac{dy}{dx} = 7x^6 - 6x$	
<u>วิธีทำของคุณลำยอง</u> ทำการกระจายเทอมในวงเล็บจะทำให้เราได้ว่า $\frac{dy}{dx} = \left(x^3+1\right)\left(x^2-2\right)$ $= x^5 - 2x^3 + x^2 - 2$ $= 5x^4 - 6x^2 + 2x$	

คำถามข้อที่ 3. จงหาอนุพันธ์ของ $y=\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}}$ เทียบกับ x

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของแก้ม</u> $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-4}{x^{\frac{1}{2}}}\right)$ $=\dfrac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}$ $=1$	
<u>วิธีทำของปองศักดิ์</u> $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2}\right)$ $=\dfrac{d}{dx}\left(1-4x^{-2}\right)$ $=8x^{-3}$	

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของไอซ์</u> ทำการยกกำลังสองทั้งเศษและส่วนจะได้ว่า $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x-16}{x}\right)$ $=\frac{d}{dx}\left(1-\frac{16}{x}\right)$ $=\frac{d}{dx}\left(1-x^{-16}\right)$ $=16x^{-17}$	
<u>วิธีทำของเทย่า</u> $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-4}{x^{\frac{1}{2}}}\right)$ $=x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}-4\right)-\left(x^{\frac{1}{2}}-4\right)\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)$	

คำถามข้อที่ 4. จงหาจุดวกกลับของกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x^3+x^2-5x+3$

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของพ่อมาก</u> เราจะได้ว่า $f'(x)=3x^2+2x-5$ เนื่องจาก $f'(x)=0$ เมื่อ $x=1$ หรือ $x=2$ และเนื่องจาก $f(1)=-6$ และ $f(2)=-18$ เราจึงได้ว่า จุดวกกลับของกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ คือ $(1,-6)$ และ $(2,-18)$	
<u>วิธีทำของนาค</u> เราจะได้ว่า $f'(x)=3x^2+2x-5=(3x+5)(x-1)$ เนื่องจาก $f'(x)=0$ เมื่อ $x=1$ หรือ $x=\frac{5}{3}$ และเนื่องจาก $f(1)=0$ และ $f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{56}{27}$ เราจึงได้ว่า จุดวกกลับของกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ คือ $(1,0)$ และ $\left(\frac{5}{3},\frac{56}{27}\right)$	

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของเผือก</u> เราจะได้ว่า $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = (3x+5)(x-1)$ เนื่องจาก $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = 1$ หรือ $x = -\frac{5}{3}$ และเนื่องจาก $f(1) = 0$ และ $f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{194}{27}$ เราจึงได้ว่า จุดวกกลับของกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ คือ $(1,0)$ และ $\left(-\frac{5}{3},-\frac{194}{27}\right)$	

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของชิน</u> เนื่องจาก $$f(x)=x^3+x^2-5x+3$$ เราจะได้ว่า $$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2+2x-5 \\ &= x^2+\frac{2}{3}x-\frac{5}{3} \\ &= (x-1)\left(x+\frac{5}{3}\right) \end{aligned}$$ เนื่องจาก $f'(x)=0$ เมื่อ $x=1$ หรือ $x=-\frac{5}{3}$ และเนื่องจาก $f(1)=0$ และ $f\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{256}{27}$ เราจึงได้ว่า จุดวกกลับของกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ คือ $(1,0)$ และ $\left(-\frac{5}{3},\frac{256}{27}\right)$	

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของท่านขุน</u> เนื่องจาก $f(x)=x^3+x^2-5x+3$ เราจะได้ว่า $f(x)=0$ $x^3+x^2-5x+3=0$ $(x+3)(x-1)^2=0$ ดังนั้น $x=-3$ หรือ $x=1$ และเนื่องจาก $f(1)=0$ และ $f(-3)=0$ เราจึงได้ว่า จุดวกกลับของกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ คือ $(1,0)$ และ $(-3,0)$	

คำถามข้อที่ 5. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งของฟังก์ชัน $f(x)=x^3+x^2-5x+3$

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของคุณชายธราธร</u> เนื่องจาก $f(x)=x^3+x^2-5x+3$ เราจะได้ว่า $f(2)=2^3+2^2-5(2)+3=5$ ดังนั้น เราจะได้ว่า ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง เท่ากับ -5 เราจึงได้ว่า สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง คือ $y-5=-5(x-2)$ หรือ $y=-5x+15$	

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของคุณชายปวรรุจ</u> เนื่องจาก $f(x)=x^3+x^2-5x+3$ เราจะได้ว่า $f'(x)=3x^2+2x-5$ ดังนั้น เราจะได้ว่า ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งเท่ากับ $f'(2)=11$ เราจึงได้ว่า สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง คือ $y-11=11(x-2)$ หรือ $y=11x-11$	

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการ สอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของคุณชายพุฒิภัทร</u> เนื่องจาก $f(x)=x^3+x^2-5x+3$ เราจะได้ว่า $f(2)=2^3+2^2-5(2)+3=5$ ผมไปต่อไม่ได้แล้วครับ  = มืดแปดด้าน	
<u>วิธีทำของคุณชายรัชชานนท์</u> เนื่องจาก $f(x)=x^3+x^2-5x+3$ เราจะได้ว่า $f(2)=2^3+2^2-5(2)+3=5$ ดังนั้น เราจะได้ว่า ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง เท่ากับ 5 เราจึงได้ว่า สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง คือ $y-1=5(x-2)$ หรือ $y-1=5x-9$	

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของคุณชายรณพีร์</u> เนื่องจาก $$f(x)=x^3+x^2-5x+3$$ เราจะได้ว่า $$f'(x)=3x^2+2x-5$$ ดังนั้น เราจะได้ว่า ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งเท่ากับ $f'(2)=11$ เราจึงได้ว่า สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง คือ $$y-11=5(x-2)$$ หรือ $y-11=5x+1$	

แบบตรวจสอบความเข้าใจ เรื่อง แคลคูลัส

จงเขียน ✓ หน้าข้อความที่กล่าวถูกต้องและ ✗ หน้าข้อความที่กล่าวไม่ถูกต้อง

.....1.	ลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใกล้ a คือ ค่าของฟังก์ชัน f ณ ตำแหน่งที่ $x=a$
.....2.	เราสามารถใช้ ลิมิต ในการอธิบายว่า ค่าของฟังก์ชันเปลี่ยนแปลงไปอย่างไรเมื่อค่า x เปลี่ยนไปทีละนิด
.....3.	อนุพันธ์อันดับสองของสมการ $y=f(x)$ คือ $f''(x)$ หรือ $\frac{d^2y}{dx^2}$
.....4.	อนุพันธ์อันดับหนึ่งของสมการ $y=x^x$ คือ $x\cdot x^{x-1}$
.....5.	การหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน f จาก $x=a$ ถึง $x=b$ คือการคำนวณหาพื้นที่ใต้โค้งของของฟังก์ชัน f จาก $x=a$ ถึง $x=b$
.....6.	การหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน $\lvert f\rvert$ จาก $x=a$ ถึง $x=b$ คือการคำนวณหาพื้นที่ใต้โค้งของของฟังก์ชัน f จาก $x=a$ ถึง $x=b$

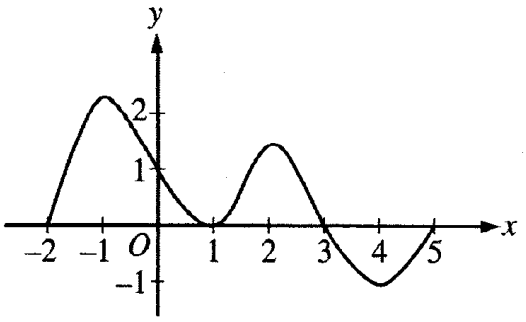
จงเขียนเฉพาะคำตอบ

7. กำหนดให้

ก. $f(x)=x\lvert x\rvert$ ข. $f(x)=\sec x$ ค. $f(x)=4x^5+7x^4-2556$

มีฟังก์ชันใดบ้างที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับจำนวนจริงทุกจำนวน

ตอบ.....



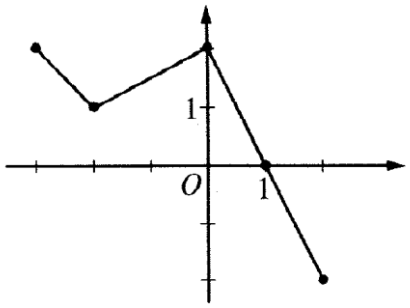
Graph of f'

8. จากกราฟของ f' ซึ่งเป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f บนช่วง $-2 \le x \le 5$ ดังที่แสดงในภาพข้างต้น อยากทราบว่า ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันลดบนช่วงใด

A. $[-2,1]$ เท่านั้น B. $[-2,3]$ C. $[3,5]$ เท่านั้น

D. $[0,1.5]$ และ $[3,5]$ E. $[-2,-1],[1,2]$ และ $[4,5]$

9. จากกราฟของฟังก์ชัน f ดังที่แสดงข้างล่างนี้ ถ้านิยามฟังก์ชัน $g(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt$ อยากทราบว่า ค่าฟังก์ชันที่จุดใดต่อไปนี้ ให้ค่าสูงที่สุด

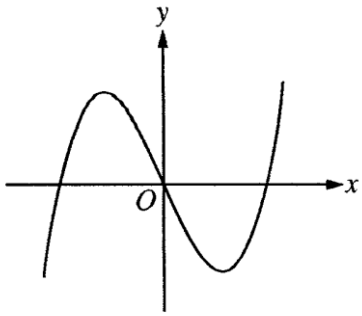


Graph of f

A. $g(-2)$ B. $g(-1)$ C. $g(0)$

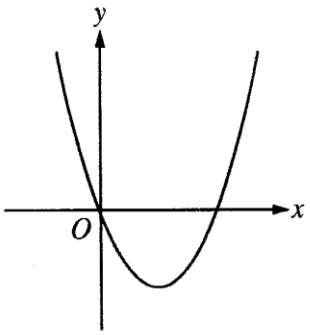
D. $g(1)$ E. $g(2)$

10. ภาพข้างล่างนี้เป็นกราฟของฟังก์ชัน f อยากทราบว่าข้อใดเป็นกราฟของอนุพันธ์ของ f' ซึ่งเป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f

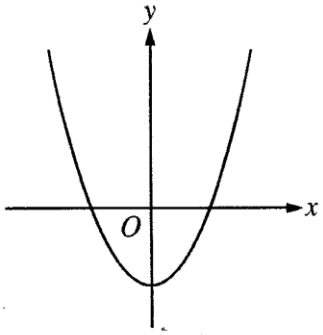


Graph of f

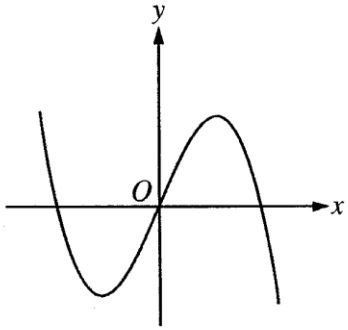
(A)



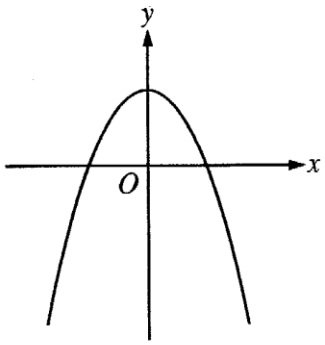
(B)



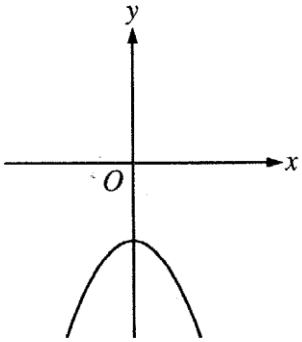
(C)



(D)



(E)



เอกสารสำหรับวิทยากร

เฉลยใบงานที่ 1 เรื่อง แคลคูลัส

จงเขียน ✓ หน้าข้อความที่กล่าวถูกต้องและ ✗ หน้าข้อความที่กล่าวไม่ถูกต้อง

.....✗.....1.	ลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใกล้ a คือ ค่าของฟังก์ชัน f ณ ตำแหน่งที่ $x=a$ (ลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใกล้ a ไม่จำเป็นต้องเท่ากับค่าฟังก์ชัน f ณ ตำแหน่งที่ $x=a$ เสมอไป)
....✗.....2.	$\lim_{x\to 1}\sqrt{x-1}$ หาค่าไม่ได้ เพราะลิมิตซ้ายมีค่าไม่เท่ากับลิมิตขวา (เนื่องจากโดเมนของฟังก์ชัน $f(x)=\sqrt{x-1}$ คือ $[1,\infty)$ และ 1 เป็นจุดปลายโดเมน ดังนั้น ในการหา $\lim_{x\to 1}\sqrt{x-1}$ เราสามารถหาลิมิตขวาเมื่อ x เข้าใกล้ 1 ของฟังก์ชันนี้ได้เลย)
.....✓.....3.	ลิมิตของฟังก์ชัน f ใด ๆ อาจจะหาค่าไม่ได้ ณ จุดใดจุดหนึ่งในโดเมนก็ได้
....✗.....4.	การหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน f จาก $x=a$ ถึง $x=b$ คือการคำนวณหาพื้นที่ใต้โค้งของของฟังก์ชัน f จาก $x=a$ ถึง $x=b$ (ประโยคนี้ไม่เป็นจริงเสมอไป เราจะเห็นว่าประโยคนี้จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่ให้ค่าเป็นจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ เท่านั้น)
.....✗.....5.	อนุพันธ์อันดับสองของสมการ $y=f(x)$ คือ $f''(x)$ หรือ $\frac{dy^2}{dx^2}$
...✗.....6.	$\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=f'(x)g'(x)$
....✗....7.	$f'\left(g(2)\right)=f'(2)g(2)$

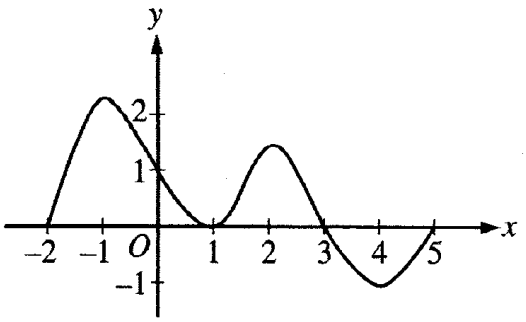
จงเขียนเฉพาะคำตอบ

8. กำหนดให้

ก. $f(x) = |x|$ ข. $f(x) = \tan x$ ค. $f(x) = 3x^2 + x - 7$

มีฟังก์ชันใดบ้างที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับจำนวนจริงทุกจำนวน

ตอบ ฟังก์ชันในข้อ ก. และ ค.



Graph of f'

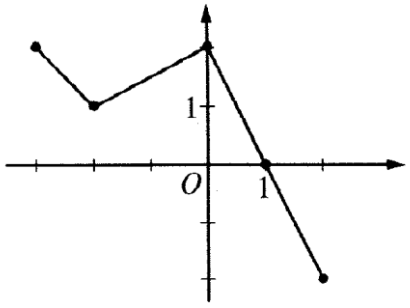
9. จากกราฟของ f' ซึ่งเป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f บนช่วง $-2 \le x \le 5$ ดังที่แสดงในภาพข้างต้น อยากทราบว่า ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันลดบนช่วงใด

A. $[-2,1]$ เท่านั้น B. $[-2,3]$ C. $[3,5]$ เท่านั้น

D. $[0,1.5]$ และ $[3,5]$ E. $[-2,-1],[1,2]$ และ $[4,5]$

ตอบ C. $[3,5]$ เท่านั้น

10. จากกราฟของฟังก์ชัน f ดังที่แสดงข้างล่างนี้ ถ้านิยามฟังก์ชัน $g(x)=\int_{-2}^{x} f(t)dt$ อยากทราบว่าค่าฟังก์ชันที่จุดใดต่อไปนี้ ให้ค่าสูงที่สุด



Graph of f

A. $g(-2)$ B. $g(-1)$

C. $g(0)$ D. $g(1)$

E. $g(2)$

ตอบ D. $g(1)$

เฉลยใบความรู้ที่ 2

เรื่อง ติดอาวุธครูคณิต พิชิตความเข้าใจคลาดเคลื่อน

ตารางกิจกรรม : จงวิเคราะห์วิธีการเขียนคำตอบของนักเรียน พร้อมทั้งทำการวิเคราะห์ความผิดพลาดที่พบในตารางต่อไปนี้

คำถามข้อที่ 1. จงแสดงว่า ถ้า $f(x)=-x^2$ แล้ว $f'(x)=-2x$ โดยใช้นิยามของการหาอนุพันธ์

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนคือ
<u>วิธีทำของณเดช</u> ควรเป็น $f(x+h)$ $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-f(x)}{h}$ $=\lim_{h\to 0}\frac{-(x+h)^2-(-x^2)}{h}$ $=\lim_{h\to 0}\frac{-2xh-h^2}{h}$ $=\lim_{h\to 0}\frac{h(-2x-h)}{h}=-2x$	นักเรียนบางคนอาจจะเลินเล่อจนไม่ได้ใส่ใจกับรายละเอียดเรื่องความสมบูรณ์แบบของการเขียนสัญลักษณ์ แต่ถึงอย่างไรก็ตาม นี่ไม่ถือว่าเป็นความผิดพลาดรุนแรง

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนคือ
<u>วิธีทำของญาญ่า</u> $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $=\lim_{h\to}\frac{-(x+h)^2-(-x^2)}{h}$ $=\lim_{h\to}\frac{-2xh-h^2}{h}$ $=\lim_{h\to}\frac{h(-2x-h)}{h}=-2x$ ควรเป็น $h\to 0$	ญาญ่าอาจจะลืมเขียน 0 ใต้เครื่องหมายลิมิต แม้จุดนี่จะเป็นสิ่งที่ผิดพลาดของนักเรียน แต่เราก็สามารถแนะนำญาญ่าได้ว่าให้ระวังตรงจุดเล็กจุดน้อยเช่นนี้
<u>วิธีทำของโตโน่</u> $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^2-(-x^2)}{h}$ $=\lim_{h\to 0}\frac{-2x^2+4xh-2h^2+x^2}{h}$ $=\lim_{h\to 0}\frac{4xh-2h^2}{h}$ $=\lim_{h\to 0}\frac{h(4x-2h)}{h}=4x$	ในที่นี้ โตโน่ เข้าใจผิดคิดว่า $f(x+h)=2(x+h)^2$ ซึ่งเป็นความผิดพลาดเกี่ยวกับมโนทัศน์ในเรื่องฟังก์ชัน มากไปกว่านั้นเขายังเข้าใจผิดอีกว่า $-2x^2+x^2=0$ เนื่องจากมันจะทำให้โตโน่สามารถทำการแยกตัวประกอบของเศษแล้วทำการตัดทอนเศษส่วน และสามารถหาค่าลิมิตได้สะดวกขึ้น

คำถามข้อที่ 2. จงหาอนุพันธ์ของ $y=\left(x^3+1\right)\left(x^2-2\right)$ เทียบกับ x

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของหนูดี</u> $\frac{dy}{dx}=\left(x^3+1\right)\left(x^2-2\right)$ $=\left(x^3+1\right)(2x)+\left(x^2-2\right)\left(3x^2\right)$	หากดูเผิน ๆ เหมือนหนูดีจะทำถูก แต่หากสังเกตดี ๆ จะพบว่านักเรียนคนนี้เขียนผิดตั้งแต่บรรทัดแรก ซึ่งจริง ๆ แล้วควรจะเป็น $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^3+1\right)\left(x^2-2\right)$ $=\left(x^3+1\right)(2x)+\left(x^2-2\right)\left(3x^2\right)$ อีกทั้งความหมายของพจน์ทางขวามือและ ทางซ้ายมือไม่ได้หมายถึงของอย่างเดียวกัน ที่หนูดีเขียนแบบนี้เป็นเพราะไม่มีโอกาสฝึกฝนเรื่องการเขียนด้วยตนเอง จึงไม่นับเป็นความผิดพลาดร้ายแรงเท่าไร

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของแบมบี้</u> $\frac{dy}{dx}=\left(x^3+1\right)\left(2x\right)+\left(x^2-2\right)\left(3x^2\right)$ $=0$???????	จากประสบการณ์ตรง พบว่ามีนักเรียนหลายคนสับสน หาที่จบไม่ได้ว่าควรสรุปอย่างไรทั้ง ๆ ที่ตนเองสามารถหาอนุพันธ์ได้อย่างถูกต้องแล้ว ในที่นี้แบมบี้ก็เป็นหนึ่งในนั้น นับว่าเป็นมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการถ่ายทอด เพราะผลสุดท้ายจะกลายเป็นว่า แบมบี้ต้องการหาจุดวกกลับของกราฟนั่นเอง ซึ่งไม่ใช่วัตถุประสงค์หลัก
<u>วิธีทำของพลอย</u> $\frac{dy}{dx}=\left(3x^2\right)\left(2x\right)$	นักเรียนหลายคนที่เรียนหัวข้อการหาอนุพันธ์ มักจะเข้าใจผิดเช่นเดียวกันกับพลอย ว่าการหาอนุพันธ์ของการคูณกันของสองฟังก์ชัน ก็คือการหาอนุพันธ์ของแต่ละฟังก์ชันแล้วนำมาคูณกัน จัดว่าเป็นความเข้าใจในหลักการที่ผิดพลาด

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของคุณลำไย</u> ทำการกระจายเทอมในวงเล็บจะทำให้เราได้ว่า $y = (x^3+1)(x^2-2)$ $= x^5 - 2x^3 + x^2 - 2$ $= x^7 - 2x^3 - 2$ เราจึงได้ว่า $\frac{dy}{dx} = 7x^6 - 6x$	นักเรียนบางคนมีปัญหาว่า $x^5 + x^2$ จะต้องเอาเลขชี้กำลังมาบวกกัน หรือคูณกัน หรือไม่ต้องยุบรวมกันเลย แม้ไม่ใช่ปัญหาที่เกี่ยวข้องโดยตรงกับเนื้อหาแคลคูลัส แต่นั่นก็หมายความว่านักเรียนกลุ่มที่คิดเช่นนี้ จำเป็นต้องได้รับการทบทวนหลักการคำนวณเบื้องต้นเกี่ยวกับการบวกลบพหุนาม
<u>วิธีทำของคุณลำยอง</u> ทำการกระจายเทอมในวงเล็บจะทำให้เราได้ว่า $\frac{dy}{dx} = (x^3+1)(x^2-2)$ $= x^5 - 2x^3 + x^2 - 2$ $= 5x^4 - 6x^2 + 2x$	ปัญหาเดียวกันกับหนูดี กล่าวคือ มีความเข้าใจเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ที่ถูกต้องแต่พลาดตรงที่การเขียนสัญลักษณ์ที่ไม่สมบูรณ์

คำถามข้อที่ 3. จงหาอนุพันธ์ของ $y=\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}}$ เทียบกับ x

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของแก้ม</u> $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-4}{x^{\frac{1}{2}}}\right)$ $=\dfrac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}$ $=1$	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของแก้ม คือความเข้าใจผิดคิดว่าการหาอนุพันธ์ของการหารกันของสองฟังก์ชัน ก็คือการหาอนุพันธ์ของแต่ละฟังก์ชันแล้วนำมาหารกัน จัดว่าเป็นความเข้าใจในหลักการที่ผิดพลาด
<u>วิธีทำของปองศักดิ์</u> $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2}\right)$ $=\dfrac{d}{dx}\left(1-4x^{-2}\right)$ $=8x^{-3}$	ในตัวอย่างนี้ สังเกตดูดี ๆ ว่าสิ่งที่ปองศักดิ์ทำ คือความเข้าใจว่า $\sqrt{x}=x^2$ ซึ่งเป็นความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนแบบที่แสดงถึงความสับสนในส่วนของพีชคณิต

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของไอซ์</u> ทำการยกกำลังสองทั้งเศษและส่วนจะได้ว่า $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x-16}{x}\right)$ $=\frac{d}{dx}\left(1-\frac{16}{x}\right)$ $=\frac{d}{dx}\left(1-x^{-16}\right)$ $=16x^{-17}$	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของไอซ์ คือความเข้าใจผิดว่าการหาอนุพันธ์ของการหารกันของสองฟังก์ชันที่มีกรณฑ์ เราจะสามารถกำจัดกรณฑ์ไปก่อนด้วยวิธีการยกกำลังสองแล้วจึงทำการหาอนุพันธ์ได้ จัดว่าเป็นความเข้าใจในหลักการที่ผิดพลาด
<u>วิธีทำของเทย่า</u> $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-4}{x^{\frac{1}{2}}}\right)$ $=x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}-4\right)-\left(x^{\frac{1}{2}}-4\right)\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)$ ไม่มี ล่างยกกำลังสอง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของเทย่า คือความเข้าใจผิด (หรืออาจจะเป็นความสะเพร่า) จึงทำให้การหาอนุพันธ์ของการหารกันของสองฟังก์ชันในครั้งนี้ ไม่เกิดพจน์กำลังสองของตัวส่วนแต่อย่างใด จัดเป็นการใช้สูตรที่ไม่ถูกต้อง

คำถามข้อที่ 4. จงหาจุดวกกลับของกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x^3+x^2-5x+3$

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของพ่อมาก</u> เราจะได้ว่า $f'(x)=3x^2+2x-5$ เนื่องจาก $f'(x)=0$ เมื่อ $x=1$ หรือ $x=2$ และเนื่องจาก $f(1)=-6$ และ $f(2)=-18$ เราจึงได้ว่า จุดวกกลับของกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ คือ $(1,-6)$ และ $(2,-18)$	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของพ่อมาก คือ พ่อมากหาจุดวิกฤติผิด แต่หลังจากขั้นตอนการหาจุดวิกฤติได้แล้วนั้น พ่อมากทำการคำนวณโดยใช้หลักการอย่างถูกต้อง จึงนับว่าเป็นความผิดพลาดในเรื่องการคำนวณเท่านั้น
<u>วิธีทำของนาค</u> เราจะได้ว่า $f'(x)=3x^2+2x-5=(3x+5)(x-1)$ เนื่องจาก $f'(x)=0$ เมื่อ $x=1$ หรือ $x=\frac{5}{3}$ และเนื่องจาก $f(1)=0$ และ $f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{56}{27}$ เราจึงได้ว่า จุดวกกลับของกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ คือ $(1,0)$ และ $\left(\frac{5}{3},\frac{56}{27}\right)$	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของนาค คือ ถึงแม้ว่านาคจะหาสมการความชันและแยกตัวประกอบอย่างถูกต้อง แต่จุดวิกฤติที่นาคหาได้ก็ยังผิดอยู่ แต่หลังจากขั้นตอนการหาจุดวิกฤติได้แล้วนั้น นาคก็ยังทำการคำนวณโดยใช้หลักการอย่างถูกต้องอยู่ จึงนับว่าเป็นความผิดพลาดในเรื่องการคำนวณเท่านั้น

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของเผือก</u> เราจะได้ว่า $f'(x)=3x^2+2x-5=(3x+5)(x-1)$ เนื่องจาก $f'(x)=0$ เมื่อ $x=1$ หรือ $x=-\frac{5}{3}$ และเนื่องจาก $f(1)=0$ และ $f\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{194}{27}$ เราจึงได้ว่า จุดวกกลับของกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ คือ $(1,0)$ และ $\left(-\frac{5}{3},-\frac{194}{27}\right)$	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของเผือก คือ ถึงแม้ว่าเผือกจะหาสมการความชันและหาจุดวิกฤติได้อย่างถูกต้อง แต่เผือกคำนวณค่าของ $f\left(-\frac{5}{3}\right)$ ไม่ถูกต้อง

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของชิน</u> เนื่องจาก $f(x)=x^3+x^2-5x+3$ เราจะได้ว่า $f'(x)=3x^2+2x-5$ $=x^2+\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ $=(x-1)\left(x+\frac{5}{3}\right)$ เนื่องจาก $f'(x)=0$ เมื่อ $x=1$ หรือ $x=-\frac{5}{3}$ และเนื่องจาก $f(1)=0$ และ $f\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{256}{27}$ เราจึงได้ว่า จุดวกกลับของกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ คือ $(1,0)$ และ $\left(-\frac{5}{3},\frac{256}{27}\right)$	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของชิน คือ เขาเข้าใจว่าทุกครั้งก่อนที่จะหาจุดวิกฤติ จะต้องทำให้ฟังก์ชันมีสัมประสิทธิ์เท่ากับ 1 เสียก่อน

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของท่านขุน</u> เนื่องจาก $f(x)=x^3+x^2-5x+3$ เราจะได้ว่า $f(x)=0$ $x^3+x^2-5x+3=0$ $(x+3)(x-1)^2=0$ ดังนั้น $x=-3$ หรือ $x=1$ และเนื่องจาก $f(1)=0$ และ $f(-3)=0$ เราจึงได้ว่า จุดวกกลับของกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ คือ $(1,0)$ และ $(-3,0)$	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของท่านขุน นับว่าเป็นความเข้าใจผิดที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาแคลคูลัสโดยตรง กล่าวคือ ท่านขุนสับสนในตัวเนื้อหา ทำให้เข้าใจว่า การหาจุดวกกลับ คือการหาจุดตัดแกน X

คำถามข้อที่ 5. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งของฟังก์ชัน $f(x)=x^3+x^2-5x+3$

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของคุณชายธราธร</u> เนื่องจาก $f(x)=x^3+x^2-5x+3$ เราจะได้ว่า $f(2)=2^3+2^2-5(2)+3=5$ ดังนั้น เราจะได้ว่า ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง เท่ากับ -5 เราจึงได้ว่า สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง คือ $y-5=-5(x-2)$ หรือ $y=-5x+15$	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของคุณชายธราธร คือ เขาคิดว่า ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งมีค่าเท่ากับ จำนวนตรงข้ามของค่าฟังก์ชัน ณ จุดที่เราต้องการหาความความชัน

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของคุณชายปวรรุจ</u> เนื่องจาก $f(x)=x^3+x^2-5x+3$ เราจะได้ว่า $f'(x)=3x^2+2x-5$ ดังนั้น เราจะได้ว่า ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งเท่ากับ $f'(2)=11$ เราจึงได้ว่า สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง คือ $y-11=11(x-2)$ หรือ $y=11x-11$	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของคุณชายปวรรุจ คือ เขาคิดว่าค่า y ที่ใช้ในการคำนวณหาเส้นสัมผัสเส้นโค้งมีค่าเท่ากับ ค่าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งของฟังก์ชัน ณ จุดที่เราต้องการหาความความชัน

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของคุณชายพุฒิภัทร</u> เนื่องจาก $f(x)=x^3+x^2-5x+3$ เราจะได้ว่า $f(2)=2^3+2^2-5(2)+3=5$ ผมไปต่อไม่ได้แล้วครับ  = มืดแปดด้าน	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของคุณชายพุฒิภัทร คือ เขารู้เพียงว่าจะหา $f(2)$ อย่างไร แต่ไม่รู้ว่าจะทำต่ออย่างไร
<u>วิธีทำของคุณชายรัชชานนท์</u> เนื่องจาก $f(x)=x^3+x^2-5x+3$ เราจะได้ว่า $f(2)=2^3+2^2-5(2)+3=5$ ดังนั้น เราจะได้ว่า ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง เท่ากับ 5 เราจึงได้ว่า สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง คือ $y-1=5(x-2)$ หรือ $y-1=5x-9$	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของคุณชายรัชชานนท์ คือ เขาเกิดความสับสนว่า ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งมีค่าเท่ากับ ค่าของฟังก์ชัน ณ จุดที่เราต้องการหาความความชัน และค่า y ที่ใช้ในการคำนวณหาเส้นสัมผัสเส้นโค้งมีค่าเท่ากับ 1 ซึ่งเป็นตัวเลขที่ไม่มีที่มาที่ไปในวิธีทำเลย

ตัวอย่างการเขียนแสดงวิธีทำของนักเรียนในการสอบปลายภาคเพื่อวัดความรู้ในหัวข้อแคลคูลัสครั้งหนึ่ง	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน คือ
<u>วิธีทำของคุณชายรณพีร์</u> เนื่องจาก $f(x)=x^3+x^2-5x+3$ เราจะได้ว่า $f'(x)=3x^2+2x-5$ ดังนั้น เราจะได้ว่า ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งเท่ากับ $f'(2)=11$ เราจึงได้ว่า สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง คือ $y-11=5(x-2)$ หรือ $y-11=5x+1$	ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของคุณชายรณพีร์ คือ ในการคำนวณหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งนั้น เขาแทนค่าสลับกันระหว่างค่าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งและค่า y

เฉลยแบบตรวจสอบความเข้าใจ เรื่อง แคลคูลัส

จงเขียน ✓ หน้าข้อความที่กล่าวถูกต้องและ ✗ หน้าข้อความที่กล่าวไม่ถูกต้อง

.....✗.....1.	ลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใกล้ a คือ ค่าของฟังก์ชัน f ณ ตำแหน่งที่ $x=a$
.....✗.....2.	เราสามารถใช้ ลิมิต ในการอธิบายว่า ค่าของฟังก์ชันเปลี่ยนแปลงไปอย่างไรเมื่อค่า x เปลี่ยนไปทีละนิด
.....✓.....3.	อนุพันธ์อันดับสองของสมการ $y=f(x)$ คือ $f''(x)$ หรือ $\frac{d^2y}{dx^2}$
.....✗.....4.	อนุพันธ์อันดับหนึ่งของสมการ $y=x^x$ คือ $x\cdot x^{x-1}$
.....✗.....5.	การหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน f จาก $x=a$ ถึง $x=b$ คือการคำนวณหาพื้นที่ใต้โค้งของของฟังก์ชัน f จาก $x=a$ ถึง $x=b$
.....✗.....6.	การหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน $\lvert f \rvert$ จาก $x=a$ ถึง $x=b$ คือการคำนวณหาพื้นที่ใต้โค้งของของฟังก์ชัน f จาก $x=a$ ถึง $x=b$

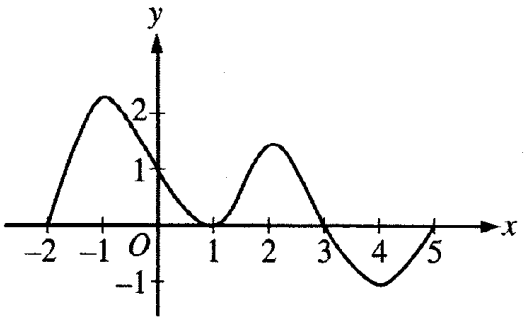
จงเขียนเฉพาะคำตอบ

7. กำหนดให้

ก. $f(x)=x\lvert x\rvert$ ข. $f(x)=\sec x$ ค. $f(x)=4x^5+7x^4-2556$

มีฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับจำนวนจริงทุกจำนวน

ตอบ ฟังก์ชันใน ก และ ค



Graph of f'

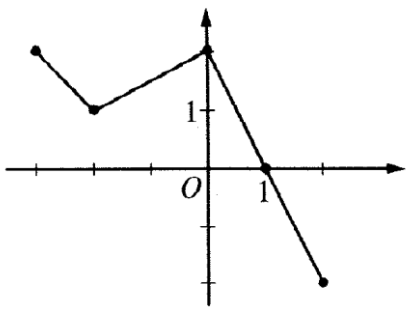
8. จากกราฟของ f' ซึ่งเป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f บนช่วง $-2 \le x \le 5$ ดังที่แสดงในภาพข้างต้น อยากทราบว่า ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันลดบนช่วงใด

A. $[-2,1]$ เท่านั้น B. $[-2,3]$ C. $[3,5]$ เท่านั้น

D. $[0,1.5]$ และ $[3,5]$ E. $[-2,-1],[1,2]$ และ $[4,5]$

ตอบ C. $[3,5]$ เท่านั้น

9. จากกราฟของฟังก์ชัน f ดังที่แสดงข้างล่างนี้ ถ้านิยามฟังก์ชัน $g(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt$ อยากทราบว่าค่าฟังก์ชันที่จุดใดต่อไปนี้ ให้ค่าสูงที่สุด



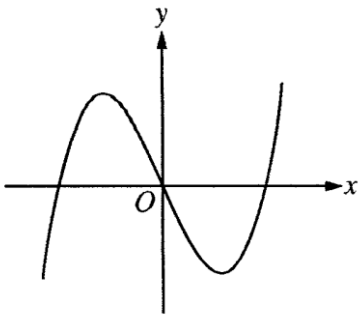
Graph of f

A. $g(-2)$ B. $g(-1)$ C. $g(0)$

D. $g(1)$ E. $g(2)$

ตอบ D. $g(1)$

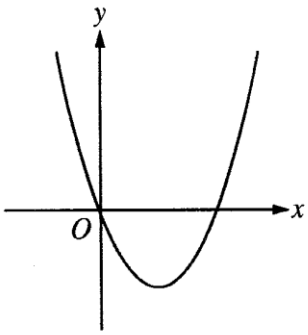
10. ภาพข้างล่างนี้เป็นกราฟของฟังก์ชัน f อยากทราบว่าข้อใดเป็นกราฟของอนุพันธ์ของ f' ซึ่งเป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f



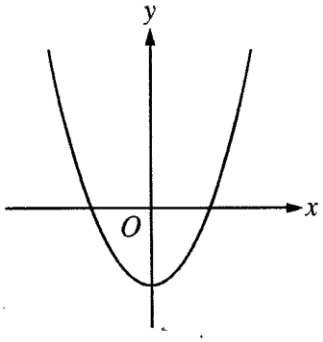
Graph of f

ตอบ ข้อ B

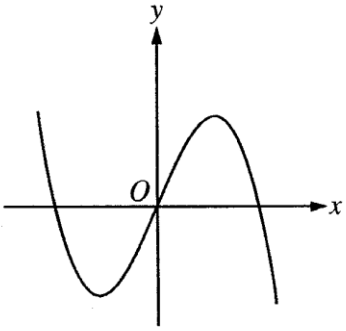
(A)



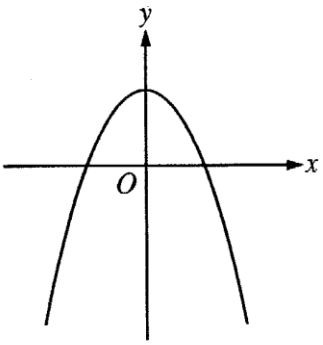
(B)



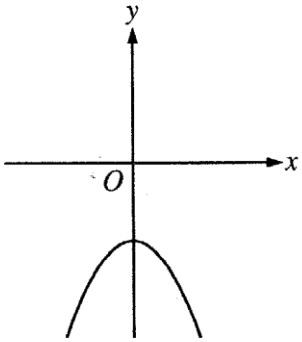
(C)



(D)



(E)



แบบกรอกคะแนน เรื่อง แคลคูลัส

เลขที่	ชื่อ-สกุล	การมีส่วนร่วมในกิจกรรม (5 คะแนน)	การสรุปองค์ความรู้ (5 คะแนน)	รวม (10 คะแนน)
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				

ลงชื่อ.....วิทยากร

วัน/เดือน/ปี.....

แบบประเมินการมีส่วนร่วมในกิจกรรม

คำชี้แจง : ให้เขียนเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องตามความเห็นของท่านที่ตรงกับความเป็นจริงมากที่สุด

ที่	ชื่อ-สกุล	ความร่วมมือในกิจกรรม	ความรับผิดชอบ	การเสนอความคิดเห็น	ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	การเป็นผู้นำหรือผู้ตามที่ดี	การตรงเวลา	รวม (5 คะแนน)
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								

ลงชื่อ.....วิทยากร

วันที่ประเมิน.....

เรื่อง ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์
เน้นโครงงานคณิตศาสตร์

แผนการอบรม

แผนการอบรมครูคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สำหรับครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่

เรื่อง ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เน้นโครงงานคณิตศาสตร์

เวลา 4 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์ เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรม

1. มีความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับขอบข่าย เนื้อหาสาระสำคัญของ เรื่อง โครงงานคณิตศาสตร์
2. มีความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับ ความเข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับ เรื่อง โครงงานคณิตศาสตร์
3. สามารถออกแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้และได้แนวทางการจัดการเรียนรู้ เรื่อง โครงงานคณิตศาสตร์

สาระการเรียนรู้

1. ความหมาย และประเภทของโครงงานคณิตศาสตร์
2. ขั้นตอนในการทำโครงงานคณิตศาสตร์
3. การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กิจกรรมโครงงานคณิตศาสตร์
4. การประเมินโครงงานคณิตศาสตร์
5. กิจกรรมส่งเสริมการทำโครงงานคณิตศาสตร์

สาระสำคัญ

1. โครงงานคณิตศาสตร์ เป็นกิจกรรมที่ส่งเสริมการเรียนรู้สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เปิดโอกาสให้นักเรียนได้สืบเสาะแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง ตามความถนัด ความสนใจ และตามศักยภาพ ด้วยการเชื่อมโยงความรู้สาระที่เกี่ยวข้องกับประเด็นปัญหาที่สนใจ โดยใช้กระบวนการทางวิทยาศาสตร์ การแบ่งประเภทของโครงงานขึ้นอยู่กับเกณฑ์ที่ใช้ในการแบ่ง
2. ขั้นตอนที่สำคัญของการทำโครงงานคณิตศาสตร์ประกอบด้วย การเลือกหัวข้อเรื่องของโครงงาน การกำหนดจุดประสงค์ของโครงงาน การศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้อง การวางแผนการทำโครงงาน การปฏิบัติงานตามแผน การเขียนรายงานโครงงาน และการนำเสนอโครงงาน
3. การจัดการเรียนรู้โดยใช้กิจกรรมโครงงานทำได้โดยสอดแทรกการทำโครงงานเข้าไปเป็นส่วนหนึ่งของบทเรียน เริ่มต้นด้วยการแนะนำและให้นักเรียนได้ลงมือทำโครงงานอย่างง่ายที่มีองค์ประกอบน้อย ๆ ที่สอดรับกับกิจกรรมการเรียนรู้ แล้วค่อย ๆ เพิ่มองค์ประกอบของโครงงานให้มากขึ้นในลักษณะค่อยเป็นค่อยไปจนกระทั่งมีความสมบูรณ์ตามรูปแบบของการเขียนรายงานการจัดทำโครงงาน

4. การประเมินโครงงานคณิตศาสตร์ พิจารณาได้จากกระบวนการจัดทำโครงงาน และผลสัมฤทธิ์ของโครงงาน สามารถใช้การประเมินผลรวมและการประเมินโดยใช้การวิเคราะห์ ตามเกณฑ์ที่กำหนด
5. ในการจัดการเรียนรู้สามารถสอดแทรกกิจกรรมส่งเสริมการทำโครงงานได้แก่ การใช้กิจกรรมฝึกทักษะ การทำแบบฝึกหัด การใช้ใบกิจกรรม การสรุปสาระสำคัญของบทเรียนในรูปโครงงาน การขยายฐานความรู้จากบทเรียน การนำคณิตศาสตร์ไปอธิบายสิ่งต่าง ๆ รอบตัว การประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์ รวมทั้งการศึกษาจากแหล่งการเรียนรู้ต่าง ๆ

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน/ ยาก

1. โครงงานคณิตศาสตร์ ต้องมีสมมติฐาน

ที่ถูกต้องคือ โครงงานคณิตศาสตร์ประเภททดลอง ต้องมีการจัดกระทำ และศึกษาผลที่เกิดขึ้น ดังนั้นต้องมีการกำหนดสมมติฐานเพื่อคาดเดาผลที่เกิดขึ้น สำหรับโครงงานประเภทอื่น ๆ อาจมีการกำหนดสมมติฐานหรือไม่ก็ได้

2. การจัดกิจกรรมให้นักเรียนเริ่มต้นเรียนรู้และทำโครงงานคณิตศาสตร์ มักสอนในเชิงทฤษฎีก่อน เช่น ความหมาย ประเภทของโครงงานคณิตศาสตร์ ขั้นตอนในการทำโครงงานคณิตศาสตร์ การประเมินโครงงานคณิตศาสตร์ แล้วจึงให้นักเรียนลงมือทำโครงงานคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นเรื่องยากสำหรับนักเรียน อาจทำให้ไม่ประสบความสำเร็จ นักเรียนไม่สามารถทำโครงงานได้

แนวทางหนึ่งในการจัดกิจกรรมคือให้นักเรียนเรียนรู้โครงงานอย่างง่ายที่สอดคล้องกับบทเรียนด้วยการลงมือปฏิบัติ เรียนรู้โครงงานจากเค้าโครงของโครงงานที่กำหนดให้ก่อนโดยมีส่วนร่วมในการทำโครงงานนั้นให้สมบูรณ์ จากนั้นจึงให้นักเรียนทำโครงงานคณิตศาสตร์ตามความสนใจ โดยอาศัยขั้นตอนของการทำโครงงาน

สื่อและแหล่งการเรียนรู้

1. สำหรับผู้เข้ารับการอบรม

1.1 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1: ใบความรู้ที่ 1 เรื่อง แนวคิดของโครงงานคณิตศาสตร์

1.2 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 2: ใบความรู้ที่ 2 เรื่อง การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กิจกรรมโครงงาน

1.3 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 3: ใบความรู้ที่ 3 เรื่อง การประเมินโครงงานคณิตศาสตร์

1.4 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 4: ใบความรู้ที่ 4 เรื่อง กิจกรรมส่งเสริมการทำโครงงาน และแหล่งที่มาของโครงงาน

1.5 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 5: ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง การฝึกทำโครงงานอย่างง่าย

1.6 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 6: ใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง จากโครงงานอย่างง่ายสู่โครงงานเต็มรูป

1.7 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 7: ใบกิจกรรมที่ 3 เรื่อง การฝึกทำโครงงานจากเค้าโครงของโครงงาน

2. สำหรับวิทยากร

2.1 เอกสารสำหรับวิทยากร 1: แบบบันทึกผลการประเมิน เรื่อง ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

2.2 เอกสารสำหรับวิทยากร 2: แบบประเมินการนำเสนอผลงาน

2.3 ตัวอย่างโครงงานคณิตศาสตร์

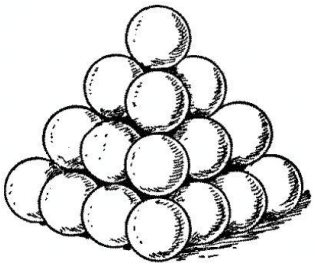
การประเมินผล

รายการประเมิน	**เกณฑ์การให้คะแนน (คะแนนเต็ม 17 คะแนน)**	**เครื่องมือ**
1. ชิ้นงาน พิจารณาจาก ข้อ 1.1 – 1.2 1.1 ความสำเร็จของการปฏิบัติงาน 1.2 คุณภาพของผลงาน	**คะแนนเต็ม 2 คะแนน โดย** ได้ 2 คะแนน เมื่อปฏิบัติงานสำเร็จและมีคุณภาพ ได้ 1 คะแนน เมื่อปฏิบัติงานสำเร็จแต่มีคุณภาพไม่สมบูรณ์ ได้ 0 คะแนน เมื่อปฏิบัติงานไม่สำเร็จ	- แบบบันทึกผลการประเมิน เรื่อง ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์
2. การนำเสนอผลงานกลุ่ม พิจารณาจาก 2.1 - 2.6 ดังนี้ 2.1 ความครอบคลุมเนื้อหา 2.2 ความถูกต้องตรงประเด็น 2.3 การเสนอความคิดเห็น 2.4 แนวทางประยุกต์สู่การปฏิบัติ 2.5 การเป็นผู้นำหรือผู้ตามที่ดี 2.6 การตรงเวลา	**คะแนนเต็ม 15 คะแนน โดย** ได้ 15 คะแนน เมื่อมีครบ 6 ข้อ ได้ 14 คะแนน เมื่อมีครบ 5 ข้อ ได้ 13 คะแนน เมื่อมีครบ 4 ข้อ ได้ 12 คะแนน เมื่อมีครบ 3 ข้อ ได้ 11 คะแนน เมื่อมีครบ 2 ข้อ ได้ 10 คะแนน เมื่อมี 1 ข้อ ได้ 0 คะแนน เมื่อไม่มีทั้ง 6 ข้อ	- แบบประเมินการนำเสนอผลงาน

แนวทางปฏิบัติสำหรับวิทยากร

1. ศึกษาเอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม เอกสารสำหรับวิทยากรและสื่อประกอบการอบรม โดยละเอียด
2. จัดเตรียมทำสำเนาเอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรมตามจำนวนผู้เข้ารับการอบรม
3. วิทยากรอาจใช้ PowerPoint ประกอบการบรรยายหรือการสรุปเนื้อหาการอบรม

แนวทางการจัดกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
ขั้นนำ 1. วิทยากรนำเสนอกิจกรรมที่ผู้เรียนคุ้นเคย หรือสิ่งที่อยู่รอบตัวที่สามารถนำไปสู่การศึกษาให้ลุ่มลึก และสามารถจัดทำเป็นโครงงานคณิตศาสตร์ได้ เช่น การกองสิ่งของเป็นชั้น ๆ อย่างมีแบบแผน นำไปสู่การหารูปทั่วไปของจำนวนสิ่งของในแต่ละชั้น และจำนวนสิ่งของทั้งหมดในกอง การนำรูปเรขาคณิตสองมิติมาประกอบกันเป็นรูปเรขาคณิตสามมิติ (10 นาที)  	- ภาพการกองสิ่งของเป็นชั้น ๆ อย่างมีแบบแผน - รูปเรขาคณิตสามมิติ	

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
ขั้นดำเนินกิจกรรม 1. วิทยากรอธิบาย ความหมายและประเภทของโครงงานคณิตศาสตร์ ขั้นตอนในการทำโครงงานคณิตศาสตร์ โดยยกตัวอย่างประกอบ และให้ผู้เข้ารับการอบรมศึกษาเอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรมในใบความรู้ที่ 1 เรื่อง แนวคิดของโครงงานคณิตศาสตร์ เพิ่มเติม (20 นาที)	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1: ใบความรู้ที่ 1 เรื่อง แนวคิดของโครงงานคณิตศาสตร์	
2. วิทยากรแนะนำ “การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กิจกรรมโครงงานคณิตศาสตร์” และกล่าวถึงความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับองค์ประกอบของโครงงานคณิตศาสตร์ และการสอนโครงงานคณิตศาสตร์กับผู้เรียนโดยใช้ใบความรู้ที่ 2 เรื่อง การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กิจกรรมโครงงาน (20 นาที)	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 2 : ใบความรู้ที่ 2 เรื่องการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยใช้กิจกรรมโครงงาน	
3. วิทยากรแนะนำ “โครงงานอย่างง่าย” แบ่งกลุ่มผู้เข้ารับการอบรมเป็นกลุ่มละ 4 – 6 คน แต่ละกลุ่มฝึกสร้างโครงงานอย่างง่ายโดยใช้ ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง การฝึกทำโครงงานอย่างง่าย จากนั้นให้นำเสนอหน้าห้องประชุมวิทยากรสรุปและให้ข้อเสนอแนะ (60 นาที)	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 5: ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง การฝึกทำโครงงานอย่างง่าย	- ประเมินจากผลการทำโครงงานอย่างง่าย
4. วิทยากรแนะนำการขยายแนวคิดของโครงงานอย่างง่ายไปสู่โครงงานเต็มรูปตามใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง จากโครงงานอย่างสู่โครงงานเต็มรูป โดยเริ่มจากการให้ผู้เข้ารับการอบรมค้นหาลักษณะเฉพาะร่วมกันของจำนวนนับที่มีตัวประกอบ 2 ตัว จากนั้นแบ่งกลุ่มผู้เข้ารับการอบรมทั้งหมดเป็น 3 กลุ่มใหญ่ ให้แต่ละกลุ่มค้นหาสมบัติของจำนวนนับที่มีจำนวนตัวประกอบเท่ากับ 3 4 หรือ 5 ตัวอย่างละ 1 ประเด็น โดยให้บันทึกลงในใบกิจกรรมที่ 2 จากโครงงานอย่างง่ายสู่โครงงานเต็มรูปและร่วมกันทำโครงงานในใบกิจกรรมให้สมบูรณ์จากนั้นวิทยากรสรุป (20 นาที)	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 6: ใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง จากโครงงานอย่างง่ายสู่โครงงานเต็มรูป	

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
5. วิทยากรแนะนำเค้าโครงของโครงงานคณิตศาสตร์ โดยให้ผู้เข้ารับการอบรมศึกษาและมีส่วนร่วมในการทำให้เป็นโครงงานที่สมบูรณ์ โดยใช้ ใบกิจกรรมที่ 3 เรื่อง การฝึกทำโครงงานจากเค้าโครงของโครงงานโดยให้แต่ละกลุ่มเลือกเพียง 1 เรื่อง เท่านั้น (30 นาที) 6. วิทยากรแนะนำ การประเมินโครงงานคณิตศาสตร์ และให้ผู้เข้ารับการอบรมศึกษาเอกสารในใบความรู้ที่ 3 เรื่อง ประเมินโครงงานคณิตศาสตร์ (10 นาที) 7. วิทยากรสุ่มเลือกผู้เข้าการอบรมบางกลุ่มให้นำเสนอผลการดำเนินตามใบกิจกรรมที่ 3 เรื่อง การฝึกทำโครงงานจากเค้าโครงของโครงงาน และให้ผู้เข้ารับการอบรมกลุ่มอื่น ๆ ฝึกประเมินโครงงาน (20 นาที) 8. วิทยากรแนะนำใบความรู้ที่ 4 เรื่อง กิจกรรมส่งเสริมการทำโครงงานและแหล่งที่มาของโครงงาน พร้อมแสดงตัวอย่างประกอบ จากนั้นสรุปกิจกรรมโครงงานคณิตศาสตร์ (30 นาที)	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 7: ใบกิจกรรมที่ 3 เรื่อง การฝึกทำโครงงานจากเค้าโครงของโครงงาน - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 3: ใบความรู้ที่ 3 เรื่อง การประเมินโครงงานคณิตศาสตร์ - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 4: ใบความรู้ที่ 4 เรื่อง กิจกรรมส่งเสริมการทำโครงงาน และแหล่งที่มาของโครงงาน	- ประเมินจากการทำโครงงานจากเค้าโครง

เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม

ใบความรู้ที่ 1 เรื่อง แนวคิดของโครงงานคณิตศาสตร์

1.1 ความหมายของโครงงานคณิตศาสตร์

โครงงานคณิตศาสตร์ (mathematics project) ในความหมายที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนเป็นกิจกรรมการเรียนรู้ที่นักเรียนร่วมกันสำรวจ สังเกต ค้นคว้าหาความรู้ด้านคณิตศาสตร์ในสิ่งที่สงสัยและอยากศึกษาหาคำตอบ หาคำอธิบายให้เข้าใจลึกซึ้งชัดเจน โดยบูรณาการองค์ความรู้ภายในขอบเขตทางเลือกที่ผู้จัดทำโครงงานคัดสรรเอง ใช้วิธีการศึกษาอย่างเป็นระบบและมีขั้นตอนต่อเนื่อง มีการวางแผน การทำงาน และลงมือปฏิบัติตามแผนที่วางไว้ จนได้ข้อค้นพบตามจุดประสงค์ที่กำหนดไว้ เป็นการเรียนรู้ที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์โดยใช้กิจกรรมการปฏิบัติเป็นฐาน (activity-based learning) โครงงานคณิตศาสตร์เป็นกิจกรรมที่ส่งเสริมการเรียนรู้ด้วยตนเองอย่างอิสระ (independent learning) อีกทั้งยังเอื้ออำนวยต่อการเสาะแสวงหาความรู้และเรียนรู้ร่วมกันเป็นกลุ่มหรือหมู่คณะ ส่งเสริมการคิดวิเคราะห์ การจัดการความรู้ และการสื่อสารถ่ายทอดแนวความคิดของตนเองให้ผู้อื่นเข้าใจได้

1.2 ประเภทของโครงงานคณิตศาสตร์

โครงงานคณิตศาสตร์เมื่อพิจารณาจากวิธีการศึกษาและผลที่เกิดขึ้น สามารถแบ่งได้เป็น 5 ประเภท ดังนี้

1. **โครงงานคณิตศาสตร์ประเภททดลอง** เป็นการศึกษาหาคำตอบของปัญหาใดปัญหาหนึ่งโดยการออกแบบทดลองและดำเนินการทดลองเพื่อหาคำตอบของปัญหาที่ต้องการทราบหรือเพื่อตรวจสอบสมมติฐานที่ตั้งไว้ ขั้นตอนของการทำโครงงานประเภทนี้ประกอบด้วย การกำหนดปัญหา การตั้งสมมติฐานการออกแบบการทดลอง ซึ่งจะต้องมีการควบคุมตัวแปรต่าง ๆ ที่อาจส่งผลต่อตัวแปรที่ต้องการศึกษาแล้วดำเนินการทดลองโดยจัดกระทำกับตัวแปรอิสระหรือตัวแปรต้นเพื่อดูผลที่เกิดขึ้นกับตัวแปรตาม รวมทั้งการแปลผลและสรุปผลการทดลอง

2. **โครงงานประเภทสำรวจ** เป็นกิจกรรมการศึกษาและรวบรวมข้อมูลจากธรรมชาติและสิ่งแวดล้อมโดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาหาความรู้ที่มีอยู่หรือเป็นอยู่ในธรรมชาติและสิ่งแวดล้อมโดยใช้วิธีการสำรวจและรวบรวมข้อมูลแล้วนำข้อมูลเหล่านั้นมาจัดกระทำ เช่น จำแนกเป็นหมวดหมู่ แล้วนำเสนอในรูปแบบต่าง ๆ ตามความเหมาะสม

3. โครงงานประเภทเชิงประวัติศาสตร์ เป็นโครงงานที่ศึกษาเกี่ยวกับประวัติความเป็นมาของเรื่องราวต่างๆทางคณิตศาสตร์ เช่น ประวัติของสัญลักษณ์ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ ประวัติของจำนวนและตัวเลข ประวัตินักคณิตศาสตร์และผลงานทางคณิตศาสตร์ การคิดค้นและการหาข้อค้นพบต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ เช่น ประวัติของจำนวนศูนย์ ประวัติของ π ประวัติของสามเหลี่ยมพาสคาลและการประยุกต์ใช้

4. โครงงานประเภทการพัฒนาหรือการประดิษฐ์ เป็นการพัฒนาหรือประดิษฐ์เครื่องมือเครื่องใช้หรืออุปกรณ์ต่าง ๆ ให้ใช้งานได้ตามวัตถุประสงค์ โดยการประยุกต์ทฤษฎีหรือหลักการของสาระที่เกี่ยวข้อง อาจเป็นการประดิษฐ์สิ่งใหม่ที่ยังไม่เคยมีมาก่อนหรือการปรับปรุงอุปกรณ์หรือสิ่งประดิษฐ์ที่มีอยู่แล้วให้ใช้งานได้ดีกว่าเดิม รวมทั้งอาจเป็นการเสนอหรือปรับสร้างแบบจำลองทางความคิดเพื่อแก้ปัญหาใดปัญหาหนึ่ง

5. โครงงานประเภทสร้างทฤษฎีหรือการอธิบาย โครงงานประเภทนี้เป็นโครงงานที่ผู้ทำจะต้องเสนอแนวคิดใหม่ ๆ ในการอธิบายเรื่องใดเรื่องหนึ่งอย่างมีเหตุผล มีหลักการทางคณิตศาสตร์หรือทฤษฎีสนับสนุนหรือเป็นการอธิบายปรากฏการณ์เก่าในแนวใหม่ อาจเสนอในรูปคำอธิบาย สูตรหรือสมการ โดยมีข้อมูลหรือทฤษฎีอื่นสนับสนุน การทำโครงงานประเภทนี้ผู้ทำจะต้องมีพื้นฐานความรู้ในสาระที่เกี่ยวข้องเป็นอย่างดี และต้องศึกษาค้นคว้าเรื่องราวที่เกี่ยวข้องอย่างมากจึงจะสามารถสร้างคำอธิบายหรือทฤษฎีได้

ประเภทของโครงงานต่าง ๆ ไม่ได้แบ่งแยกออกจากกันอย่างสิ้นเชิง โครงงานบางโครงงานอาจมีลักษณะเป็นโครงงานมากกว่าหนึ่งประเภทก็ได้ สำหรับในด้านที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ สามารถแบ่งการจัดการเรียนการสอนหรือการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับโครงงานคณิตศาสตร์ได้เป็น 3 แนวทาง คือ

1. การจัดการเรียนรู้โดยใช้กิจกรรมโครงงาน (project activities) เป็นการจัดการเรียนรู้โดยสอดแทรกการทำโครงงานเข้าไปในกิจกรรมการเรียนรู้หลังจากเรียนรู้เนื้อหาสาระจากบทเรียนแล้ว เป็นการนำการทำโครงงานเข้ามาเป็นกิจกรรมเพื่อฝึกทักษะ เสริมสร้างความเข้าใจ เพิ่มพูนความรู้ และประยุกต์ใช้ความรู้ รวมทั้งการขยายฐานความรู้ที่สัมพันธ์สอดคล้องกับบทเรียนการจัดการเรียนรู้โดยใช้กิจกรรมโครงงานจัดว่าเป็นวิธีการจัดการเรียนรู้วิธีหนึ่ง

2. การสอนการทำโครงงาน (teaching for projects) มีจุดประสงค์หลักเพื่อสอนให้นักเรียนทำโครงงานได้ อาจเริ่มจาการเลือกหัวข้อเรื่องของโครงงาน การกำหนดจุดประสงค์ของโครงงานการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้อง การวางแผนการทำโครงงาน การปฏิบัติงานตามโครงงาน การเขียนรายงานโครงงาน และการนำเสนอโครงงาน เนื้อหาสาระที่เกี่ยวข้องกับโครงงานเปิดกว้างตามความสนใจของนักเรียน

3. การจัดการเรียนรู้แบบโครงงาน (project approach) หรือ การจัดการเรียนรู้โดยใช้โครงงานเป็นฐาน (project based learning) เป็นการจัดการเรียนรู้ที่ตอบสนองความสนใจของนักเรียนเป็นรายบุคคลหรือรายกลุ่ม นักเรียนได้เรียนรู้เนื้อหาสาระจากการทำโครงงานที่ริเริ่มโดยนักเรียนเองโดยมีครูผู้สอนหรือผู้รู้เป็นผู้ให้คำแนะนำ และให้คำปรึกษา ในการจัดการเรียนรู้สามารถผสมผสานทั้งสามแนวทางเข้าด้วยกันก็ได้

1.3 ขั้นตอนในการทำโครงงานคณิตศาสตร์

การทำโครงงานของนักเรียนมีขั้นตอนทำนองเดียวกันกับการทำวิจัยของครู ขั้นตอนสำคัญของการทำโครงงานแบ่งได้เป็น 7 ขั้นตอน คือ การเลือกหัวข้อเรื่องโครงงาน การกำหนดจุดประสงค์โครงงาน การศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้อง การวางแผนการทำโครงงาน การปฏิบัติงานตามโครงงาน การเขียนรายงานโครงงานและการนำเสนอโครงงาน ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 การเลือกหัวข้อเรื่องโครงงาน

การคิดหาหัวข้อเรื่องที่จะทำโครงงานเป็นขั้นตอนแรกที่มีความสำคัญ เป็นประตูไปสู่ขั้นตอนอื่น ๆ นักเรียนอาจเริ่มต้นด้วยคำถามว่า มีความสนใจในเรื่องใด ทำไมจึงสนใจเรื่องดังกล่าว ต้องการค้นหาคำตอบเกี่ยวกับเรื่องใด สิ่งที่จะนำมากำหนดเป็นหัวข้อเรื่องของโครงงานจะได้มาจากปัญหา คำถาม ความสนใจหรือความอยากรู้อยากเห็นในเรื่องต่าง ๆ ของนักเรียนเอง หัวข้อเรื่องของโครงงานต้องมีความเฉพาะเจาะจง มีความชัดเจน สื่อความหมายได้ว่าโครงงานนี้ทำอะไร ควรเป็นเรื่องที่นักเรียนผู้จัดทำสามารถศึกษาหาคำตอบได้โดยใช้ความรู้เนื้อหาที่มีอยู่เป็นฐานการคิดนำไปสู่เรื่องที่จะทำโครงงาน

ขั้นตอนที่ 2 การกำหนดจุดประสงค์โครงงาน

การกำหนดจุดประสงค์ของโครงงาน เป็นการกำหนดทิศทางของโครงงานตามหัวข้อเรื่องที่เลือกว่าต้องการคำตอบอะไร มีความลุ่มลึกเพียงใด จุดประสงค์ที่กำหนดต้องสามารถหาคำตอบได้จากการทำโครงงาน จุดประสงค์ของโครงงานไม่จำเป็นต้องมีหลายข้อ ประเด็นสำคัญคือจุดประสงค์ทุกข้อต้องหาคำตอบได้ครบถ้วนเมื่อโครงงานสิ้นสุดลง การกำหนดจุดประสงค์ของโครงงานมีความสัมพันธ์กับองค์ประกอบต่าง ๆ ของโครงงานที่สำคัญได้แก่ เนื้อหาสาระที่เกี่ยวข้อง วิธีดำเนินงาน และผลของการดำเนินงาน

ขั้นตอนที่ 3 การศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องแบ่งได้เป็นสามส่วนคือ ใน*ส่วนแรก*ผู้จัดทำโครงงานต้องพิจารณาว่าในโครงงานนั้นมีความเกี่ยวข้องกับเนื้อหาสาระใดบ้าง จะนำเนื้อหาสาระมาใช้ในแง่มุมใด เป็นการเชื่อมโยงความรู้กับงานในโครงงาน ใน*ส่วนที่สอง*ผู้จัดทำโครงงานต้องศึกษาทำความเข้าใจเนื้อหาสาระที่เกี่ยวข้องให้เข้าใจอย่างถ่องแท้ เพื่อให้สามารถนำมาใช้ในการทำโครงงานได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม *ส่วนที่สาม*เป็นการศึกษาขั้นตอนวิธีการในการค้นหาคำตอบของโครงงาน อาจศึกษาจากหนังสือ เอกสาร อินเทอร์เน็ต หรือศึกษาจากโครงงานที่เกี่ยวข้องซึ่งมีผู้เคยจัดทำมาก่อนแล้ว ศึกษาแนวทาง วิธีการ เครื่องมือในการเก็บรวบรวมข้อมูล เพื่อนำไปสู่ผลการดำเนินงานที่สอดคล้องจุดประสงค์ของโครงงาน และขณะที่ทำโครงงานก็

สามารถศึกษาเอกสารเพิ่มเติมได้ การศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องครอบคลุมถึงการขอคำปรึกษาจากคุณครูและผู้รู้อื่น ๆ

ขั้นตอนที่ 4 การวางแผนการทำโครงงาน

ก่อนที่จะจัดทำโครงงานต้องมีการวางแผนการทำงานจากจุดเริ่มต้นไปจนกระทั่งได้แนวทางของการทำโครงงาน สามารถจัดทำในรูปเค้าโครงของโครงงานซึ่งจะทำให้เห็นภาพของโครงงานที่ชัดเจนขึ้น เป็นการสร้างแผนที่ความคิดของโครงงานที่จะจัดทำเพื่อนำไปสู่การทำโครงงานจริง ๆ ให้ประสบความสำเร็จ เค้าโครงของโครงงานจะประกอบด้วยหัวข้อต่าง ๆ เช่นเดียวกับโครงการของงานวิจัย ได้แก่ ชื่อโครงงาน ผู้จัดทำโครงงาน ที่ปรึกษาโครงงาน ความเป็นมา จุดประสงค์โครงงาน สมมติฐาน(ถ้ามี) เนื้อหาสาระที่เกี่ยวข้อง ระยะเวลาดำเนินงาน วิธีดำเนินงาน ประโยชน์ของโครงงาน และ บรรณานุกรม สำหรับนักเรียนในชั้นเล็ก ๆ อาจให้นำเสนอโครงงานด้วยวาจา หรือนำเสนอเพียงบางหัวข้อที่สำคัญ เช่น ชื่อโครงงาน ผู้จัดทำโครงงาน คุณครูที่ปรึกษา จุดประสงค์ เนื้อหาสาระที่เกี่ยวข้อง วิธีดำเนินงาน

ขั้นตอนที่ 5 การปฏิบัติงานตามโครงงาน

เมื่อแผนการทำโครงงานของนักเรียนได้แก้ไขปรับปรุงตามคำแนะนำและได้รับความเห็นชอบจากคุณครูที่ปรึกษาแล้ว ผู้จัดทำโครงงานสามารถลงมือปฏิบัติงานตามแผนงานที่กำหนดไว้ในเค้าโครงของโครงงาน อาจต้องมีการศึกษาทำความเข้าใจเอกสารเพิ่มเติม จัดหาหรือสร้างเครื่องมือ ลงมือปฏิบัติงานและบันทึกผลที่เกิดขึ้น เก็บรวบรวมข้อมูลอย่างมีระบบเป็นระเบียบเพื่อให้ได้คำตอบตามที่กำหนดไว้ในจุดประสงค์โครงงาน และใช้เป็นข้อมูลสำหรับการปรับปรุงการดำเนินงานในโอกาสต่อไปด้วย การปฏิบัติกิจกรรมตามที่ระบุไว้ในขั้นตอนการดำเนินงานในเค้าโครงของโครงงาน เป็นการฝึกการทำงานตามแผนและศึกษาค้นคว้าหาคำตอบอย่างเป็นกระบวนการด้วยตนเอง

ขั้นตอนที่ 6 การเขียนรายงานโครงงาน

ถ้าเปรียบเทียบกับงานวิจัยขั้นตอนนี้ก็คือการเขียนรายงานการวิจัย เป็นการรายงานการดำเนินงานตามเค้าโครงของโครงงานและผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินงาน เป็นการสรุปรายงานผลการดำเนินงานโครงงานตั้งแต่เริ่มต้นจนสิ้นสุด เพื่อให้ผู้อื่นได้ทราบถึงผลที่ได้รับ และข้อเสนอแนะต่าง ๆ เกี่ยวกับโครงงานที่ได้จัดทำ การเขียนรายงานโครงงานเป็นการสื่อสารแนวคิดของตนเองให้ผู้อื่นเข้าใจ ควรใช้ภาษาที่เข้าใจง่าย กระชับรัดกุม ชัดเจนและครอบคลุมประเด็นสำคัญ ๆ ของโครงงานที่ปฏิบัติไปแล้ว การเขียนรายงานโครงงานควรมีส่วนประกอบ ได้แก่ หน้าปก และปกใน (ประกอบด้วย ชื่อโครงงาน ผู้จัดทำโครงงาน ระดับชั้น คุณครูที่ปรึกษาโครงงาน ภาคเรียนที่ ปีการศึกษา และอาจเพิ่มเติม โรงเรียน จังหวัด) บทคัดย่อ คำนำ สารบัญ ความเป็นมาของโครงงาน จุดประสงค์ของโครงงาน สมมติฐาน(ถ้ามี)

เนื้อหาสาระที่เกี่ยวข้อง ระยะเวลาดำเนินงาน วิธีดำเนินงาน ผลการดำเนินงาน สรุปและข้อเสนอแนะ บรรณานุกรม ภาคผนวก บางแห่งกำหนดให้มีการนำเสนอรายงานโครงงาน เป็น 5 บท เช่นเดียวกับการนำเสนอรายงานการวิจัย ได้แก่ ส่วนนำ ประกอบด้วย ชื่อโครงงาน ผู้จัดทำ บทคัดย่อ คำนำ สารบัญ บทที่ 1 ความเป็นมา จุดประสงค์ สมมติฐาน(ถ้ามี) บทที่ 2 เอกสารที่เกี่ยวข้อง กล่าวถึงเนื้อหาสาระ และทฤษฎีต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง บทที่ 3 วิธีดำเนินงาน บทที่ 4 ผลการดำเนินงาน บทที่ 5 สรุปและข้อเสนอแนะ (อาจมีการให้ระบุประโยชน์ที่ได้รับจากการทำโครงงาน) และ บรรณานุกรม

ขั้นตอนที่ 7 การนำเสนอโครงงาน

โครงงานที่จัดทำเรียบร้อยแล้ว ผู้จัดทำต้องนำเสนอผลการดำเนินงานโครงงานทั้งหมด ซึ่งอาจอยู่ในรูปเอกสาร รายงาน ชิ้นงาน สิ่งประดิษฐ์ หรือ แบบจำลอง ตามประเภทของโครงงานที่ทำนำเสนอให้ผู้เกี่ยวข้องได้รับทราบ เป็นการแสดงความสามารถในการนำเสนอ การสื่อสารแนวคิดของสิ่งที่ศึกษามาเพื่อนำเสนอต่อผู้อื่นให้รับรู้และเข้าใจ การนำเสนอโครงงานสามารถทำได้ในรูปแบบต่าง ๆ กัน เช่น การนำเสนอในที่ประชุม การจัดป้ายนิเทศ การแสดงในรูปนิทรรศการ การนำเสนอผ่านเครือข่ายอินเทอร์เน็ต เปิดช่องทางให้ผู้เข้าชมมีปฏิสัมพันธ์โดยถามคำถามและแสดงความคิดเห็น เพื่อนำผลไปปรับปรุงและพัฒนางานต่อไป

ในการแนะนำขั้นตอนการทำโครงงานกับนักเรียนที่กล่าวมานี้สามารถปรับให้เหมาะสมกับวัยของนักเรียนได้ สำหรับนักเรียนที่เริ่มต้นทำโครงงาน สามารถลดหัวข้อของการเขียนรายงานลงได้ การนำเสนอโครงงานก็อาจให้นักเรียนนำเสนอหน้าชั้นเรียนเป็นการฝึกการนำเสนอ หลังจากนั้นนำผลงานของนักเรียนมาจัดแสดงบนป้ายนิเทศเป็นการสร้างความภาคภูมิใจให้กับนักเรียน



ใบความรู้ที่ 2 เรื่อง การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กิจกรรมโครงงาน

สำหรับนักเรียนที่เริ่มต้นเรียนรู้การทำโครงงาน ถ้าเริ่มต้นด้วยการให้นักเรียนทำโครงงานและเขียนรายงานการทำโครงงานที่มีองค์ประกอบที่สมบูรณ์ครบถ้วนทำนองเดียวกันกับรายงานงานวิจัยจึงเป็นเรื่องที่ทำได้ยาก ในเอกสารนี้ขอเสนอแนวทางในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กิจกรรมโครงงาน ด้วยวิธีสอดแทรกกิจกรรมการทำโครงงานเข้าไปเป็นส่วนหนึ่งของบทเรียน เริ่มต้นด้วยการแนะนำให้นักเรียนได้ลงมือทำ**โครงงานอย่างง่าย** หรือ **โครงงานเล็ก ๆ (mini project)** ที่มีองค์ประกอบน้อย ๆ ซึ่งสอดรับกับกิจกรรมการเรียน และการทำแบบฝึกหัดตามปกติของนักเรียนแล้วค่อย ๆ เพิ่มงานและองค์ประกอบของการเขียนรายงานการจัดทำโครงงานให้มากขึ้นในลักษณะค่อยเป็นค่อยไปจนกระทั่งมีความสมบูรณ์ตามรูปแบบของการเขียนรายงานการจัดทำ**โครงงานคณิตศาสตร์เต็มรูป** โดยมีจุดประสงค์เพื่อให้นักเรียนได้เพิ่มพูนความรู้ความเข้าใจสาระสำคัญของบทเรียนและการเชื่อมโยงความรู้ผ่านการทำโครงงาน ในขณะเดียวกันก็ได้เรียนรู้วิธีการทำโครงงานในลักษณะที่มีความเชื่อมโยงกับสาระในบทเรียนและครอบคลุมถึงการประยุกต์ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับบทเรียน

แนวทางในการจัดการเรียนรู้โดยใช้กิจกรรมโครงงาน สามารถแบ่งได้เป็น 4 ขั้นตอน โดยที่ 2 ขั้นตอนแรกเป็นการฝึกทำโครงงานอย่างง่าย อีก 2 ขั้นตอนต่อไป เป็นการฝึกทำโครงงานคณิตศาสตร์ที่มีความสมบูรณ์ขึ้น โดยที่ขั้นตอนที่ 1 ถึง 3 เป็นการฝึกทำโครงงานที่อยู่ภายใต้กรอบของจุดประสงค์การเรียนรู้ของบทเรียน ซึ่งอาจมีการขยายแนวคิด หรือ ประยุกต์ใช้เนื้อหาจากบทเรียนก็ได้ เมื่อนักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับการทำโครงงานคณิตศาสตร์พอสมควรแล้ว ในขั้นตอนที่ 4 จึงเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ทำโครงงานอย่างอิสระภายใต้การให้คำแนะนำของครูที่ปรึกษา อาจเป็นโครงงานเชิงบูรณาการที่มีความเชื่อมโยงกับสาระการเรียนรู้อื่น ๆ สามารถดำเนินการในลักษณะเป็นกิจกรรมเสริมนอกเหนือไปจากการเรียนการสอนตามปกติ ในขั้นตอนนี้ครูสามารถให้ความรู้เกี่ยวกับขั้นตอนในการทำโครงงานกับนักเรียนดังที่ได้กล่าวถึงในเรื่องที่ 2 และครูควรให้ความรู้เกี่ยวกับโครงงานที่มีลักษณะแตกต่างไปจากเดิม เช่น โครงงานประเภททดลองที่ต้องเพิ่มองค์ประกอบของโครงงานในเรื่อง **ตัวแปรต้น ตัวแปรตามสมมติฐานของการทดลอง** และแสดงผล การทดสอบสมมติฐานใน**ผลการดำเนินงาน**

แนวทางในการจัดการเรียนรู้โดยใช้กิจกรรมโครงงาน 4 ขั้นตอน แสดงด้วยแผนภาพได้ดังต่อไปนี้



ใบความรู้ที่ 3 เรื่อง การประเมินโครงงานคณิตศาสตร์

การประเมินโครงงานตามแนวทางของการประเมินตามสภาพจริงสามารถแบ่งได้เป็น 2 ตอน คือ การประเมินกระบวนการจัดทำโครงงาน และการประเมินผลสัมฤทธิ์ของโครงงาน ซึ่งในแต่ละตอนต้องกำหนดวิธีการและเครื่องมือในการประเมิน การประเมินกระบวนการจัดทำโครงงานเป็นการประเมินระหว่างการลงมือปฏิบัติทำโครงงานของนักเรียนทั้งที่เป็นรายบุคคลและการร่วมมือกันทำงานเป็นกลุ่ม ครอบคลุม การวางแผนการทำงาน การศึกษาค้นคว้า การเก็บรวบรวมข้อมูล การแปลความหมายซึ่งสามารถประเมินโดยครูที่ปรึกษาโครงงาน โดยทั่วไปการประเมินโครงงานมักให้ความสำคัญกับการประเมินผลสัมฤทธิ์ของโครงงานที่เป็นผลสำเร็จแล้ว เรียกว่า **การประเมินคุณภาพโครงงาน**

การประเมินคุณภาพโครงงานคณิตศาสตร์ ต้องกำหนดขอบข่ายหรือประเด็นของสิ่งที่ต้องการประเมินเพื่อนำมากำหนดตัวบ่งชี้ กำหนดวิธีการและเครื่องมือประเมิน ตัวอย่างเช่น สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ (2541 : 2–6) กำหนดประเด็นหลักในการประเมิน 4 ประเด็น คือ ความสำคัญของการจัดทำโครงงานเนื้อหาของโครงงาน กระบวนการทำงาน และการนำเสนอโครงงานคณิตศาสตร์นำแต่ละประเด็นมากำหนดตัวบ่งชี้เพื่อนำไปใช้สร้างแบบประเมินคุณภาพโครงงานซึ่งครูที่ปรึกษาโครงงานสามารถนำไปใช้ประเมินภาพรวมของคุณภาพโครงงานคณิตศาสตร์ ดังนี้

1) ความสำคัญของการจัดทำโครงงานคณิตศาสตร์ พิจารณาจากตัวบ่งชี้ต่อไปนี้
   (1) การริเริ่มโครงงาน นักเรียนริเริ่มเองหรือครูช่วยแนะแนวทาง
   (2) การมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์
   (3) การมีส่วนช่วยพัฒนาตนของผู้จัดทำโครงงาน
   (4) ช่วยให้เกิดการร่วมมือกันทำงานเป็นกลุ่ม
   (5) ความเชื่อมโยงกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ในบทเรียน
   (6) ความมีประโยชน์ของโครงงาน
2) เนื้อหาของโครงงาน พิจารณาจากตัวบ่งชี้ต่อไปนี้
   (1) ความถูกต้องของเนื้อหาทางคณิตศาสตร์
   (2) ความเหมาะสมในการใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์
   (3) การเลือกใช้ข้อมูลได้เหมาะสมตรงประเด็นปัญหา
   (4) มีการอธิบายโดยใช้เนื้อหาคณิตศาสตร์ที่ชัดเจน
3) กระบวนการทำงาน พิจารณาจากตัวบ่งชี้ต่อไปนี้
   (1) มีการวางแผนอย่างมีระบบ
   (2) วิธีดำเนินงานอยู่ในแนวทางที่ทำให้บรรลุจุดประสงค์
   (3) มีการดำเนินงานตามแผน
   (4) มีการประเมินและปรับปรุงการดำเนินงานให้เหมาะสม

4) การนำเสนอโครงงานคณิตศาสตร์ พิจารณาจากตัวบ่งชี้ต่อไปนี้

(1) การรายงานสามารถสื่อความหมายได้ดี

(2) ความสมบูรณ์ของข้อมูล

(3) ความเหมาะสมของรูปแบบที่ใช้นำเสนอ

(4) ความน่าสนใจของวิธีการนำเสนอ

(5) ความสอดคล้องของผลการดำเนินงานกับจุดประสงค์ที่กำหนด

การประเมินคุณภาพโครงงานคณิตศาสตร์สามารถใช้วิธีการสังเกตการทำงาน การประเมินคุณภาพของชิ้นงาน และการวิเคราะห์จากรายงานโครงงาน โดยนำตัวบ่งชี้ของแต่ละประเด็นกำหนดเป็นรายการประเมิน และเกณฑ์กำหนดระดับคุณภาพของงานซึ่งอาจจัดแบ่งเป็น 4 ระดับคุณภาพ คือ ระดับ 1 หมายถึง ต้องปรับปรุง ระดับ 2 หมายถึง พอใช้ ระดับ 3 หมายถึง ดี และระดับ 4 หมายถึง ดีมาก ส่วนในกรณีที่ไม่มีหลักฐานหรือร่องรอยของผลงานที่ช่วยให้สามารถลงความเห็นได้ อาจต้องกำหนดให้มีระดับ 0 ซึ่งหมายถึงไม่มีผลงานให้ประเมิน อย่างไรก็ตามในการทำโครงงานคณิตศาสตร์จะต้องมีผลปฏิบัติงานหรือหลักฐานร่องรอยของผลงานเกิดขึ้น เกณฑ์ต่ำที่สุดในการประเมินคุณภาพของโครงงานคณิตศาสตร์จึงควรเป็นระดับ 1 ซึ่งถือเป็นระดับต่ำสุด

ตัวอย่างที่ 1 แบบประเมินปฏิบัติการทำโครงงานอย่างง่าย

คำชี้แจง ให้ผู้เข้าอบรมแบ่งเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4 คน แต่ละกลุ่มร่วมกันจัดทำ**โครงงานอย่างง่าย** (mini project) กลุ่มละ 1 โครงงาน ซึ่งมีความเกี่ยวข้องกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาเรื่องใดเรื่องหนึ่ง การนำเสนอรายงานโครงงานอย่างง่าย ให้ประกอบด้วยหัวข้อต่อไปนี้

1. **ชื่อโครงงาน** ควรตั้งชื่อให้น่าสนใจ และสื่อความหมายให้เห็นภาพรวมของโครงงานที่ทำ
2. **ชื่อผู้จัดทำ** ให้ระบุรายชื่อผู้จัดทำทุกคนหรือตั้งเป็นชื่อกลุ่มผู้จัดทำ อาจระบุชื่อครูที่ปรึกษาเป็นชื่อบุคคลที่ได้ขอคำปรึกษาในการทำโครงงาน
3. **จุดประสงค์** ระบุถึงสิ่งที่ต้องการศึกษา หรือต้องการหาคำตอบด้วยการทำโครงงาน
4. **สาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง** ให้ระบุเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่มีความเชื่อมโยง หรือนำมาใช้ในการจัดทำโครงงาน
5. **ผลการดำเนินงาน** ให้แสดงผลของการศึกษาที่สอดคล้องกับจุดประสงค์ของโครงงาน โดยหาวิธีการนำเสนอให้น่าสนใจ

ให้แต่ละกลุ่มช่วยกันจัดทำโครงงานอย่างง่ายโดยเขียนรายงานลงบนกระดาษ A4 จำนวน 1 – 2 หน้า ตกแต่งระบายสีให้สวยงามและน่าสนใจ ใช้เวลาประมาณ 30 นาที หลังจากนั้นส่งตัวแทนกลุ่มจำนวน 1 – 2 คน

นำเสนอรายงานหน้าห้องประชุมโดยใช้เครื่องฉายวัสดุทึบแสง ใช้เวลานำเสนอกลุ่มละประมาณ 3 – 5 นาที กลุ่มอื่น ๆ ที่ไม่ได้นำเสนอให้ฝึกประเมิน โดยใช้แบบประเมินต่อไปนี้

แบบประเมินการทำโครงงานอย่างง่าย (mini project)

ชื่อโครงงาน

.....

ผู้จัดทำ

.....

ระดับคุณภาพ 4 – ดีมาก 3 – ดี 2 – พอใช้ 1 – ควรปรับปรุง 0 – ปรับปรุงไม่ได้

ที่	รายการประเมิน	ระดับคุณภาพ				
		4	3	2	1	0
1	**ชื่อโครงงาน** มีความน่าสนใจ สื่อความหมายได้สอดคล้องกับสิ่งที่นำเสนอ					
2	**จุดประสงค์ของโครงงาน** มีความชัดเจน มีความเป็นไปได้ที่จะตอบสนองจุดประสงค์โดยการทำโครงงาน					
3	**สาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง** โครงงานมีความเชื่อมโยงกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่กล่าวถึง เนื้อหาคณิตศาสตร์มีความถูกต้อง					
4	**ผลการดำเนินงาน** มีความสอดคล้องกับจุดประสงค์ มีวิธีการแสดงผลการดำเนินงานที่น่าสนใจ					
5	**การนำเสนอโครงงาน** สื่อความหมายได้ชัดเจน เข้าใจง่าย วิธีการนำเสนอที่น่าสนใจ					
รวมคะแนน .....คะแนน (คะแนนเต็ม 20 คะแนน)						

ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อผู้ประเมิน .....

ตัวอย่างที่ 2 แบบประเมินการทำโครงงานคณิตศาสตร์ (mathematics project)

คำชี้แจง ให้ผู้เข้าอบรมแต่ละกลุ่มเลือกศึกษา**เค้าโครงของโครงงานคณิตศาสตร์**ที่กำหนดให้ กลุ่มละ 1 เรื่อง แล้วจัดทำเป็นโครงงานที่สมบูรณ์ พร้อมจัดทำรายงานโครงงานให้ครอบคลุมหัวข้อที่สำคัญต่อไปนี้

1. ชื่อโครงงาน
2. ชื่อผู้จัดทำ (หรือชื่อกลุ่ม) และชื่อครูที่ปรึกษา
3. ความเป็นมา
4. จุดประสงค์
5. สมมติฐาน (ถ้ามี)
6. สาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง
7. ระยะเวลาดำเนินงาน
8. วิธีดำเนินงาน
9. ผลการดำเนินงาน
10. สรุปและข้อเสนอแนะ

โดยให้ปรับปรุงรายละเอียดของเค้าโครงโครงงานให้เหมาะสม จัดทำรายงานโครงงานโดยเขียนบนกระดาษ A4 ตกแต่งระบายสีให้สวยงาม ใช้เวลาทำโครงงาน 45 นาที และส่งตัวแทนนำเสนอหน้าห้องประชุม กลุ่มละ 5 – 10 นาที กลุ่มอื่น ๆ ที่ไม่ได้นำเสนอให้ฝึกประเมินโครงงาน โดยใช้แบบประเมินต่อไปนี้

แบบการประเมินโครงงานคณิตศาสตร์

ชื่อโครงงาน .....

ผู้จัดทำ .....

ระดับคุณภาพ 4 – ดีมาก 3 – ดี 2 – พอใช้ 1 – ควรปรับปรุง 0 – ปรับปรุงไม่ได้

ที่	รายการประเมิน	ระดับคุณภาพ				
		4	3	2	1	0
1	ชื่อโครงงาน มีความน่าสนใจ สื่อความหมายได้สอดคล้องกับสิ่งที่นำเสนอ					
2	การกล่าวถึงความเป็นมาของโครงงาน ทำให้เห็นความสำคัญ หรือความน่าสนใจของโครงงานที่ทำ					
3	จุดประสงค์ของโครงงาน มีความชัดเจน มีความเป็นไปได้ที่จะตอบสนองจุดประสงค์โดยการทำโครงงาน					
4	ระบุเนื้อหาสาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องได้ถูกต้อง เนื้อหามีความเชื่อมโยงกับโครงงานที่ทำ					
5	มีการระบุวิธีดำเนินงานอย่างเป็นขั้นตอน ทำให้เห็นแนวทางการได้ข้อมูลที่สอดคล้องกับจุดประสงค์ของโครงงาน					
6	วิธีดำเนินงานมีความครอบคลุมจุดประสงค์ของโครงงาน					
7	ผลการดำเนินงาน มีความสอดคล้องกับจุดประสงค์ ตอบวัตถุประสงค์ได้ครบถ้วน					
8	ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่นำเสนอในผลการดำเนินงานมีความถูกต้องชัดเจนและเข้าใจง่าย					
9	มีวิธีการแสดงผลการดำเนินงานที่น่าสนใจ					
10	มีวิธีการนำเสนอโครงงานต่อผู้ฟังได้น่าสนใจ ตอบข้อซักถามได้ชัดเจน หรือมีวิธีการนำเสนอที่ทำให้ผู้ฟังมีส่วนร่วม					
	รวมคะแนน .....คะแนน (คะแนนเต็ม 40 คะแนน)					

ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

ลงชื่อผู้ประเมิน .....

ใบความรู้ที่ 4 เรื่อง กิจกรรมส่งเสริมการทำโครงงาน และแหล่งที่มาของโครงงาน

1. กิจกรรมส่งเสริมการทำโครงงาน

ในการจัดการเรียนรู้ครูสามารถสอดแทรกกิจกรรมส่งเสริมการทำโครงงานได้แก่ การใช้กิจกรรมฝึกทักษะ การให้เรียนรู้โครงงานจากใบงานหรือใบกิจกรรม การส่งเสริมการทำโครงงานด้วยแบบฝึกหัดปลายเปิด และการสรุปสาระสำคัญของบทเรียนในรูปโครงงานและอื่น ๆ ดังต่อไปนี้

1) การใช้กิจกรรมฝึกทักษะส่งเสริมการทำโครงงานคณิตศาสตร์

ในการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียน หลังจากที่จัดกิจกรรมให้นักเรียนได้เรียนรู้เนื้อหาใหม่แล้ว ขั้นตอนที่สำคัญอีกขั้นตอนหนึ่งคือ การฝึกทักษะเพื่อเสริมสร้างความรู้ความเข้าใจ ซึ่งอาจจะอยู่ในรูป เกม การเล่น แบบฝึกหัดหรือแบบฝึกทักษะ รวมทั้งการให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการสร้างโจทย์ในแบบฝึกทักษะในลักษณะที่นักเรียนสนใจสิ่งเหล่านี้สามารถนำมาเป็นกิจกรรมให้นักเรียนนำเสนอในรูปโครงงานอย่างง่ายเป็นการวางพื้นฐานของการทำโครงงาน

2) การให้เรียนรู้โครงงานจากใบงานหรือใบกิจกรรม

ในโครงงานที่ดัดแปลง ปรับเปลี่ยนมาจากใบงานหรือใบกิจกรรมนี้ นักเรียนได้มีโอกาสเห็นความสอดคล้องกันของจุดประสงค์ วิธีดำเนินงานที่จัดกระทำเพื่อให้บรรลุผลตามจุดประสงค์ มีโอกาสคุ้นเคยกับการเขียนแสดงผลการดำเนินงานที่สอดรับกับจุดประสงค์ ในส่วนของ**สาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง** นักเรียนได้เห็นความสอดคล้องของสาระความรู้ที่นำมาใช้ในการจัดทำโครงงานสำหรับโครงงานที่เป็นการขยายฐานความรู้ไปจากบทเรียนปกติก็สามารถสร้างเป็นใบกิจกรรมให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติและคุ้นเคยกับการเขียนรายงานโครงงานไปด้วยพร้อม ๆ กัน

3) การส่งเสริมการทำโครงงานด้วยแบบฝึกหัดแบบเปิด

แบบฝึกหัดแบบเปิดเป็นแบบฝึกหัดที่ใช้คำถามปลายเปิดให้นักเรียนมีอิสระในการหาคำตอบตามมุมมองของนักเรียน รวมถึงการใช้คำถามที่มีคำตอบได้หลาย ๆ คำตอบเช่น หลังจากที่ผู้เรียนเรียนเรื่อง พาราโบลา แล้วครูอาจมีกิจกรรมให้นักเรียนไปสำรวจสิ่งต่าง ๆ รอบตัว ที่มีลักษณะใกล้เคียงกับพาราโบลา วัดขนาดของจริง ถ่ายรูป นำมาจัดวางรูปบนกระดาษหรือบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ พร้อมสร้างตัวแบบที่เป็นสมการ และเขียนกราฟของพาราโบลา โดยให้นำเสนอในรูปโครงงาน

4) การสรุปสาระสำคัญของบทเรียนในรูปโครงงาน

หลังจากเรียนจบบทเรียนแล้ว นักเรียนสามารถสรุปบทเรียนนั้นด้วยตนเอง อาจใช้วิธีการเขียนสรุปเชิงพรรณนา แผนภูมิต้นไม้ (tree diagram) หรือแสดงในรูปแผนที่ความคิด (mind mapping) ก็ได้

แล้วนำเสนอในรูปโครงงานอย่างง่ายที่มีองค์ประกอบหลักที่สำคัญ ได้แก่ ชื่อโครงงาน จุดประสงค์ สาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง และผลการดำเนินงาน

2. แหล่งที่มาของโครงงาน

โครงงานคณิตศาสตร์มีแหล่งที่มาอย่างหลากหลาย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

1) โครงงานคณิตศาสตร์จากโจทย์ปัญหา

หลังจากที่นักเรียนได้เรียนรู้เนื้อหาเกี่ยวกับบทนิยาม สมบัติต่าง ๆ รวมถึงทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์แล้ว เพื่อให้นักเรียนได้เห็นการนำความรู้นั้นไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ ในกิจกรรมการเรียนรู้จึงมักตามด้วยการประยุกต์ใช้โดยนำเสนอในรูปของโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ซึ่งมีลักษณะเป็นสถานการณ์ เรื่องราวเป็นตัวอย่าง แล้วให้นักเรียนฝึกแก้โจทย์ปัญหาจากแบบฝึกหัด ถ้าเป็นโจทย์ปัญหาที่มีความเกี่ยวข้องกับชีวิตจริง สถานการณ์หรือสิ่งต่าง ๆ ที่อยู่รอบตัว ก็ยิ่งช่วยทำให้บทเรียนนั้นมีความหมายยิ่งขึ้น

2) โครงงานคณิตศาสตร์จากสิ่งรอบตัว

การเป็นคนช่างสังเกต สร้างข้อสงสัย และหาคำอธิบายข้อสงสัยนั้นซึ่งเป็นคุณลักษณะที่ควรสร้างให้มีในตัวนักเรียน การที่นักเรียนสามารถนำคณิตศาสตร์มาอธิบายเหตุการณ์ หรือนำมาใช้แก้ปัญหาช่วยทำให้เห็นความเชื่อมโยงของคณิตศาสตร์ เห็นประโยชน์และคุณค่าของคณิตศาสตร์และช่วยให้บทเรียนคณิตศาสตร์มีความหมายยิ่งขึ้น

3) โครงงานคณิตศาสตร์ที่เกิดจากความสนใจเป็นพิเศษ

ความสนใจในเรื่องใดเรื่องหนึ่งเป็นการเฉพาะ ต้องการศึกษาทำความเข้าใจในเรื่องนั้นอย่างชัดเจนลุ่มลึก นำไปสู่การจัดทำโครงงานได้ โดยแสดงวิธีการศึกษาและแสดงผลของการศึกษาอย่างเป็นระบบอธิบายได้อย่างมีเหตุผลตรงประเด็นที่สนใจ

4) โครงงานจากการทดลอง

มีชื่อเฉพาะว่าโครงงานเชิงทดลองเป็นการศึกษาผลที่เกิดขึ้นจากการจัดกระทำต่างจากโครงงานเชิงสำรวจที่เป็นการศึกษาสภาพที่เป็นอยู่ตามปกติโดยไม่มีการจัดกระทำ ในการทดลองต้องมีสิ่งทดลองหรือตัวจัดกระทำ มีชื่อเฉพาะว่า **ตัวแปรต้น**หรือ**ตัวแปรอิสระ** ต้องมีการควบคุมสภาพการทดลองให้ผลที่เกิดขึ้นนั้นเกิดจากการให้สิ่งทดลองจริง ๆ ไม่ใช่เกิดขึ้นเพราะเหตุอื่นซึ่งเรียกว่า **ตัวแปรเกิน** จากนั้นศึกษาผลที่เกิดขึ้นจากการให้สิ่งทดลองนั้น ผลที่เกิดขึ้นเป็นสิ่งที่มุ่งศึกษาเรียกว่า **ตัวแปรตาม** ขั้นตอนต่าง ๆ ในการทำโครงการเชิงทดลองอาศัยกระบวนการทางวิทยาศาสตร์

3. ตัวอย่างโครงงานคณิตศาสตร์

โครงงานจากฟังก์ชันสู่ผ้าน่านลายสามมิติ

โครงงานจากฟังก์ชันสู่ผ้าน่านลายสามมิติเป็นโครงงานคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนศรีสวัสดิ์วิทยาคาร จังหวัดน่าน แสดงให้เห็นถึงการนำคณิตศาสตร์ไปอธิบายสิ่งต่าง ๆ ที่มีอยู่ในชีวิตจริง แสดงให้เห็นความเชื่อมโยงของคณิตศาสตร์กับผลงานทางด้านศิลปะที่เป็นภูมิปัญญาท้องถิ่นเริ่มต้นด้วยการวิเคราะห์ลายผ้าซึ่งเป็นภูมิปัญญาท้องถิ่นและอธิบายด้วยกราฟของฟังก์ชัน จากนั้นออกแบบสร้างสรรค์ลายผ้าขึ้นใหม่เองจากการเลือกใช้กราฟของฟังก์ชันที่เหมาะสม อาศัยการแปลงทางเรขาคณิตและใช้เทคโนโลยีเข้าช่วย คือโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad: GSP ในการประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ประจำปี 2548 ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ ร่วมกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ซึ่งจัดที่มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช โครงงานจากฟังก์ชันสู่ผ้าน่านลายสามมิติได้รับรางวัลชนะเลิศในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ตัวอย่างโครงงานที่จะนำเสนอต่อไปนี้ได้ปรับย่อจากโครงงานเดิมของนักเรียน โดยยังคงรักษาสาระสำคัญและความมีคุณค่าของโครงงานเดิมไว้

โครงงานจากฟังก์ชันสู่ผ้าน่านลายสามมิติ

ผู้จัดทำ 1. นายธัชวิทย์ สุธรรม 2. นางสาวธนาภรณ์ จำปาแก้ว และ 3. นางสาวปานรวี นิลพร
ครูที่ปรึกษา คุณครูเอมอร สุมามาลย์ และ คุณครูทิพวรรณ จำปาแก้ว

ความเป็นมา

ในวันศุกร์ของทุกสัปดาห์ ครู- อาจารย์ และบุคคลากรในโรงเรียนศรีสวัสดิ์จังหวัดน่าน และประชาชนในจังหวัดน่านมักแต่งกายด้วยชุดพื้นเมืองที่ มีสีสัน ลวดลายงดงาม อีกทั้งคุณครูผู้สอนคณิตศาสตร์ได้นำลวดลายของผ้ามาเป็นสื่อประกอบการเรียนการสอนให้นักเรียนได้ศึกษา ผ้าพื้นเมืองได้แก่ ผ้าลายน้ำไหล ผ้าปักชาวเขา ผ้าลายไทลื้อ เป็นสินค้า OTOP ที่มีชื่อเสียงของจังหวัดน่าน และได้รับความนิยมเป็นอย่างยิ่งในการนำไปเป็นอาภรณ์สวมใส่ในโอกาสต่าง ๆ นอกจากนี้แต่ละลวดลายยังมีความสวยงามโดดเด่นและมีเอกลักษณ์เฉพาะตัว ผลิตขึ้นโดยกลุ่มแม่บ้านในชุมชนตามหมู่บ้านต่าง ๆ ในจังหวัดน่านแต่ว่ากลุ่มผู้ผลิตยังคงผลิตลวดลายในแบบเดิมซึ่งเป็นมรดกทางปัญญาที่สืบทอดกันมา ไม่มีการเปลี่ยนแปลงลวดลาย ด้วยเหตุผลดังกล่าวคณะผู้จัดทำจึงมีความสนใจที่จะช่วยเหลือกลุ่มแม่บ้าน ในการทอผ้าให้มีลวดลายแบบใหม่ ๆ ในการผลิตสินค้า เมื่อได้ศึกษาลวดลายต่าง ๆ ของผ้าที่มีอยู่และพบว่าแต่ละลวดลายสามารถอธิบายด้วยฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ได้ จึงได้ทำโครงงานนี้ขึ้นเพื่อนำเสนอ การออกแบบลวดลายโดยใช้ เรื่อง กราฟของฟังก์ชันต่าง ๆ ด้วยโปรแกรมThe Geometer's Sketchpad: GSP

วัตถุประสงค์

1. เพื่อใช้ฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์วิเคราะห์ลายผ้าน่านพื้นเมือง
2. เพื่อออกแบบลวดลายผ้าน่าน ลวดลายใหม่ โดยใช้ฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์

สาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง (ในที่นี้ขอนำเสนอเฉพาะชื่อหัวข้อ)

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม ฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันค่าคงตัว การเลื่อนแกน การแปลงทางเรขาคณิต และเทสเซลเลชัน

วิธีดำเนินงาน

ขั้นวางแผน

1) ปรึกษาอาจารย์ที่ปรึกษา
2) กำหนดชื่อโครงงาน เขียนเค้าโครงของโครงงาน

ขั้นตอนปฏิบัติการ

3) ศึกษาเนื้อหาคณิตศาสตร์จากลวดลายผ้า
4) ออกแบบลวดลาย
5) นำลวดลายไปให้กลุ่มแม่บ้านทอ

ขั้นสรุปผลการดำเนินการ

6) ติดตามผลการทอ ปรับปรุงผลงาน
7) สรุปเป็นรูปเล่มรายงาน

ผลการดำเนินงาน

1. การศึกษาลายผ้าน่านในเชิงคณิตศาสตร์

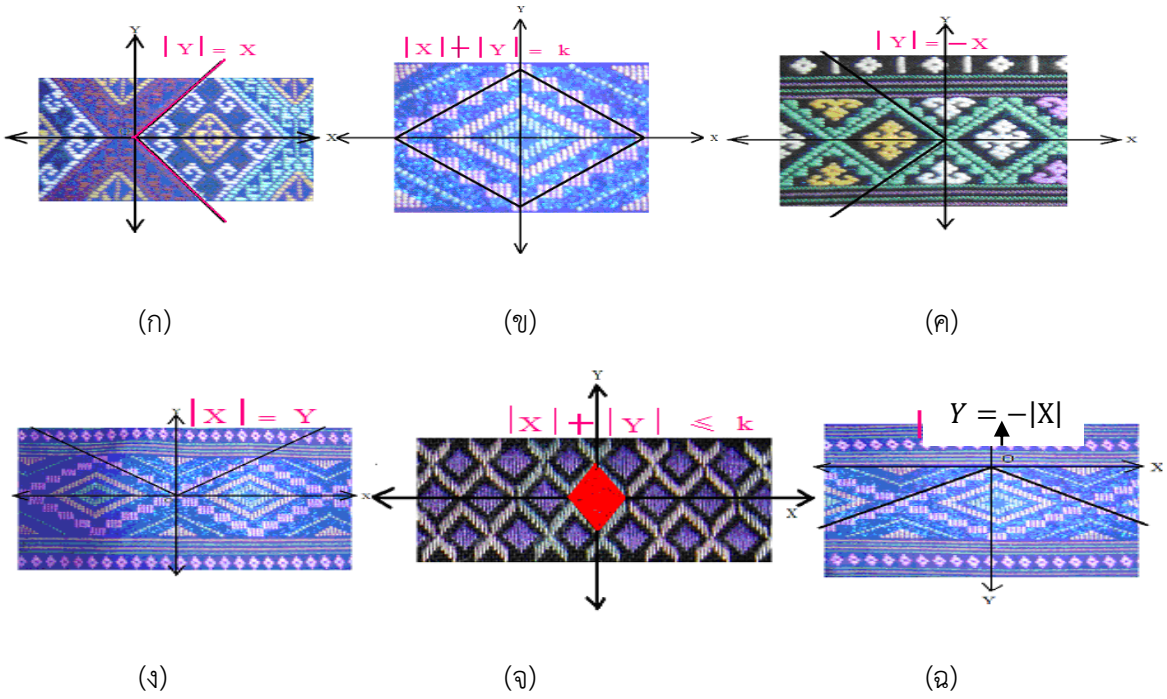
1.1 การวิเคราะห์ลายผ้าน่านและอธิบายด้วยคณิตศาสตร์พื้นฐาน



ภาพที่ 1 ตัวอย่างลายผ้าน่าน

จากลวดลายผ้าน่านดังภาพที่ 1 สามารถใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์อธิบายเนื้อหาในเรื่องรูปเรขาคณิต การสมมาตร การหาแกนสมมาตร การแปลงทางเรขาคณิตซึ่งได้แก่ การเลื่อนแกน การสะท้อน การหมุน และเทสเซลเลชัน

1.2 การอธิบายด้วย ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน การเลื่อนแกน หรือการเลื่อนกราฟของสมการ ตัวอย่างที่แสดงถึงความสัมพันธ์และฟังก์ชันบนลวดลายผ้าน่าน สามารถกำหนดด้วยสมการดังภาพที่ 2

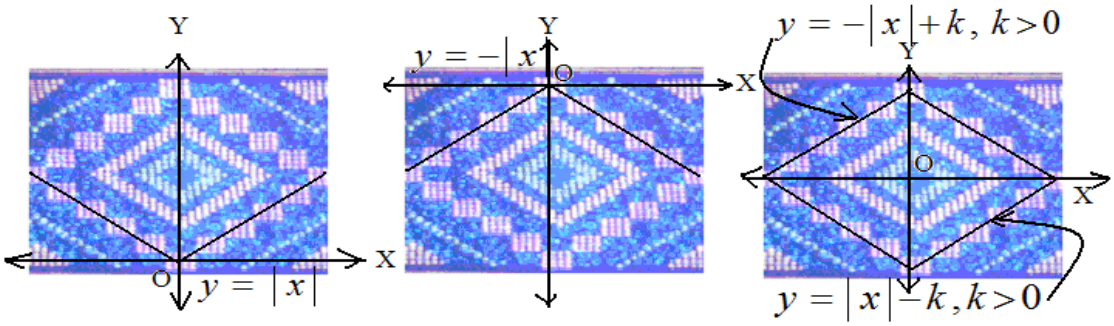


(ก) (ข) (ค)

(ง) (จ) (ฉ)

ภาพที่ 2 แสดงความสัมพันธ์และฟังชันก์บนลายผ้าน่าน

เมื่อสังเกตลักษณะเส้นของลวดลายที่พบจากผ้าน่าน พบว่าลายผ้าน่านส่วนใหญ่มีแต่ลวดลายที่เป็นเส้นตรง ไม่มีลวดลายที่เป็นเส้นโค้ง คณะผู้จัดทำจึงเกิดความคิดในการออกแบบลวดลายของผ้าน่านให้เป็นเส้นโค้งบ้าง จึงไปศึกษาเนื้อหาคณิตศาสตร์เกี่ยวกับสมการที่มีลักษณะกราฟเป็นเส้นโค้ง ได้แก่ (1) กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (2) ฟังก์ชันกำลังสอง (3) ฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียล และ (4) ฟังก์ชันลอการิทึม ซึ่งต่างก็มีกราฟที่มีลักษณะตามต้องการ จากนั้นจึงเลือกวิธีการที่จะเขียนกราฟของสมการดังกล่าวโดยใช้โปรแกรม GSP พร้อมกับหาวิธีการที่จะให้กราฟซ้อนกันมาก ๆ เพื่อให้ได้ลวดลายที่แปลกไปจากเดิมเมื่อกลับไปศึกษาลวดลายผ้าน่านที่มีอยู่เดิมอีกครั้งพบว่าลวดลายผ้าน่านนั้นสามารถอธิบายเป็นฟังก์ชันหลาย ๆ ฟังก์ชันที่เขียนอยู่บนระนาบเดียวกันได้ ลวดลายต่าง ๆ เกิดจากการเลื่อนแกนคู่ขนานหรือการเลื่อนกราฟของสมการนั้นเอง ดังเช่นลวดลายใน ภาพที่ 3

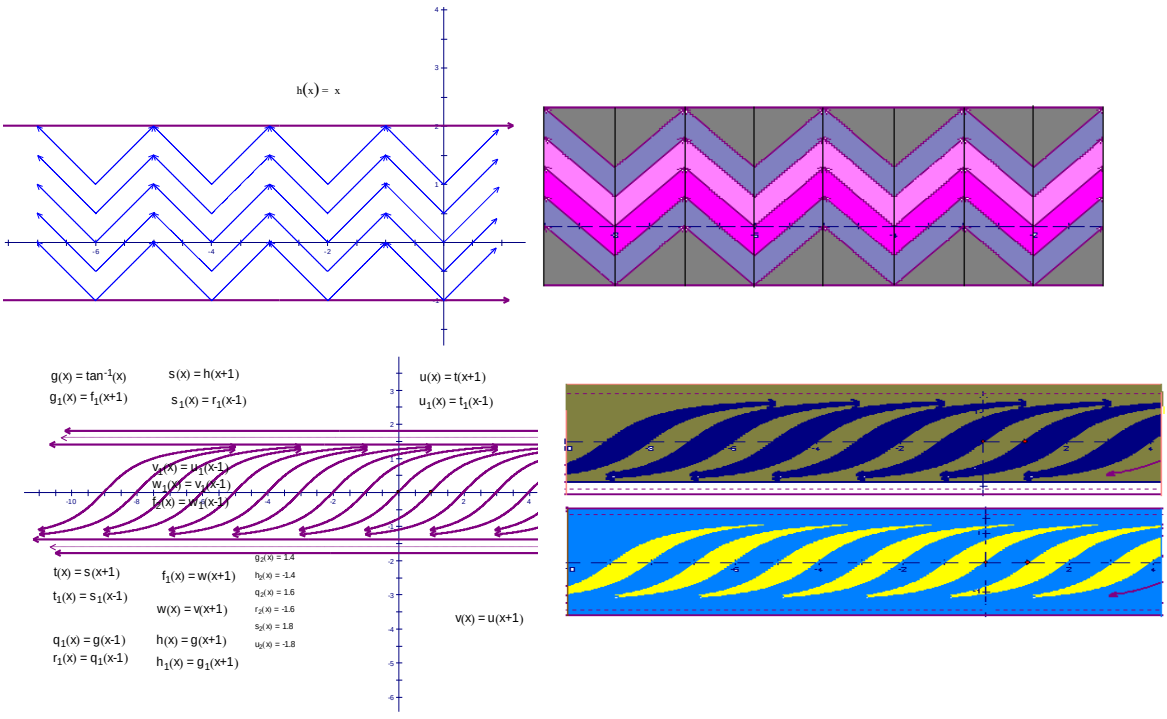


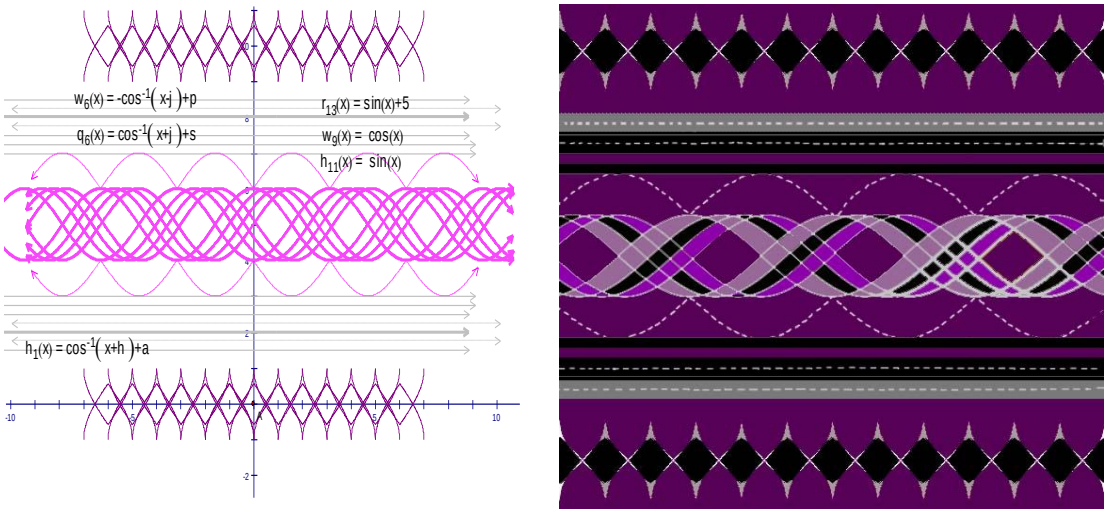
ภาพที่ 3 แสดงขั้นตอนของการอธิบายลายผ้าในเชิงคณิตศาสตร์

ลวดลายผ้าในภาพที่ 3 เกิดจากการเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดด้วยสมการ $y = |x|$ กับ $y = -|x|$ แล้วใช้ความรู้เรื่องการเลื่อนแกนหรือการเลื่อนกราฟของสมการ $y = |x|$ เป็น $y = |x|-k, k>0$ และกราฟของสมการ $y = -|x|$ เป็น $y = -|x|+k,\ k>0$ ดังภาพ

2. การออกแบบลวดลายผ้าน่านลายสามมิติ

ผลที่ได้จากการศึกษาคณะจึงได้นำหลักการของการเลื่อนแกนคู่ขนานหรือการเลื่อนกราฟของสมการของฟังก์ชันไปใช้ในการออกแบบลวดลายผ้าน่านลายใหม่ โดยใช้โปรแกรม GSP และตกแต่งเชิงผ้าด้วยฟังก์ชันต่าง ๆ โดยใช้หลักการเดียวกัน และหลักการสมมาตรของรูปเรขาคณิต เมื่อได้ลวดลายแล้วจึงนำไปทดลองตกแต่งสีสันเพื่อความสวยงาม โดยใช้โปรแกรม Photoshop และโปรแกรม Paintbrush ทำให้ได้ลายผ้าลวดลายสามมิติ ดังตัวอย่างแสดงในภาพที่ 4





ภาพที่ 4 ตัวอย่างลายผ้าน่านที่ออกแบบโดยการเลื่อนกราฟของสมการของฟังก์ชัน

เมื่อได้ลวดลายที่สวยงามแล้ว คุณครูที่ปรึกษาได้ให้ความช่วยเหลือในการเสาะแสวงหากลุ่มแม่บ้านทอผ้าเพื่อให้ทอผ้าตามลวดลายที่ออกแบบไว้ โดยเดินทางไปตามหมู่บ้านต่าง ๆ ในจังหวัดน่านที่มีกลุ่มทอผ้า ปรากฏว่าได้รับความสนใจและได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มแม่บ้านในแต่ละกลุ่มเป็นอย่างดี เพราะถือว่าเป็นงานที่ท้าทายความสามารถของผู้ทอผ้า และทำให้ได้ลวดลายที่แปลกใหม่ ช่วยเพิ่มมูลค่าของผ้าทอเมืองน่าน นอกจากนี้ผู้ทอผ้ายังเห็นการเชื่อมโยงความรู้และเห็นความสำคัญของการเรียนคณิตศาสตร์ พร้อมที่จะให้การสนับสนุน ผู้ที่ทอผ้าตามลายที่ออกแบบนี้จึงถือได้ว่าเป็นส่วนหนึ่งของความสำเร็จของโครงงานนี้



ภาพที่ 5 ตัวอย่างผ้าทอออกแบบโดยการเลื่อนกราฟของสมการของฟังก์ชัน

ข้อเสนอแนะ

1. ควรมีการนำลายผ้าบนผ้าลายน้ำไหลไปเป็นสื่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในชั้นต่าง ๆ เพื่อให้นักเรียนได้ตระหนักถึงคุณค่า และภาคภูมิใจในภูมิปัญญาท้องถิ่นของจังหวัดน่าน
2. ควรจัดให้มีการออกแบบลวดลายที่ละเอียดมากขึ้นโดยใช้คณิตศาสตร์ชั้นสูง
3. จากการได้ศึกษาขั้นตอนการทอผ้าตั้งแต่การเตรียมด้าย การย้อมสี การแกะลาย การทอ สามารถที่จะทำโครงงานแบบบูรณาการได้ เช่น บูรณาการกับวิชาวิทยาศาสตร์ในการศึกษาการย้อมสีจากธรรมชาติ
4. ควรนำลายผ้าที่ได้จากการทำโครงงานนี้เผยแพร่แก่ชุมชน เช่น หน่วยงานของสำนักงานองค์การบริหารส่วนจังหวัด องค์การบริหารส่วนตำบล เพื่อให้เกิดประโยชน์สูงสุด

เอมอร สุมามาลย์ (2549 : 77 – 80) ครูที่ปรึกษาโครงงานแสดงทรรศนะว่า โครงงานคณิตศาสตร์ “จากฟังก์ชันสู่ผ้าน่านลายสามมิติ” นับว่ามีประโยชน์ต่อการจัดการเรียนการสอนในวิชาคณิตศาสตร์เป็นอย่างยิ่ง ทำให้นักเรียนได้เห็นตัวอย่างของการพัฒนากระบวนการคิด การเชื่อมโยงความรู้และการประยุกต์ความรู้คณิตศาสตร์มาใช้ในชีวิตประจำวัน ทำให้การเรียนคณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่ง่าย น่าสนใจ ช่วยให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อการเรียนคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ยังทำให้นักเรียนมองเห็นลู่ทางที่จะนำคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันและ ยังทำให้นักเรียน ผู้ปกครอง ชุมชน ได้ตระหนักถึงประโยชน์และคุณค่าของการเรียนคณิตศาสตร์อีกด้วยแนวคิดและวิธีการทำโครงงานคณิตศาสตร์ “จากฟังก์ชันสู่ผ้าน่านลายสามมิติ” เรื่องนี้ น่าจะเป็นประโยชน์กับเพื่อนครูคณิตศาสตร์ ในการช่วยจุดประกายให้นักเรียนทำโครงงานคณิตศาสตร์เพื่อพัฒนากระบวนการคิดของนักเรียนต่อไป จากการที่โครงงาน “จากฟังก์ชันสู่ผ้าน่านลายสามมิติ” ได้รับรางวัลชนะเลิศ ในการประกวดของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย นับเป็นความภูมิใจและเป็นเกียรติอย่างสูงของนักเรียนครูและผู้ปกครองของโรงเรียนศรีสวัสดิ์วิทยาคารจังหวัดน่าน และของชาวจังหวัดน่านทุกคน

ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง การฝึกทำโครงงานอย่างง่าย

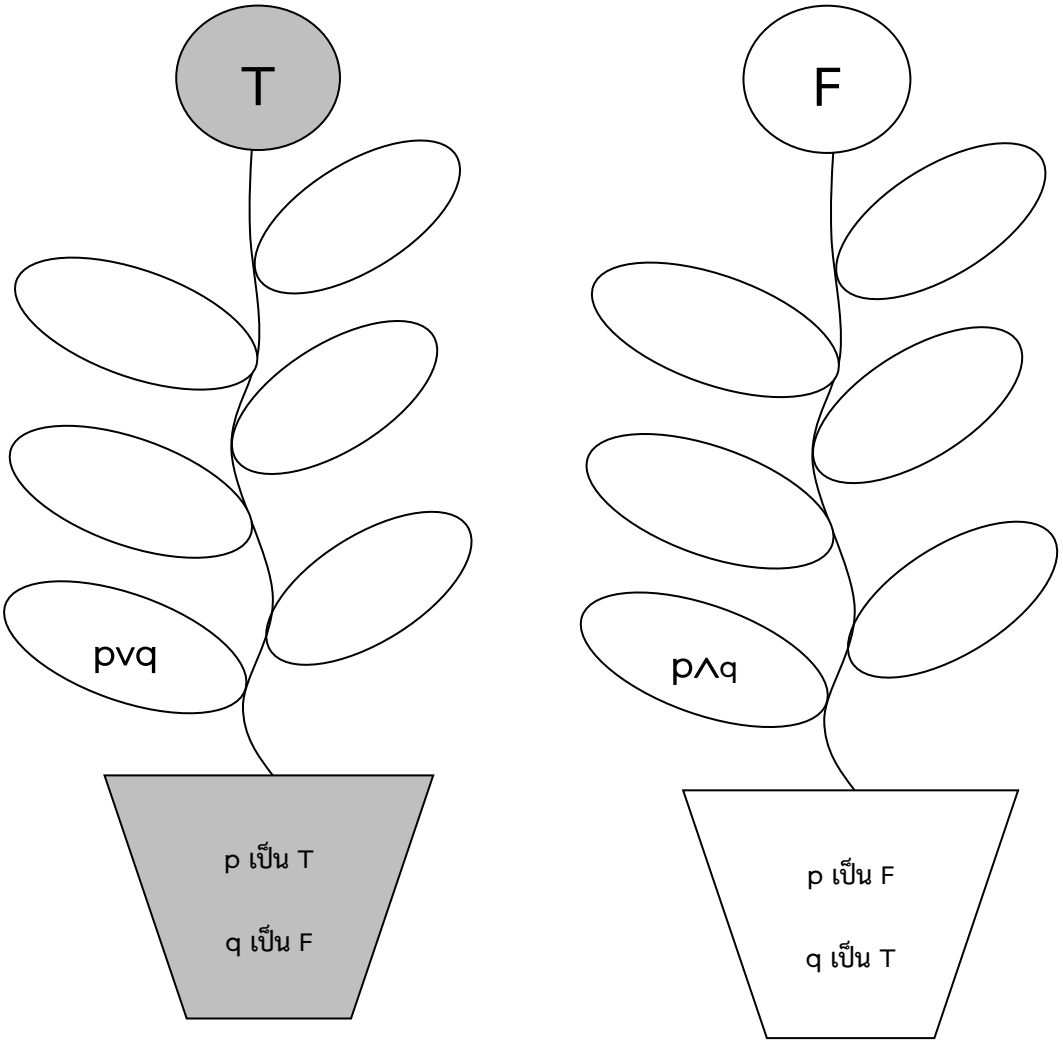
1) โครงงาน ค่าความจริงของประพจน์

ผู้จัดทำ .....**ครูที่ปรึกษา**.....

จุดประสงค์ เพื่อหารูปแบบของประพจน์ที่มีค่าความจริงตามที่กำหนดในดอกไม้

คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องประพจน์ และค่าความจริงของประพจน์

ผลการดำเนินการ



ตารางแสดงค่าความจริงของประพจน์

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

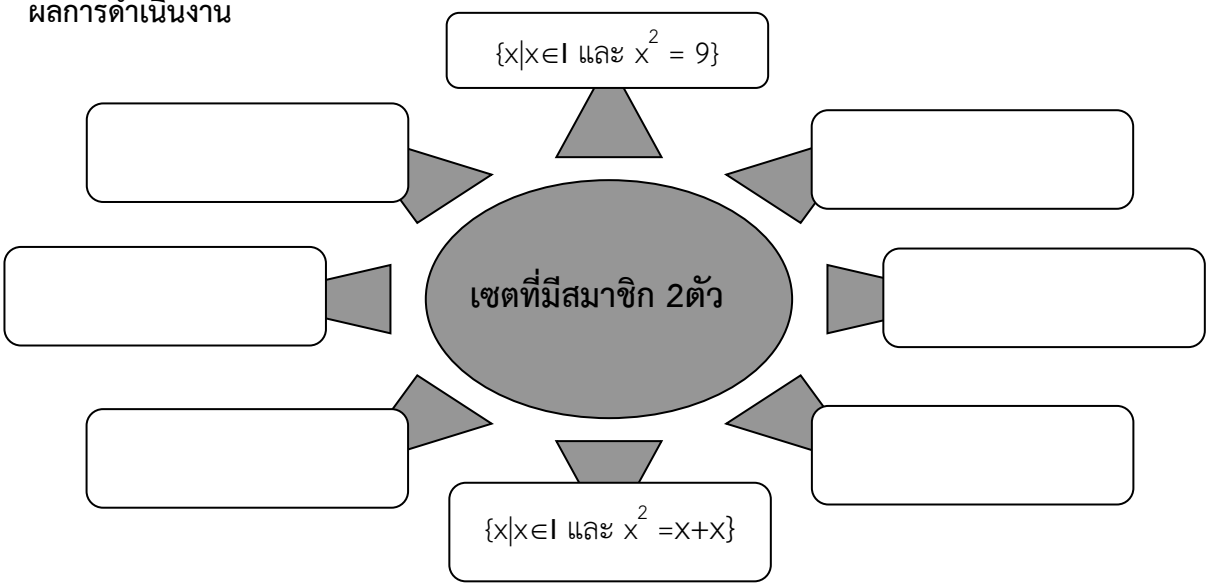
2) โครงงาน เซตที่มีสมาชิก 2 ตัว

ผู้จัดทำ..... **ครูที่ปรึกษา**.....

จุดประสงค์ การเขียนแทนเซตที่มีสมาชิก 2 ตัว

คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง การเขียนแทนเซต และ สมาชิกของเซต

ผลการดำเนินงาน



3) โครงงานแกะรอยลอการิทึม

ผู้จัดทำ..... **ครูที่ปรึกษา**.....

จุดประสงค์ เพื่อสร้างเกมแกะรอยการบวกของลอการิทึม

คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง สมบัติของลอการิทึม log a+ log b = log ab และ log 1 = 0

ผลการดำเนินงาน

log 2 log 30 log 6 log 5log $\frac{1}{15}$ log 30 log $\frac{1}{2}$ log 15	

เมื่อเขียนลูกศรแสดงทิศทาง ร่องรอยของการบวกลอการิทึม ออกจากจำนวนตรงมุมบนซ้ายมือต่อเนื่องไปจนครบทุกจำนวน จะได้ประโยคสัญลักษณ์ทางด้านขวามือ

4) โครงงาน ค้นหาแบบรูปของผลบวกของจำนวนคี่บวก

ผู้จัดทำ.....**ครูที่ปรึกษา**.....

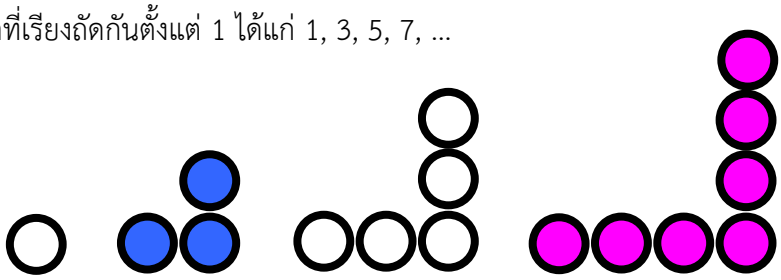
จุดประสงค์

1. เพื่อค้นหาแบบรูปของผลบวกของจำนวนคี่บวกที่เรียงถัดกันตั้งแต่จำนวนที่ 1
2. เพื่อสร้างสูตรในการหาผลบวกของจำนวนคี่บวกที่เรียงถัดกันตั้งแต่จำนวนที่ 1 ถึงจำนวนที่ n

สาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง จำนวนคี่ แบบรูป การใช้ตัวแปรแทนจำนวน

ผลการดำเนินงาน

1. จำนวนคี่บวกที่เรียงถัดกันตั้งแต่ 1 ได้แก่ 1, 3, 5, 7, ...



ผลบวกของจำนวนคี่บวกแสดงได้ดังตาราง

จำนวนคี่	การบวกของจำนวนคี่	ผลบวก	ข้อสังเกต
1 จำนวนแรก	1	1	
2 จำนวนแรก	1 + 3	4	
3 จำนวนแรก	1 + 3 + 5		
4 จำนวนแรก	1 + 3 + 5 + 7		
5 จำนวนแรก			
6 จำนวนแรก			
7 จำนวนแรก			
n จำนวนแรก	1 + 3 + 5 + ... + ...		

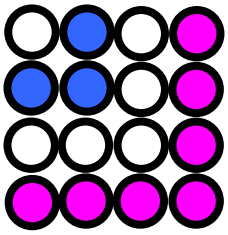
สูตร ผลบวกของจำนวนคี่ n ตัวแรกเท่ากับ .....

ข้อสังเกตเพิ่มเติม 1 = ...

1 + 3 = ...

1 + 3 + 5 = ...

1 + 3 + 5+ 7 = ...



5) ให้ผู้เข้ารับการอบรมทำโครงงานอย่างง่ายที่สอดคล้องกับเนื้อหาคณิตศาสตร์เรื่องใดเรื่องหนึ่ง ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง จากโครงงานอย่างง่ายสู่โครงงานเต็มรูป

คำชี้แจง ให้ผู้เข้ารับการอบรมศึกษา**โครงงานการหาจำนวนตัวประกอบของจำนวนนับ**ค้นหาสมบัติของจำนวนนับที่มีจำนวนตัวประกอบเท่ากับ 2 3 4 หรือ 5 ตัว และ ค้นหาวิธีหาจำนวนตัวประกอบของจำนวนนับใด ๆ

โครงงาน การหาจำนวนตัวประกอบของจำนวนนับ

ผู้จัดทำ .....**ครูที่ปรึกษา** คุณครูปรีชา เนาว์เย็นผล

ความเป็นมา

จำนวนนับบางจำนวนมีจำนวนตัวประกอบต่างกัน แต่ก็มีจำนวนนับบางกลุ่มที่มีจำนวนตัวประกอบเท่ากัน เช่น จำนวน 2, 7, 11, 23, 31 แต่ละจำนวนมีตัวประกอบเพียง 2 ตัว คือ 1 และ จำนวนนับนั้นเอง คณะผู้จัดทำโครงงานมีความสนใจว่าจำนวนนับที่มีจำนวนตัวประกอบเท่ากัน มีสมบัติบางอย่างร่วมกันหรือไม่ ถ้ามีสมบัติดังกล่าวนั้นเป็นอย่างไร และในกรณีทั่วไปจะสามารถหาจำนวนตัวประกอบของจำนวนนับใด ๆ ได้อย่างไร

จุดประสงค์

1. เพื่อค้นหาสมบัติของจำนวนนับที่มีจำนวนตัวประกอบเท่ากับ 2 3 4 หรือ 5 ตัว
2. เพื่อค้นหาวิธีหาจำนวนตัวประกอบของจำนวนนับใด ๆ

สาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ตัวประกอบ ตัวประกอบของจำนวนนับใด คือ จำนวนนับที่นำไปหารจำนวนนับที่กำหนดนั้นได้ลงตัว เช่น ตัวประกอบของ 28 ได้แก่ 1, 2, 4, 7, 14, 28

การแยกตัวประกอบของจำนวนนับ เป็นการเขียนแสดงจำนวนนับที่กำหนดในรูปการคูณกันของจำนวนเฉพาะหรือเขียนแสดงในรูปเลขยกกำลังหรือการคูณกันของเลขยกกำลังที่มีฐานเป็นจำนวนเฉพาะ เช่น

$28 = 2 \times 2 \times 7$ หรือ $2^2 \times 7$

$125 = 5 \times 5 \times 5$ หรือ 5^3

ระยะเวลาดำเนินงาน 1 สัปดาห์

วิธีดำเนินงาน

1. กำหนดจำนวนนับต่าง ๆ แล้วหาตัวประกอบของจำนวนนับนั้น ๆ
2. จัดกลุ่มจำนวนนับตามจำนวนตัวประกอบ แยกเป็นกลุ่มของจำนวนนับที่มีจำนวนของตัวประกอบเท่ากับ 2 3 4 หรือ 5 ตัว แล้วสำรวจหาสมบัติร่วมกันของจำนวนนับในแต่ละกลุ่ม
3. กำหนดจำนวนนับใด ๆ เขียนแสดงการแยกตัวประกอบในรูปเลขยกกำลังหรือการคูณกันของเลขยกกำลังที่มีฐานเป็นจำนวนเฉพาะ แล้วสังเกตความเกี่ยวข้องกันของเลขชี้กำลังและจำนวนตัวประกอบ
4. สรุปและนำเสนอเป็นรายงานและจัดป้ายนิเทศ

ผลของการดำเนินงาน

1. สมบัติของจำนวนนับที่มีจำนวนตัวประกอบเท่ากับ 2 3 4 หรือ 5 ตัว

    1) จำนวนนับที่มีตัวประกอบ 2 ตัว เช่น

จำนวนนับ	2	11					
ตัวประกอบ	1, 2						

สมบัติของจำนวนนับที่มีตัวประกอบ 2 ตัว

.....

.....

.....

    2) จำนวนนับที่มีตัวประกอบ 3 ตัว เช่น

จำนวนนับ	4	9				
ตัวประกอบ	1, 2, 4					

สมบัติของจำนวนนับที่มีตัวประกอบ 3 ตัว

.....

.....

.....

3) จำนวนนับที่มีตัวประกอบ 4 ตัว เช่น

3.1

จำนวนนับ	6						
ตัวประกอบ	1, 2, 3, 6						

สมบัติของจำนวนนับที่มีตัวประกอบ 4 ตัว

.....

.....

.....

3.2

จำนวนนับ	8						
ตัวประกอบ	1, 2, 4, 8						

สมบัติของจำนวนนับที่มีตัวประกอบ 4 ตัว

.....

.....

.....

5) จำนวนนับที่มีตัวประกอบ 5 ตัว เช่น

จำนวนนับ	16			
ตัวประกอบ	1, 2, 4, 8, 16			

สมบัติของจำนวนนับที่มีตัวประกอบ 5 ตัว

.....

.....

.....

2. วิธีหาจำนวนตัวประกอบของจำนวนนับใด ๆ

พิจารณาการแยกตัวประกอบของจำนวนนับที่เขียนในรูปการคูณกันของจำนวนเฉพาะยกกำลัง การตั้งข้อสังเกตของความสัมพันธ์ของเลขชี้กำลังและจำนวนตัวประกอบของจำนวนนับนั้น ดังตาราง

จำนวนนับ	ตัวประกอบ	จำนวนตัวประกอบ	การแยกตัวประกอบ	ข้อสังเกต
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	6	$2^2 \times 3^1$	(2+1)(1+1)=6
100	1, 2, 4, 5,10, 20, 25, 50, 100	9	$2^2 \times 5^2$	(2+1)(2+1)=9
180	1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180	18	$2^2 \times 3^2 \times 5^1$	

เมื่อแสดงการแยกตัวประกอบของจำนวนนับโดยเขียนในรูปการคูณกันของจำนวนเฉพาะยกกำลัง *จำนวนตัวประกอบของจำนวนนับนั้นหาได้จาก*

.....

.....

.....

สรุปวิธีหาจำนวนตัวประกอบของจำนวนนับ n

.....

.....

.....

ใบกิจกรรมที่ 3 เรื่อง การฝึกทำโครงงานจากเค้าโครงของโครงงาน

คำชี้แจง ให้ผู้เข้ารับการอบรมแต่ละกลุ่ม เลือกเค้าโครงของโครงงานต่อไปนี้**เพียง 1 โครงงาน** แล้วลงมือปฏิบัติตามเค้าโครง จากนั้นนำเสนอผลการดำเนินงานข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

1) โครงงาน ผลบวกของจำนวนถัดกัน

ผู้จัดทำ.....**ครูที่ปรึกษา** คุณครูปรีชา เนาว์เย็นผล

ความเป็นมา

จำนวนนับที่เรียงติดต่อกันและมีผลต่างเป็น 1 เรียกว่า **จำนวนถัดกัน** (consecutive numbers) เช่น 11, 12, 13 จากการสังเกตจำนวนนับพบว่าจำนวนนับหลายจำนวนสามารถเขียนได้ในรูปผลบวกของจำนวนถัดกัน เช่น 6 = 1 + 2 + 3 จำนวนนับบางจำนวนสามารถเขียนได้ในรูปผลบวกของจำนวนถัดกันมากกว่าหนึ่งแบบ เช่น 9 = 4 + 5 = 2 + 3 + 4 ในการจัดทำโครงงานนี้ ผู้จัดทำสนใจที่จะศึกษาแบบรูปของจำนวนที่เขียนได้ในรูปผลบวกของจำนวนถัดกัน 2 จำนวน 3 จำนวน 4 จำนวน ... และ สมบัติอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง

จุดประสงค์

1. เพื่อศึกษาแบบรูปของจำนวนที่สามารถเขียนได้ในรูปผลบวกของจำนวนถัดกัน 2 จำนวน 3 จำนวน 4 จำนวน และต่อ ๆ ไป รวมทั้งสมบัติอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง
2. เพื่อหารูปทั่วไปของแบบรูปของจำนวนที่สามารถเขียนได้ในรูปผลบวกของจำนวนถัดกัน 2 จำนวน 3 จำนวน 4 จำนวน และต่อ ๆ ไป

สาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

จำนวนนับ จำนวนถัดกัน การสืบเสาะหาแบบรูปของจำนวน และการเขียนในรูปทั่วไป

วิธีดำเนินงาน

1. เขียนจำนวนนับ 1 – 30 ในรูปผลบวกของจำนวนถัดกัน โดยเริ่มจากการเขียนในรูปผลบวกของจำนวนถัดกัน 2 จำนวน จำนวนถัดกัน 3 จำนวน 4 จำนวน และต่อ ๆ ไป (ถ้าทำได้)
2. สังเกต สืบเสาะหาแบบรูปของจำนวน
3. ศึกษาแบบรูปของจำนวนที่สามารถเขียนได้ในรูปผลบวกของจำนวนถัดกัน 2 จำนวน 3 จำนวน 4 จำนวน และต่อ ๆ ไป เพื่อตอบคำถามว่า จำนวนนับในลักษณะใดที่สามารถเขียนได้ในรูปผลบวกของจำนวนถัดกัน 3 จำนวน 4 จำนวน และต่อ ๆ ไปสำรวจและสร้างข้อความคาดการณ์ ด้วยการอธิบายเชิงพรรณนา และเขียนในรูปทั่วไปโดยการใช้ตัวแปร

4. ศึกษาแบบรูปของจำนวนที่**ไม่**สามารถเขียนได้ในรูปผลบวกของจำนวนถัดกัน 2 จำนวน สร้างข้อความคาดการณ์ด้วยการอธิบายเชิงพรรณนา และเขียนในรูปทั่วไปโดยการใช้ตัวแปร

ผลการดำเนินการ

1. การเขียนจำนวนนับในรูปผลบวกของจำนวนถัดกัน นำเสนอในรูปตารางได้ดังนี้

ผลบวกของจำนวนถัดกัน

จำนวนนับ	2 จำนวน	3 จำนวน	4 จำนวน	5 จำนวน	6 จำนวน	7 จำนวน
1						
2						
3	1+2					
4						
5	2+3					
6		1+2+3				
7	3+4					
8						
9	4+5	2+3+4				
10			1+2+3+4			
11						
12						
13						
14			2+3+4+5			
15						
16						
17						
18			3+4+5+6			
19						
20						
21						
22						
23						
24						

จำนวนนับ	2 จำนวน	3 จำนวน	4 จำนวน	5 จำนวน	6 จำนวน	7 จำนวน
25						
26						
27		8+9+10				
28						
29						
30						
31						
32						
33						
34						
35						

2. จากตารางจะพบว่า

1) จำนวนที่สามารถเขียนได้ในรูปผลบวกของจำนวนถัดกัน 2 จำนวน ได้แก่ 3, 5, 7, 9, 11, ... เป็นจำนวนคี่ เริ่มจาก 3 จำนวนเหล่านี้มีรูปทั่วไปเป็น

.....

.....

.....

.....

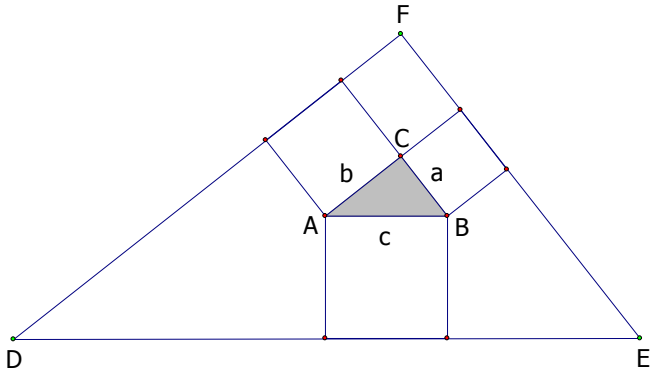
.....

2) โครงงาน รูปสามเหลี่ยมที่สร้างจากรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

ผู้จัดทำ ..... **ครูที่ปรึกษา** คุณครูปรีชา เนาว์เย็นผล

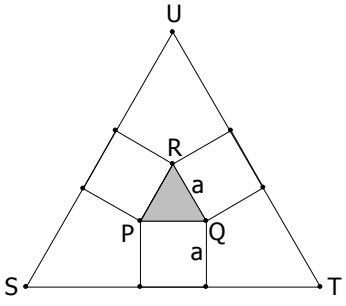
ความเป็นมา

ทฤษฎีบทพีทาโกรัสกล่าวว่า สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก กล่าวคือ ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังรูป จะได้ว่า $c^2 = a^2 + b^2$



จากรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ถ้าต่อด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ทั้งสามรูปซึ่งเป็นด้านที่อยู่ตรงข้ามและขนานกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ให้พบกันจะได้รูปสามเหลี่ยม DEF ใหญ่อีกรูปหนึ่งน่าสนใจว่า พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม DEF ใหญ่รูปนี้จะมีความสัมพันธ์กับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปเดิมหรือไม่อย่างไร

และโดยอาศัยวิธีการทำนองเดียวกันนี้ ถ้าเริ่มต้นด้วยรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า PQR จะเกิดผลอย่างไรกับรูปสามเหลี่ยม STU ที่เกิดขึ้น



จุดประสงค์

1. เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC กับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF
2. เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า PQR กับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า STU

สาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รูปสามเหลี่ยมคล้าย อัตราส่วนตรีโกณมิติ

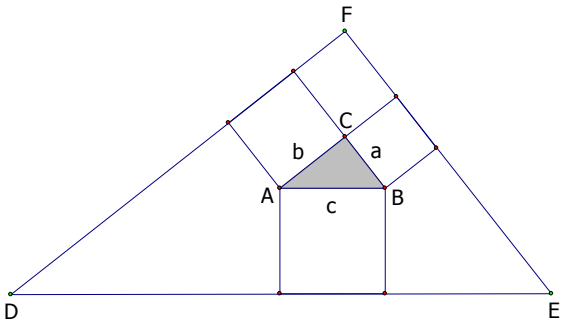
ระยะเวลาดำเนินงาน 1 สัปดาห์

วิธีดำเนินงาน

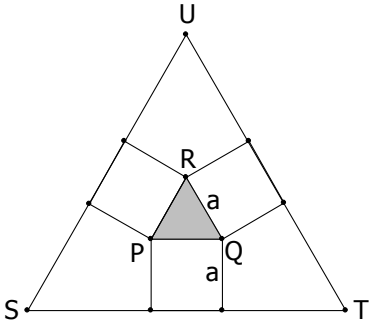
1. สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยใช้โปรแกรม GSP สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และต่อด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งสามรูปซึ่งเป็นด้านที่อยู่ตรงข้ามและขนานกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ให้พบกันจะได้รูปสามเหลี่ยม DEF
2. สำรวจพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF โดยการวัดพื้นที่และการปรับเปลี่ยนขนาดของรูปสามเหลี่ยม ABC ว่าพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมทั้งสองรูปมีความสัมพันธ์กันอย่างไร
3. หาคำอธิบายเชิงเหตุผล โดยศึกษาเนื้อหาคณิตศาสตร์เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รูปสามเหลี่ยมคล้าย อัตราส่วนตรีโกณมิติ
4. การศึกษาศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า PQR กับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า STU ใช้วิธีการทำนองเดียวกัน

ผลการดำเนินงาน

1. การศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC กับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF



2. การศึกษาศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า PQR กับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า STU

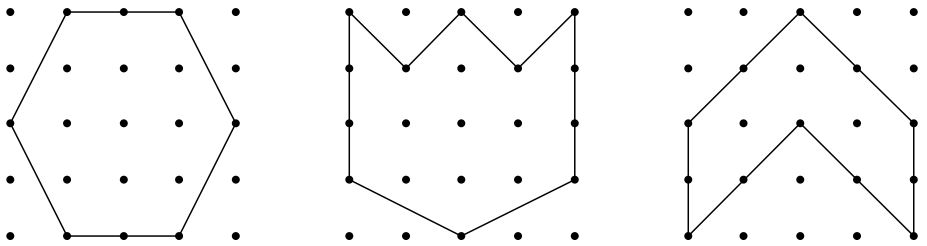


3) โครงงานพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมบนกระดาษจุด

ผู้จัดทำ .....**ครูที่ปรึกษา** คุณครูปรีชา เนาว์เย็นผล

ความเป็นมา

บนกระดาษจุด (dot paper) ที่มีระยะห่างระหว่างจุด 1 หน่วยหรือกระดานตะปูสามารถสร้างรูปหลายเหลี่ยมโดยใช้จุดหรือตำแหน่งของตะปูเป็นจุดยอดมุม น่าศึกษาว่าการนับจำนวนจุดบนเส้นรอบรูปและจำนวนจุดที่อยู่ภายในรูปหลายเหลี่ยมจะสามารถนำมาหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมได้หรือไม่



จุดประสงค์

1. เพื่อหาความสัมพันธ์ของจำนวนจุดบนเส้นรอบรูป และจำนวนจุดที่อยู่ภายในรูปหลายเหลี่ยมกับพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่มีจุดยอดมุมอยู่ที่จุดบนกระดาษจุดระยะห่างระหว่างจุด 1 หน่วย
2. เพื่อออกแบบลวดลายโดยใช้รูปหลายเหลี่ยมบนกระดาษจุดและแสดงการหาพื้นที่ของรูป

คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

พื้นที่ แบบรูป พหุนาม

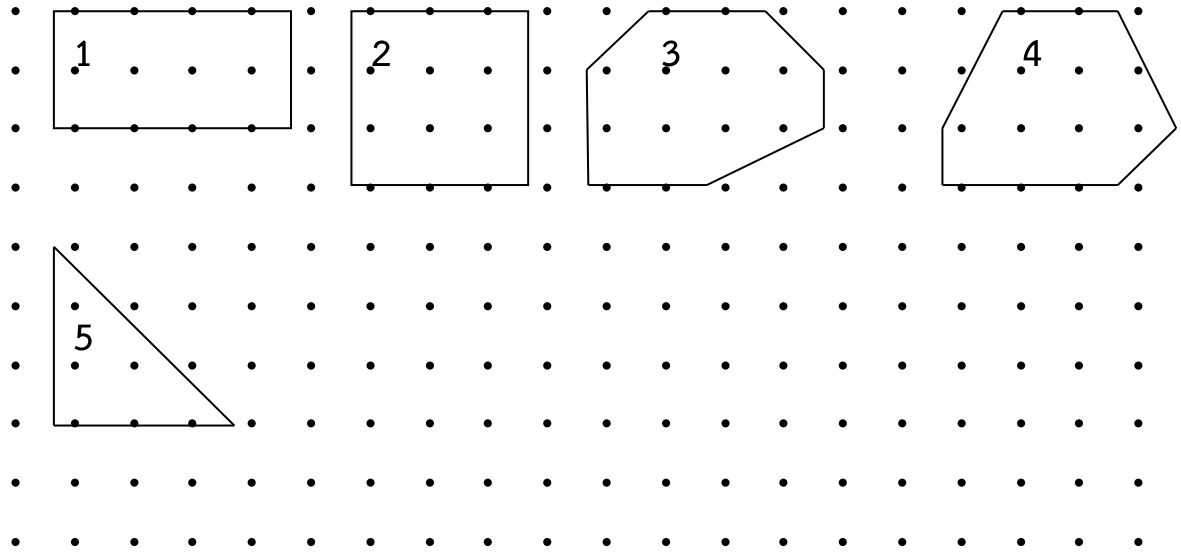
ระยะเวลาดำเนินงาน ..... สัปดาห์

วิธีดำเนินงาน

1. สร้างรูปหลายเหลี่ยมหลาย ๆ รูป ที่มีจุดยอดมุมอยู่ที่จุดบนกระดาษจุด นับจำนวนจุดบนเส้นรอบรูป และจำนวนจุดที่อยู่ภายในรูปหลายเหลี่ยม และหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมโดยการนับจำนวนช่องตาราง
2. สร้างตารางบันทึกข้อมูล จำนวนจุดบนเส้นรอบรูป จำนวนจุดที่อยู่ภายในรูป พื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม (โดยการนับช่อง) และข้อสังเกต
3. วิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของจำนวนจุดบนเส้นรอบรูป และจำนวนจุดที่อยู่ภายในรูปหลายเหลี่ยมกับพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม
4. ออกแบบลวดลายโดยใช้รูปหลายเหลี่ยมบนกระดาษจุดและแสดงการหาพื้นที่ของรูป

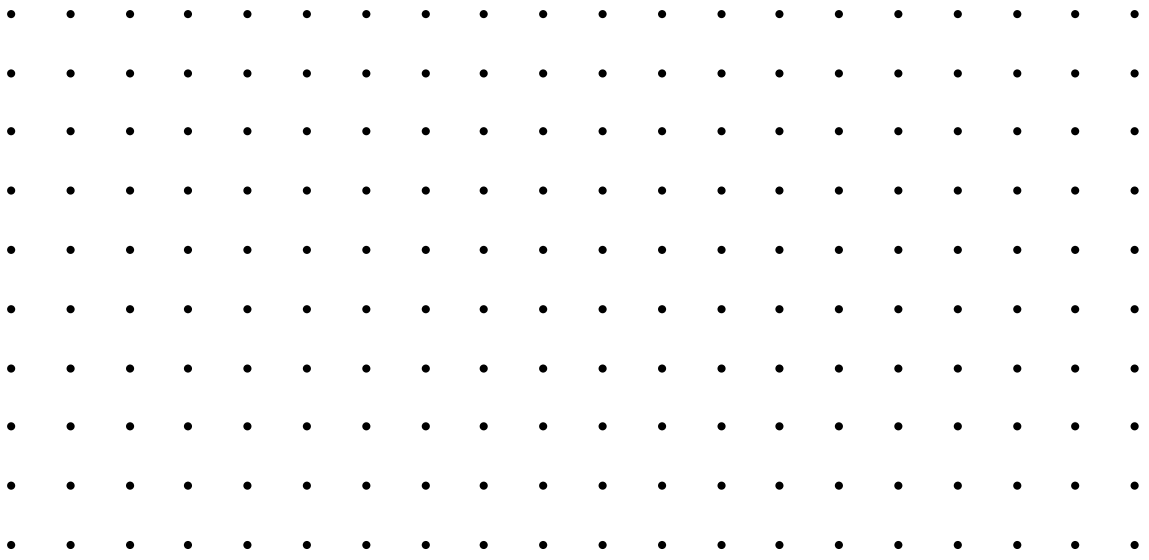
ผลการดำเนินงาน

1. การหาความสัมพันธ์ของจำนวนจุดบนเส้นรอบรูป และจำนวนจุดที่อยู่ภายในรูปหลายเหลี่ยมกับพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่มีจุดยอดมุมอยู่ที่จุดบนกระดาษจุดระยะห่างระหว่างจุด 1 หน่วย



รูปที่	**จำนวนจุด ที่เส้นขอบ (B)**	**จำนวนจุด ภายในรูป (I)**	**พื้นที่จากการนับ (A) ตารางหน่วย**	**ข้อสังเกต**
1	12	3	8	
2				
3				
4	9	6	9.5	
5				
6				
7				
8				

2. การออกแบบลวดลายโดยใช้รูปหลายเหลี่ยมบนกระดาษจุดและแสดงการหาพื้นที่ของรูป



เอกสารสำหรับวิทยากร

แบบบันทึกผลการประเมิน เรื่อง ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

เลขที่	ชื่อ-สกุล	ชิ้นงาน (2 คะแนน)	การนำเสนอผลงานกลุ่ม (15 คะแนน)	รวม (17 คะแนน)
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				

ลงชื่อ.....วิทยากร

วัน/เดือน/ปี.....

แบบประเมินการนำเสนอผลงาน

คำชี้แจง : ให้เขียนเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องตามความเห็นของท่านที่ตรงกับความเป็นจริงมากที่สุด

ที่	ชื่อ-สกุล	ความครอบคลุมเนื้อหา	ความถูกต้องตรงประเด็น	การเสนอความคิดเห็น	แนวทางประยุกต์สู่การปฏิบัติ	การเป็นผู้นำหรือผู้ตามที่ดี	การตรงเวลา	รวม (15 คะแนน)
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								

ลงชื่อ.....วิทยากร

วันที่ประเมิน.....

เรื่อง การใช้ ICT ในการสอน

แผนการอบรม

แผนการอบรมครูคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สำหรับครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่

เรื่อง การใช้ ICT ในการสอน

เวลา 4 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์ เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรม

1. มีความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับขอบข่ายการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) เรื่อง ฟังก์ชัน ภาคตัดกรวย และ เวกเตอร์
2. มีความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับความเข้าใจคลาดเคลื่อนของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) เรื่อง ฟังก์ชัน ภาคตัดกรวย และเวกเตอร์
3. สามารถออกแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้และได้แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) เรื่อง ฟังก์ชัน ภาคตัดกรวย และเวกเตอร์

สาระการเรียนรู้

1. การใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)
2. เนื้อหาสาระ
   - เรื่อง ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
   - เรื่อง ภาคตัดกรวย วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา
   - เรื่อง เวกเตอร์ ระบบพิกัดฉากสามมิติ การบวกเวกเตอร์สองมิติ เวกเตอร์สามมิติ
3. การใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการสอน เรื่อง ฟังก์ชัน ภาคตัดกรวย และเวกเตอร์

สาระสำคัญ

<u>ฟังก์ชัน</u>

1. การฝึกปฏิบัติการใช้งานโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการสำรวจกราฟของฟังก์ชัน
   1) การสำรวจกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล
   2) การสำรวจกราฟของฟังก์ชันลอการิทึม
   3) การสำรวจกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

2. ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ที่มีสมาชิกในโดเมนแต่ละตัวจับคู่กับเรนจ์ของความสัมพันธ์เพียงตัวเดียวเท่านั้น

> บทนิยาม ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (exponential function) คือ ฟังก์ชัน
>
> $$f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = a^x,\ a \in R, a > 0,\ a \neq 1\}$$

โดเมน ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ เซตของจำนวนจริงบวก

กราฟของฟังก์ชัน $y = a^x$, $a \in R$, $a > 0$ และ $a \neq 1$ ไม่ตัดแกน X และผ่านจุด (0, 1) เสมอทั้งนี้เนื่องจาก $a^0 = 1$

> ถ้า $a > 1$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
> ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันลด

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเป็นฟังก์ชัน 1 - 1 จาก R ไปทั่วถึง R^+ โดยสมบัติของฟังก์ชัน 1 - 1 จะได้ว่า $a^x = a^y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

3. ฟังก์ชันลอการิทึม (logarithmic function) คือ $\{(x, y) \in R^+ \times R \mid y = \log_a x,\ a \in R,\ a > 0, a \neq 1\}$ เป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $\{(x, y) \in R \times R^+ \mid y = a^x, a \in R, a > 0, a \neq 1\}$

โดเมนของฟังก์ชันลอการิทึม คือ เซตของจำนวนจริงบวก

เรนจ์ ของฟังก์ชันลอการิทึม คือ เซตของจำนวนจริง

กราฟของฟังก์ชัน $y = \log_a x$, $a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$ ไม่ตัดแกน Y และผ่านจุด (1, 0) เสมอทั้งนี้เนื่องจาก $\log_a 1 = 0$

ถ้า $a > 1$ แล้ว $y = \log_a x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $y = \log_a x$ เป็นฟังก์ชันลด

ฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชัน 1 - 1 จาก R^+ ไปทั่วถึง R โดยสมบัติของฟังก์ชัน 1 - 1 จะได้ว่า $\log_a x = \log_a y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

4. กำหนดฟังก์ชัน $f : R \longrightarrow R$ และ $g : R \longrightarrow R$ โดยที่สำหรับแต่ละจำนวนจริง θ ใด ๆ $f(\theta) = x$ และ $g(\theta) = y$ เมื่อ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1, 0) ยาว $|\theta|$ หน่วย เมื่อ $\theta > 0$ วัดทวนเข็มนาฬิกา และเมื่อ $\theta < 0$ วัดตามเข็มนาฬิกา เรียกฟังก์ชัน g และ f นี้ว่า ฟังก์ชันไซน์ (sine function) และฟังก์ชันโคไซน์ (cosine function) ตามลำดับ และจะ

เขียนแทน g ด้วย sin และเขียนแทน f ด้วย cos ซึ่ง $y = \sin\theta$ และ $x = \cos\theta$ ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชันทั้งสองคือเซตของจำนวนจริง และเรนจ์ของฟังก์ชันทั้งสอง คือ เซตของจำนวนจริง ตั้งแต่ –1 ถึง 1

ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ นิยามโดยอาศัยฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ ดังนี้

สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \cos\theta \neq 0$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \sin\theta \neq 0$$

<u>ภาคตัดกรวย</u>

1. การฝึกปฏิบัติการใช้งานโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการสำรวจภาคตัดกรวย

   1) การสำรวจวงรี

   2) การสำรวจพาราโบลา

   3) การสำรวจไฮเพอร์โบลา

2. ภาคตัดกรวย คือรูปในระนาบที่เกิดจากการตัดกันของระนาบกับกรวย เมื่อระนาบตั้งฉากกับแกนของกรวย ระนาบตัดกรวยข้างเดียว ได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า **วงกลม** (circle) เมื่อระนาบไม่ตั้งฉากกับแกนของกรวยแต่ทำมุมแหลมกับแกนของกรวยขนาดใหญ่กว่า α ระนาบจะตัดกรวยข้างเดียวได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า **วงรี** (ellipse) เมื่อระนาบขนานกับตัวก่อกำเนิดของกรวย ระนาบจะตัดกรวยข้างเดียวได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า **พาราโบลา** (parabola) และเมื่อระนาบขนานกับแกนของกรวย ระนาบจะตัดกรวยสองข้างได้ภาคตัดกรวย ที่เรียกว่า **ไฮเพอร์โบลา** (hyperbola)

3. วงกลม (circle) คือเซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า **จุดศูนย์กลาง** (center) ของวงกลมและระยะทางคงตัวดังกล่าวเรียกว่า **รัศมี** (radius) ของวงกลม

ความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ y ที่มีสมการอยู่ในรูป $x^2 + y^2 = r^2$ ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) และ รัศมียาว r หน่วย เรียกสมการนี้ว่า สมการของวงกลม

สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และรัศมียาว r หน่วย คือ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ เรียกสมการนี้ว่า รูปแบบมาตรฐานของสมการของวงกลม

4. วงรี (ellipse) คือเซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังจุด F_1 และ F_2 ที่ตรึงอยู่กับที่มีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวนี้ต้องมากกว่าระยะห่างระหว่างจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด จุดสองจุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า **โฟกัส** (focus) ของวงรี

ความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ y ที่มีสมการอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ หรือ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ เมื่อ $a>b>0$ ซึ่งมีกราฟเป็นวงรี เรียกสมการนี้ว่า สมการของวงรี

5. พาราโบลา (parabola) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งห่างจากจุด F ที่ตรึงอยู่กับที่จุดหนึ่งและเส้นตรง l ที่ตรึงอยู่กับที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้ เรียกว่า **โฟกัส** และเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า **เส้นบังคับ** หรือ **ไดเรกตริกซ์** (directrix) ของพาราโบลา

ความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ y ที่มีสมการอยู่ในรูป $x^2 = 4py$ หรือ $y^2 = 4px$ ซึ่งมีกราฟเป็นพาราโบลา เรียกสมการนี้ว่า สมการของพาราโบลา

เลตัสเรกตัม (latus rectum) คือ คอร์ดที่ตั้งฉากกับแกนของพาราโบลาและผ่านโฟกัสของพาราโบลา และส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายอยู่บนพาราโบลาเรียกว่า **คอร์ด** (chord) ของพาราโบลา

6. ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังจุด F_1 และจุด F_2 ที่ตรึงอยู่กับที่มีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวน้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสอง จุด F_1 และจุด F_2 ดังกล่าวนี้ เรียกว่า **โฟกัส** ของไฮเพอร์โบลา

ความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ y ที่มีสมการอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ หรือ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ เมื่อ $a>0, b>0$ ซึ่งมีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา เรียกสมการนี้ว่า สมการของไฮเพอร์โบลา

<u>เวกเตอร์</u>

1. การฝึกปฏิบัติการใช้งานโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการสำรวจกราฟเวกเตอร์

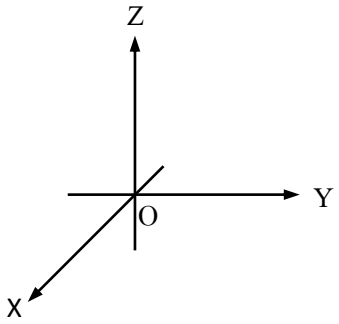
   1) การสำรวจเกี่ยวกับระบบพิกัดฉากสามมิติ

   2) การสำรวจเกี่ยวกับการบวกเวกเตอร์สองมิติ

   3) การสำรวจเกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติ

2. ระบบพิกัดฉากสามมิติ

กำหนดเส้นตรง XX', YY'และ ZZ' เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด O และตั้งฉากซึ่งกันและกัน ถ้าให้เส้นตรงทั้งสามเป็นเส้นจำนวนจริง (real number line) จะเรียกเส้นตรง XX', YY' และ ZZ' ว่า **แกนพิกัด X**, **แกนพิกัด Y** และ **แกนพิกัด Z** หรือเรียกสั้น ๆ ว่า **แกน X** (x–axis) **แกน Y** (y–axis) และ **แกน Z** (z–axis) ตามลำดับ และเรียกจุด O ซึ่งเป็นจุดตัดของแกน X แกน Y และ แกน Z ว่า **จุดกำเนิด** (origin) ดังรูป



ระนาบ XY ระนาบ YZ และระนาบ XZ ทั้งสามระนาบดังกล่าวจะแบ่งระบบพิกัดฉากสามมิติออกเป็น 8 บริเวณ ดังนี้

อัฐภาคที่ 3	อัฐภาคที่ 2
อัฐภาคที่ 4	อัฐภาคที่ 1

ด้านบน (แกน z ทางบวก)

อัฐภาคที่ 7	อัฐภาคที่ 6
อัฐภาคที่ 8	อัฐภาคที่ 5

ด้านล่าง (แกน z ทางลบ)

เมื่อกำหนดจุด P เป็นจุดใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ จะระบุตำแหน่งของจุด P หรือพิกัดของจุด P โดยใช้จำนวนจริงสามจำนวนเรียงกันตามลำดับหรือเรียกว่า **สามสิ่งอันดับ** (ordered triple) ในรูป (x, y, z)

3. ปริมาณเวกเตอร์

3.1 การบอกปริมาณแบ่งออกเป็นสองประเภท คือปริมาณที่มีแต่ขนาดเพียงอย่างเดียว เรียกว่า ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity) และส่วนปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เรียกว่า ปริมาณเวกเตอร์ (vector quantity) หรือเรียกสั้น ๆ ว่า เวกเตอร์ (vector)

3.2 ปริมาณเวกเตอร์ ในเชิงเรขาคณิตแทนได้ด้วยส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทางโดยความยาวของส่วนของเส้นตรงบอกขนาดของเวกเตอร์และหัวลูกศรบอกทิศทางของเวกเตอร์

4. เวกเตอร์

4.1 เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ

นอกจากการใช้ส่วนของเส้นตรงระบุทิศทางแทนเวกเตอร์ดังในข้อ 2.2 แล้วในระบบพิกัดฉากสองมิติ สำหรับเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ ใด ๆ ที่มีจุดเริ่มต้นที่ A (a_1, a_2) และจุดสิ้นสุดที่ B (b_1, b_2) สามารถเขียนในรูป $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ เมื่อ $x_1 = b_1 - a_1$ และ $x_2 = b_2 - a_2$

4.2 เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

การเขียนแทนเวกเตอร์ในระบบพิกัดสามมิติในรูปแบบ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ทำได้ในทำนองเดียวกับการเขียนแทนเวกเตอร์ในระบบพิกัดสองมิติ โดยอาศัยความรู้เรื่องระบบพิกัดฉากสามมิติในข้อ 1 เพื่อระบุพิกัดของจุด จะได้ว่า สำหรับเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ ใด ๆ ในระบบพิกัดสามมิติ ที่มีจุดเริ่มต้นที่ A (a_1, a_2, a_3) และจุดสิ้นสุดที่ B (b_1, b_2, b_3) จะเขียนแทนเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ ด้วยรูปแบบ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ เมื่อ $x_1 = b_1 - a_1$, $x_2 = b_2 - a_2$ และ $x_3 = b_3 - a_3$

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน/ ยาก

1. ครูมักใช้สื่อที่สร้างจากโปรแกรม GSP ก่อนที่ผู้เรียนจะมีความรู้พื้นฐาน หรือก่อนที่ผู้เรียนจะเขียนกราฟได้

2. ครูมักใช้สื่อที่สร้างจากโปรแกรม GSP ก่อนที่ผู้เรียนจะมีความรู้พื้นฐาน หรือก่นอที่ผู้เรียนจะมีความคิดรวบยอดที่สำคัญ เกี่ยวกับประมาณเวกเตอร์

3. ครูมักใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) นำเสนองานแทน Microsoft PowerPoint

สื่อและแหล่งการเรียนรู้

1. สำหรับผู้เข้ารับการอบรม

1.1 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1: เอกสารเพิ่มเติม การใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการสอน เรื่อง ฟังก์ชัน

1.2 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 2: เอกสารเพิ่มเติม การใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการสอน เรื่อง ภาคตัดกรวย

1.3 เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 3: เอกสารเพิ่มเติม การใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการสอน เรื่อง เวกเตอร์

1.4 สื่อที่สร้างจากโปรแกรม GSP ประกอบการฝึกปฏิบัติ ดังนี้

1) แฟ้ม การแสดงฟังก์ชันอย่างพลวัต

2) แฟ้ม จากกราฟรางเลื่อนสู่ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

3) แฟ้ม ฟังก์ชันประกอบ

4) แฟ้ม ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

5) แฟ้ม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

6) แฟ้ม แกน X เป็นเรเดียน

7) แฟ้ม ฟังก์ชันอื่น ๆ

1.5 สื่อที่สร้างจากโปรแกรม GSP ประกอบการฝึกปฏิบัติ ดังนี้

1) แฟ้ม ภาคตัดกรวย

2) แฟ้ม วงรี

3) แฟ้ม พาราโบลา

4) แฟ้ม ไฮเพอร์โบลา

1.6 สื่อที่สร้างจากโปรแกรม GSP ประกอบการฝึกปฏิบัติ ดังนี้

1) แฟ้ม แกนสามมิติ

2) แฟ้ม จากการบวกเวกเตอร์สองมิติ

3) แฟ้ม เวกเตอร์สามมิติ

2. สำหรับวิทยากร

2.1 เอกสารสำหรับวิทยากร 1: เฉลยการใช้ The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการสอน เรื่อง ฟังก์ชัน

2.2 เอกสารสำหรับวิทยากร 2: เฉลยการใช้ The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการสอน เรื่อง ภาคตัดกรวย

2.3 เอกสารสำหรับวิทยากร 3: เฉลยการใช้ The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการสอน เรื่อง เวกเตอร์

2.4 เอกสารสำหรับวิทยากร 4: แบบบันทึกผลการประเมิน เรื่อง การใช้ ICT ในการสอน

2.5 เอกสารสำหรับวิทยากร 5: แบบประเมินการมีส่วนร่วมในกิจกรรม

2.6 สื่อที่สร้างจากโปรแกรม GSP ประกอบการฝึกปฏิบัติ ดังนี้

1) แฟ้ม การแสดงฟังก์ชันอย่างพลวัต

2) แฟ้ม จากกราฟรางเลื่อนสู่ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

3) แฟ้ม ฟังก์ชันประกอบ

4) แฟ้ม ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

5) แฟ้ม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

6) แฟ้ม แกน X เป็นเรเดียน

7) แฟ้ม ฟังก์ชันอื่น ๆ

2.7 สื่อที่สร้างจากโปรแกรม GSP ประกอบการฝึกปฏิบัติ ดังนี้

1) แฟ้ม ภาคตัดกรวย

2) แฟ้ม วงรี

3) แฟ้ม พาราโบลา

4) แฟ้ม ไฮเพอร์โบลา

2.8 สื่อที่สร้างจากโปรแกรม GSP ประกอบการฝึกปฏิบัติ ดังนี้

1) แฟ้ม แกนสามมิติ

2) แฟ้ม จากการบวกเวกเตอร์สองมิติ

3) แฟ้ม เวกเตอร์สามมิติ

การประเมินผล

รายการประเมิน	**เกณฑ์การให้คะแนน (คะแนนเต็ม 11 คะแนน)**	**เครื่องมือ**
1. การมีส่วนร่วมในกิจกรรม พิจารณาจากข้อ 1.1 – 1.6 1.1 ความร่วมมือในกิจกรรม 1.2 ความรับผิดชอบ 1.3 การเสนอความคิดเห็น 1.4 ความริเริ่มสร้างสรรค์ 1.5 การเป็นผู้นำหรือผู้ตามที่ดี 1.6 การตรงเวลา	**คะแนนเต็ม 5 คะแนน โดย** ได้ 5 คะแนน เมื่อมี 5 – 6 ข้อ ได้ 4 คะแนน เมื่อมี 3 – 4 ข้อ ได้ 3 คะแนน เมื่อมี 1 – 2 ข้อ ได้ 0 คะแนน เมื่อไม่มีทั้ง 6 ข้อ	- แบบประเมินการมีส่วนร่วมในกิจกรรม
2. ชิ้นงาน พิจารณาจาก ฝึกปฏิบัติการใช้ GSP ในการสอน 2.1. ฟังก์ชัน 2.2. ภาคตัดกรวย 2.3. เวกเตอร์	**คะแนนเต็ม 6 คะแนน โดย** ได้ 6 คะแนน เมื่อฝึกปฏิบัติตั้งแต่ 3 ข้อ ได้ 4 คะแนน เมื่อฝึกปฏิบัติครบ 2 ข้อ ได้ 2 คะแนน เมื่อฝึกปฏิบัติครบ 1 ข้อ ได้ 0 คะแนน เมื่อไม่ฝึกปฏิบัติทั้ง 3 ข้อ	- แบบบันทึกผลการประเมิน เรื่อง การใช้ ICT ในการสอน

แนวทางปฏิบัติสำหรับวิทยากร

1. ศึกษาเรื่องฟังก์ชัน จากหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6 ของสสวท. เรื่องฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม และฟังก์ชันตรีโกณมิติจากหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6 ของสสวท. เรื่อง ภาคตัดกรวย จากหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 ของสสวท. และ เรื่องเวกเตอร์ จากหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6 ของสสวท.

2. ฝึกซ้อมการใช้แฟ้ม การแสดงฟังก์ชันอย่างพลวัต จากกราฟรางเลื่อนสู่ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน ฟังก์ชันประกอบ ภาคตัดกรวย วงรี พาราโบลา ไฮเพอร์โบลา แกนสามมิติ การบวกเวกเตอร์สองมิติ และเวกเตอร์สามมิติ

3. ศึกษาเอกสารเพิ่มเติมเรื่องการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการสอนเรื่องฟังก์ชัน ภาคตัดกรวย และเวกเตอร์

4. แจ้งให้ผู้เข้ารับการอบรมทราบเกี่ยวกับประเด็นการประเมินและเกณฑ์การให้คะแนน

5. ดำเนินการจัดการอบรมตามแนวทางการจัดกิจกรรม พร้อมทั้งประเมินผลผู้เข้ารับการอบรมตามรายการประเมินและเครื่องมือที่กำหนด แล้วกรอกคะแนนลงในแบบบันทึกผลการประเมิน

6. วิทยากรอาจทำ PowerPoint ประกอบการบรรยายเพิ่มเติม

แนวทางการจัดกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
การใช้ ICT ในการสอน เรื่อง ฟังก์ชัน (2 ชั่วโมง) 1. การสร้างองค์ความรู้ (45 นาที) 1.1 ขั้นนำ (10 นาที) วิทยากรนำสนทนากับผู้เข้ารับการอบรมในหัวข้อเรื่อง ฟังก์ชัน โดยชี้ให้เห็นว่าเราสามารถใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เรามีอยู่แล้วมาปรับเปลี่ยนวิธีลงมือสร้างโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนมองเห็นภาพการเปลี่ยนแปลงที่ต่อเนื่อง เข้าใจบทนิยามของฟังก์ชันได้ดีขึ้น ในกรณีมีคอมพิวเตอร์ไม่เพียงพอสำหรับนักเรียนทั้งห้อง ครูอาจสาธิตแล้วให้นักเรียนตอบคำถามโดยที่นักเรียนไม่ต้องลงมือปฏิบัติก็ได้	- โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)	- ตอบคำถามระหว่างการทำกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
1.2 ขั้นสาธิตการสอนและฝึกปฏิบัติ (20 นาที) วิทยากรเข้าสู่บทเรียนโดยใช้ แฟ้ม การแสดงฟังก์ชันอย่างพลวัต ลากตัวชี้รูปสามเหลี่ยมของแกนรับเข้าของกราฟรางเลื่อน แล้วสังเกตตัวชี้ของแกนส่งออก จากนั้นให้ใช้ข้อมูลที่ได้คาดเดาว่า ข้อมูลส่วนรับเข้าและข้อมูลส่วนส่งออกมีความสัมพันธ์กันอย่างไรและเขียนเป็นฟังก์ชันได้อย่างไร สามารถเข้าใจความหมายของโดเมน และเรนจ์ได้ง่ายขึ้นจากกราฟรางเลื่อน ตามบทนิยาม ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6 ของสสวท. หน้า 91 1.3 ขั้นสรุป (15 นาที) วิทยากรและผู้เข้ารับการอบรมร่วมกันอภิปรายการสรุปผลที่ได้จากการปฏิบัติกิจกรรมร่วมกัน 2. ปฏิบัติการเพื่อสร้างความเข้าใจตามสาระการเรียนรู้ (1 ชั่วโมง 10 นาที) 2.1 วิทยากรแนะนำผู้เข้ารับการอบรมทำกิจกรรมจากกราฟรางเลื่อนสู่ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรมได้เปรียบเทียบจุดเด่นของการแสดงฟังก์ชันด้วยกราฟรางเลื่อนและกราฟในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน และหาว่าเมื่อใดควรใช้กราฟรางเลื่อนแสดงฟังก์ชัน เมื่อใดควรใช้กราฟในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนแสดงฟังก์ชัน 2.2 วิทยากรแนะนำผู้เข้ารับการอบรมทำกิจกรรมการสำรวจฟังก์ชันประกอบด้วยกราฟรางเลื่อน เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรมได้เห็นภาพของค่าส่งออกของฟังก์ชันหนึ่งไปเป็นค่ารับเข้าของอีกฟังก์ชันหนึ่ง และจากข้อมูลที่ได้จากกราฟรางเลื่อนที่แทนฟังก์ชันประกอบนั้น ผู้เข้ารับการอบรมสามารถคาดเดาได้ว่าฟังก์ชันประกอบนั้นคืออะไร	- สื่อที่สร้างจากโปรแกรม GSP ชื่อแฟ้ม การแสดงฟังก์ชันอย่างพลวัต - หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม เล่ม 2 - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1: เอกสารเพิ่มเติม การใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการสอน เรื่อง ฟังก์ชัน - สื่อที่สร้างจากโปรแกรม GSP ชื่อแฟ้ม จากกราฟรางเลื่อนสู่ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1: เอกสารเพิ่มเติม การใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการสอน เรื่อง ฟังก์ชัน	- ตอบคำถามระหว่างการทำกิจกรรม - ตอบคำถามระหว่างการทำกิจกรรม - ตอบคำถามระหว่างการทำกิจกรรม - ตอบคำถามระหว่างการทำกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
2.3 วิทยากรแนะนำผู้เข้ารับการอบรมทำกิจกรรมฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม เพื่อสำรวจฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมตามบทนิยาม และตัวอย่าง ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6 ของสสวท. หน้า 22 – 33 เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรมได้เห็นตัวอย่างการนำโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ไปใช้ในการสอนคณิตศาสตร์ 2.4 วิทยากรแนะนำผู้เข้ารับการอบรมทำกิจกรรมฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อสำรวจสมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติตามตัวอย่าง ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6 ของสสวท. หน้า 99 - 109 3. การสรุปบทเรียน (15 นาที) วิทยากรตรวจสอบความเข้าใจของผู้เข้ารับการอบรมในเรื่องการใช้ ICT ในการสอนเรื่องฟังก์ชัน โดยการตอบคำถามท้ายกิจกรรมและให้งานที่มอบหมายต่อไปนี้ ให้เขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) แล้วสำรวจว่าพารามิเตอร์แต่ละตัวมีผลอย่างไรต่อกราฟ ก. $f(x)=A\sin(nx+c)$ ข. $f(x)=A\cos(nx)$ ค. $f(x)=A\tan(nx)$	- สื่อที่สร้างจากโปรแกรม GSP ชื่อแฟ้ม ฟังก์ชันประกอบ - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1: เอกสารเพิ่มเติม การใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการสอน เรื่อง ฟังก์ชัน - สื่อที่สร้างจากโปรแกรม - GSP ชื่อ แฟ้มฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล - หนังสือเรียนเพิ่มเติม เล่ม 3 - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 1: เอกสารเพิ่มเติม การใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการสอน เรื่อง ฟังก์ชัน - สื่อที่สร้างจากโปรแกรม GSP ชื่อแฟ้มฟังก์ชันตรีโกณมิติและแฟ้มแกน X เป็นเรเดียน - หนังสือเรียนเพิ่มเติม เล่ม 3 - เอกสารเพิ่มเติมฟังก์ชันตรีโกณมิติ - สื่อที่สร้างจากโปรแกรม GSP ชื่อแฟ้มฟังก์ชันอื่น ๆ	- ทำงานที่มอบหมายได้ถูกต้อง

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
การใช้ ICT ในการสอนเรื่องภาคตัดกรวย (1 ชั่วโมง) 1. การสร้างองค์ความรู้ (30 นาที) 1.1 ขั้นนำ (5 นาที) วิทยากรนำสนทนากับผู้เข้ารับการอบรมในหัวข้อเรื่อง ภาคตัดกรวย โดยชี้ให้เห็นว่าเราสามารถใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เรามีอยู่แล้วมาปรับเปลี่ยนวิธีลงมือสร้างโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนมองเห็นภาพการเปลี่ยนแปลงที่ต่อเนื่อง เข้าใจบทนิยามของฟังก์ชันได้ดีขึ้น ในกรณีมีคอมพิวเตอร์ไม่เพียงพอสำหรับนักเรียนทั้งห้อง ครูอาจสาธิตแล้วให้นักเรียนตอบคำถามโดยที่นักเรียนไม่ต้องลงมือปฏิบัติก็ได้ 1.2 ขั้นสาธิตการสอนและฝึกปฏิบัติ (20 นาที) วิทยากรเข้าสู่บทเรียนโดยใช้ แฟ้ม ภาคตัดกรวย ลากจุดควบคุมต่าง ๆ เพื่อเปลี่ยนตำแหน่งมุมเอียงของระนาบที่ตัดกรวย และมุมมอง แล้วสังเกตดูภาพที่เกิดจากระนาบตัดกรวยกับกรวยในมุมมองต่าง ๆ 1.3 ขั้นสรุป (5 นาที) วิทยากรและผู้เข้ารับการอบรมร่วมกันอภิปรายการสรุปผลที่ได้จากการปฏิบัติกิจกรรมร่วมกัน 2. ปฏิบัติการเพื่อสร้างความเข้าใจตามสาระการเรียนรู้ (40 นาที) 2.1 วิทยากรแนะนำผู้เข้ารับการอบรมทำกิจกรรม วงรีที่สร้างตามบทนิยามเชิงเรขาคณิตของวงรี ตามหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6 ของสสวท. หน้า 182 จากนั้นให้สำรวจวงรีที่สร้างโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ตามเอกสารเพิ่มเติม วงรีตามบทนิยามเชิงเรขาคณิต หลังจากนั้นแนะนำการประยุกต์การใช้งานวงรีในชีวิตประจำวันตาม	- โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) - สื่อที่สร้างจากโปรแกรม GSP ชื่อแฟ้ม ภาคตัดกรวย - สื่อที่สร้างจากโปรแกรม GSP ชื่อแฟ้ม วงรี - หนังสือเรียนเพิ่มเติม เล่ม 2 - เอกสารสำหรับวิทยากร 2: เอกสารเพิ่มเติม การใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการสอน เรื่อง ภาคตัดกรวย - สื่อที่สร้างจากโปรแกรม GSP ชื่อแฟ้ม พาราโบลา - หนังสือเรียนเพิ่มเติม เล่ม 2	- ตอบคำถามระหว่างการทำกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
แฟ้ม วงรี แล้วมอบหมายงานให้ผู้เข้ารับการอบรมทำ 2.2 วิทยากรแนะนำผู้เข้ารับการอบรมทำกิจกรรม พาราโบลา ที่สร้างตามบทนิยามเชิงเรขาคณิตของพาราโบลา ตามหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6 ของ สสวท. หน้า 195 จากนั้นให้สำรวจพาราโบลาที่สร้างโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ตามเอกสารเพิ่มเติม พาราโบลาตามบทนิยามเชิงเรขาคณิต หลังจากนั้นแนะนำการประยุกต์การใช้งานพาราโบลาในชีวิตประจำวันตามแฟ้มพาราโบลา แล้วมอบหมายงานให้ผู้เข้ารับการอบรมทำ 2.3 วิทยากรแนะนำผู้เข้ารับการอบรมทำกิจกรรม ไฮเพอร์โบลา ที่สร้างตามบทนิยามเชิงเรขาคณิตของไฮเพอร์โบลา ตามหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6 ของสสวท. หน้า 205 จากนั้นให้สำรวจไฮเพอร์โบลาที่สร้างโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad(GSP) ตามเอกสารเพิ่มเติมไฮเพอร์โบลาตามบทนิยามเชิงเรขาคณิต หลังจากนั้นแนะนำการประยุกต์การใช้งานไฮเพอร์โบลาในชีวิตประจำวันตาม แฟ้มไฮเพอร์โบลา แล้วมอบหมายงานให้ผู้เข้ารับการอบรมทำ 3. การสรุปบทเรียน (10 นาที) วิทยากรตรวจสอบความเข้าใจของผู้เข้ารับการอบรมในเรื่อง การใช้ ICT ในการสอนเรื่อง ภาคตัดกรวย โดยการตอบคำถามท้ายกิจกรรมและให้งานที่มอบหมายต่อไปนี้ 1. ให้สร้างวงรีโดยใช้จุดศูนย์กลางของวงกลมและจุดอีกจุดหนึ่งที่อยู่ภายในวงกลมเป็นโฟกัสของวงรี 2. ให้สร้างพาราโบลาเมื่อกำหนดโฟกัส และ	- เอกสารสำหรับวิทยากร 2: เอกสารเพิ่มเติม การใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการสอน เรื่อง ภาคตัดกรวย - สื่อที่สร้างจากโปรแกรม GSP ชื่อแฟ้มไฮเพอร์โบลา - หนังสือเรียนเพิ่มเติม เล่ม 2 - เอกสารสำหรับวิทยากร 2: เอกสารเพิ่มเติมการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการสอนเรื่อง ภาคตัดกรวย	- ตอบคำถามระหว่างการทำกิจกรรม - ทำงานที่มอบหมายได้ถูกต้อง

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
เส้นสัมผัสพาราโบลาให้หนึ่งเส้น 3. สร้างไฮเพอร์โบลาโดยใช้มีจุดศูนย์กลางของวงกลม และจุดอีกจุดหนึ่งที่อยู่ภายนอกวงกลมเป็นโฟกัสของไฮเพอร์โบลา		
การใช้ ICT ในการสอนเรื่องเวกเตอร์ 1. การสร้างองค์ความรู้ (30 นาที) 1.1 ขั้นนำ (5 นาที) วิทยากรนำสนทนากับผู้เข้ารับการอบรมในหัวข้อเรื่อง เวกเตอร์ โดยชี้ให้เห็นว่าเราสามารถใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เรามีอยู่แล้วมาปรับเปลี่ยนวิธีลงมือสร้างโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนมองเห็นภาพการเปลี่ยนแปลงที่ต่อเนื่อง เข้าใจบทนิยามของเวกเตอร์ได้ดีขึ้น ในกรณีมีคอมพิวเตอร์ไม่เพียงพอสำหรับนักเรียนทั้งห้อง ครูอาจสาธิตแล้วให้นักเรียนตอบคำถามโดยที่นักเรียนไม่ต้องลงมือปฏิบัติก็ได้ 1.2 ขั้นสาธิตการสอนและฝึกปฏิบัติ (20 นาที) วิทยากรนำเข้าสู่บทเรียนโดยใช้แฟ้มแกนสามมิติ.gsp เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรมคุ้นเคยและสามารถใช้แกนสามมิติในโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ได้ ให้ผู้เข้ารับการอบรมทำกิจกรรมใช้เครื่องมือลงจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ หาระยะทางระหว่างจุดสองจุดในแกนสามมิติ จากนั้นให้ผู้เข้ารับการอบรมฝึกใช้เครื่องมือลงจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติตามตัวอย่างในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6	- โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) - สื่อที่สร้างจากโปรแกรม GSP ชื่อแฟ้มแกนสามมิติ - หนังสือเรียนเพิ่มเติม เล่ม 3 - เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 3: เอกสารเพิ่มเติม การใช้โปรแกรม	- ตอบคำถามระหว่างการทำกิจกรรม

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
ของสสวท. หน้า 169 เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรมได้เห็นตัวอย่างการนำโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ไปใช้ในการสอนคณิตศาสตร์ 1.3 ขั้นสรุป (5 นาที) วิทยากรและผู้เข้ารับการอบรมร่วมกันอภิปรายการสรุปผลที่ได้จากการปฏิบัติกิจกรรมร่วมกัน 2. ปฏิบัติการเพื่อสร้างความเข้าใจตามสาระการเรียนรู้ (40 นาที)	The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการสอน เรื่อง เวกเตอร์	- ตอบคำถามระหว่างการทำกิจกรรม
2.1 วิทยากรแนะนำผู้เข้ารับการอบรมทำกิจกรรม การบวกเวกเตอร์ในสองมิติ ตามบทนิยามในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 ของสสวท. หน้า 179 โดยใช้แฟ้ม การบวกเวกเตอร์ในสองมิติ.gsp	- สื่อที่สร้างจากโปรแกรม GSP ชื่อแฟ้ม การบวกเวกเตอร์ในสองมิติ - หนังสือเรียนเพิ่มเติม เล่ม 3	- ตอบคำถามระหว่างการทำกิจกรรม
2.2 วิทยากรแนะนำผู้เข้ารับการอบรมทำกิจกรรม การลบเวกเตอร์ในสองมิติ ตามบทนิยามในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 ของสสวท. หน้า 181 โดยใช้แฟ้ม การบวกเวกเตอร์ในสองมิติ.gsp	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 3: เอกสารเพิ่มเติม การใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการสอน เรื่อง เวกเตอร์	- ตอบคำถามระหว่างการทำกิจกรรม
2.3 วิทยากรแนะนำผู้เข้ารับการอบรมทำกิจกรรม เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติโดยใช้ แฟ้ม เวกเตอร์สามมิติ.gsp สำรวจ การบวก ลบ และผลคูณเชิงเวกเตอร์ในแกนสามมิติ เพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรมเห็นการเชื่อมโยงระหว่างเวกเตอร์เชิงเรขาคณิตกับเวกเตอร์เชิงพีชคณิต ทำให้เห็นภาพและเข้าใจได้ง่ายขึ้น	- สื่อที่สร้างจากโปรแกรม GSP ชื่อแฟ้ม เวกเตอร์สามมิติ	

กิจกรรม	สื่อ/ เอกสาร	วัดและประเมินผล
3. การสรุปบทเรียน (10 นาที) วิทยากรตรวจสอบความเข้าใจของผู้เข้ารับการอบรมในเรื่องการใช้ ICT ในการสอนเรื่องเวกเตอร์ โดยการตอบคำถามท้ายกิจกรรมและให้งานที่มอบหมายต่อไปนี้ 1. ศึกษาแฟ้ม การบวกลบเวกเตอร์ในสองมิติ.gsp หน้า sum03, app01, และ app02 เพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในการจัดการเรียนการสอน 2. ศึกษาแฟ้ม เวกเตอร์สามมิติ.gsp หน้าเวกเตอร์ B+A, เวกเตอร์ -A+B, เวกเตอร์ A-B แล้วสรุปเกี่ยวกับการบวกลบเวกเตอร์ด้วยวิธีพีชคณิต	- เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม 3: เอกสารเพิ่มเติม การใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการสอน เรื่อง เวกเตอร์ - สื่อที่สร้างจากโปรแกรม GSP ชื่อแฟ้ม การบวกเวกเตอร์ในสองมิติ - หนังสือเรียนเพิ่มเติม เล่ม 3	- ทำงานที่มอบหมายได้ถูกต้อง

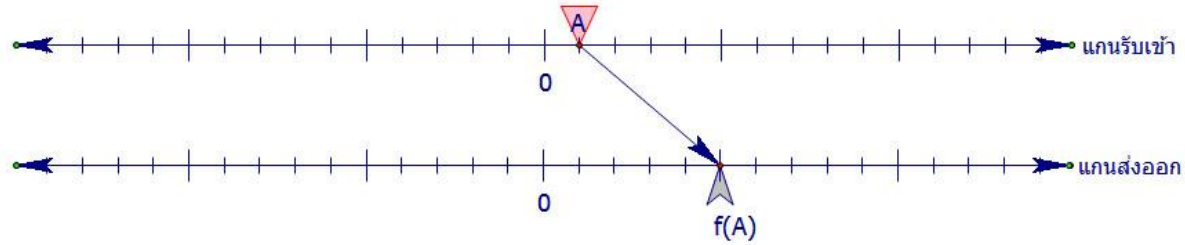
เอกสารสำหรับผู้เข้ารับการอบรม

เอกสารเพิ่มเติม

การใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการสอนเรื่องฟังก์ชัน

การแสดงฟังก์ชันอย่างพลวัต

เราเคยเห็นการแสดงฟังก์ชันด้วยคำบรรยาย หรือแทนฟังก์ชันด้วยการใช้แผนภาพแสดงการจับคู่ระหว่างสมาชิกของเซตสองเซตมาแล้ว บางครั้งอาจเคยเห็นการใช้ตาราง หรือแม้แต่สมการแสดงฟังก์ชัน ในที่นี้เราจะสำรวจการแสดงฟังก์ชันด้วยกราฟรางเลื่อน

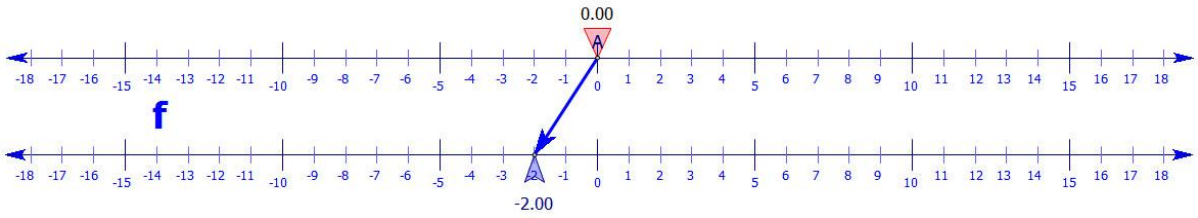


กราฟรางเลื่อน

แบบร่างและการสืบเสาะ

กราฟรางเลื่อน

1. เปิดแฟ้ม ฟังก์ชันพลวัต.gsp จากโฟลเดอร์ Functions ในหน้าแรกจะเห็นกราฟรางเลื่อนสองกราฟ แต่ละกราฟประกอบด้วยแกนสองแกนคือแกนรับเข้าและแกนส่งออก



2. ใช้เครื่องมือลูกศรลากรูปสามเหลี่ยมที่ส่วนรับเข้าของทั้งสองกราฟเพื่อให้ได้แนวคิดว่ากราฟรางเลื่อนทำงานอย่างไร ต่อไปนี้เป็นคำอธิบายของกราฟรางเลื่อน f:

   เมื่อค่ารับเข้าอยู่ที่จุดศูนย์ ค่าส่งออกจะอยู่ที่ -2

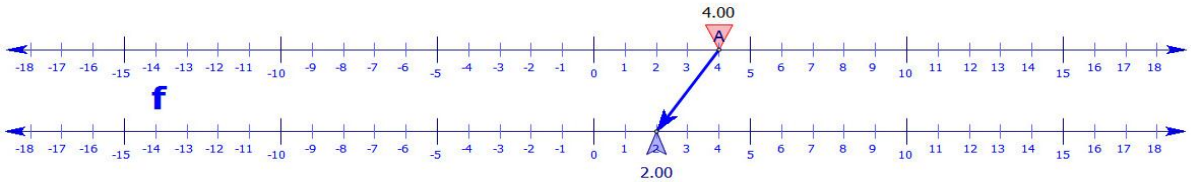
   เมื่อค่ารับเข้าอยู่ทางขวาของจุดศูนย์ ค่าส่งออกจะอยู่ทางขวาของ -2 ด้วย

   เมื่อค่ารับเข้าอยู่ทางซ้ายของจุดศูนย์ ค่าส่งออกจะอยู่ทางซ้ายของ -2 ด้วย

   ค่ารับเข้าจะมากกว่าค่าส่งออกอยู่ 2 เสมอ เมื่อลากตัวชี้รูปสามเหลี่ยมของส่วนรับเข้าอย่างสม่ำเสมอจากซ้ายไปขวา ตัวชี้ของส่วนส่งออกก็เคลื่อนอย่างสม่ำเสมอในทิศทางเดียวกันเมื่อค่ารับเข้าอยู่ทางขวาจุดศูนย์ ค่าส่งออกจะอยู่ทางขวาของ -2 ด้วย

คำถาม 1 ให้เขียนคำอธิบายของกราฟรางเลื่อน h: ที่อยู่ในหน้า h,q

3. พิจารณากราฟรางเลื่อน f ลากตัวชี้รูปสามเหลี่ยมของส่วนรับเข้า ไปที่ 4 ลูกศรควรชี้ไปที่ค่าส่งออกดังแสดงในรูป นั่นคือค่ารับเข้า 4 จะจับคู่กับค่าส่งออก 2 ซึ่งใช้สัญกรณ์เชิงฟังก์ชันเป็น $f(4) = 2$ อ่านว่า "เอฟ ของ สี่ เท่ากับ สอง"



คำถาม 2 จากกราฟรางเลื่อน f ให้หาค่าของตัวไม่ทราบค่าที่แสดงไว้

f(-3) = y, y = _____ f(-1) = y, y = _____

f(0) = y, y = _____ f(2) = y, y = _____

f(4) = y, y = _____ f(5) = y, y = _____

คำถาม 3 จากข้อมูลที่ได้ให้คาดเดาว่าฟังก์ชันของกราฟรางเลื่อน f คืออะไร แล้วเขียนฟังก์ชันลงในช่องว่างด้านล่าง

f(x) = y = _____

คำถาม 4 ให้พิจารณากราฟรางเลื่อน g โดยลากตัวชี้รูปสามเหลี่ยมของส่วนรับเข้า ไปตำแหน่งต่าง ๆ แล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงค่าจากส่วนส่งออก จากนั้นให้คาดเดาฟังก์ชันของกราฟรางเลื่อน g แล้วเขียนฟังก์ชันลงในช่องว่างด้านล่าง

g(x) = y = _____

คำถาม 5 ไปที่หน้า 2, 3, และ 4 ของแบบร่าง จะเห็นกราฟรางเลื่อนหน้าละสองกราฟ แต่ละกราฟรางเลื่อนให้ทำซ้ำคำถาม 4

h(x) = y = _____ q(x) = y = _____

r(x) = y = _____ s(x) = y = _____

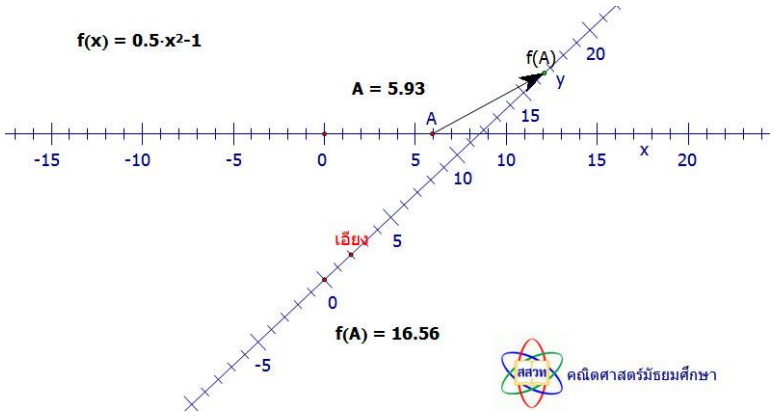
t(x) = y = _____ u(x) = y = _____

จากกราฟรางเลื่อนสู่ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

จากกิจกรรมที่ผ่านมาจะเห็นว่ากราฟรางเลื่อนสามารถใช้ประโยชน์ในการแสดงและทำความเข้าใจเกี่ยวกับฟังก์ชันได้อย่างไร ปัญหาคือเราไม่ได้พบเห็นกราฟรางเลื่อนในการเรียนคณิตศาสตร์ แต่จะพบกราฟ ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (ในระนาบ XY) มากกว่า ในกิจกรรมนี้เราจะรวมกราฟทั้งสองอย่างเข้าด้วยกัน โดยการแปลงกราฟรางเลื่อนไปเป็นส่วนหนึ่งของระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

แบบร่างและการสืบเสาะ

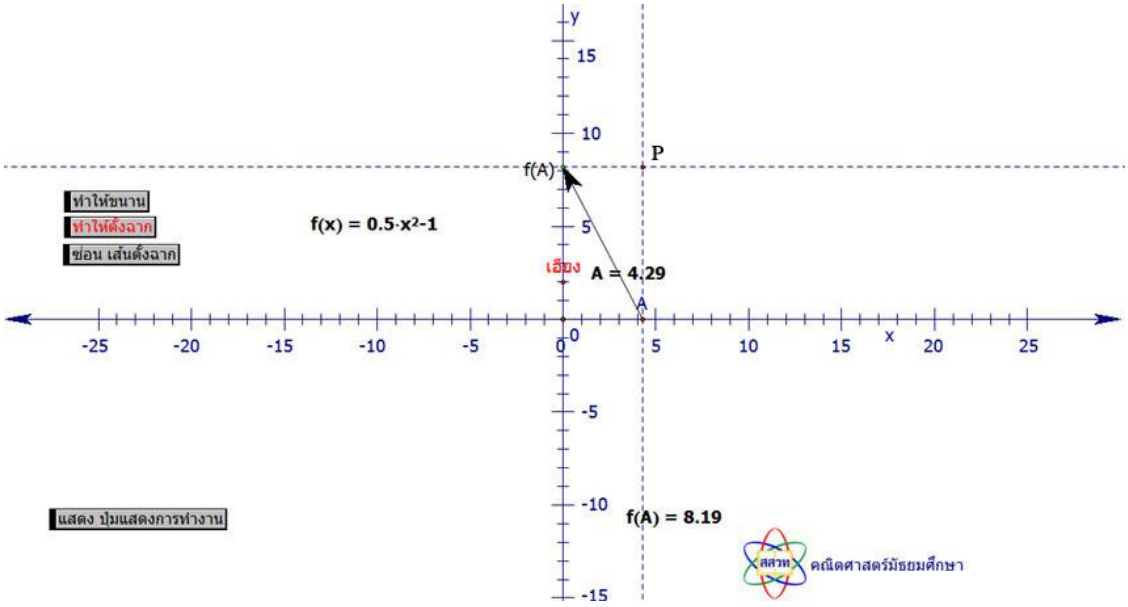
1. เปิดแฟ้ม จากกราฟรางเลื่อนสู่ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน.gsp จากโฟลเดอร์ฟังก์ชัน จะเห็นกราฟรางเลื่อนของฟังก์ชัน $f(x) = 0.5x^2 - 1$ ลากจุด A บนแกนรับเข้าไปมาเพื่อให้คุ้นเคยกับฟังก์ชันนี้
2. ลากจุดที่มีป้ายชื่อเอียง เพื่อให้แกนส่งออกเอียงทำมุมกับแกนรับเข้า



สิ่งสำคัญที่แตกต่างกันระหว่างกราฟรางเลื่อนและกราฟในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (x, y) คือ ในกราฟรางเลื่อนมีสองจุด จุดที่ 1 แทนค่ารับเข้า และจุดที่ 2 แทนค่าส่งออก แต่ในกราฟในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนจุดหนึ่ง ๆ จะแทนทั้งค่ารับเข้าและค่าส่งออก เพื่อให้เข้าใจว่าสิ่งนี้ทำได้อย่างไร ให้ทำกิจกรรมต่อไป

3. คลิกปุ่มแสดงการงาน ทำให้ตั้งฉาก และสังเกตดูขณะที่แกนทั้งสองของกราฟรางเลื่อนเปลี่ยนรูปไปเป็นแกน X และแกน Y ที่เราคุ้นเคย ลากจุด A บนแกนรับเข้าอีกครั้ง เพื่อเตือนตัวเองว่ากำลังทำงานอยู่บนกราฟรางเลื่อนอันเดิม (แต่ตอนนี้ตั้งฉากกัน)
4. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน แสดงเส้นตั้งฉาก เพื่อแสดงเส้นตั้งฉากสองเส้น เส้นแรกเป็นเส้นตรงที่ผ่าน A และตั้งฉากกับแกน X เส้นที่สองเป็นเส้นตรงที่ผ่าน f(A) และตั้งฉากกับแกน Y

5. สร้างจุดตัด P ของเส้นตั้งฉากทั้งสอง โดยเลือกเส้นตั้งฉากทั้งสองแล้วเลือกคำสั่ง **จุดตัด** จากเมนูสร้าง

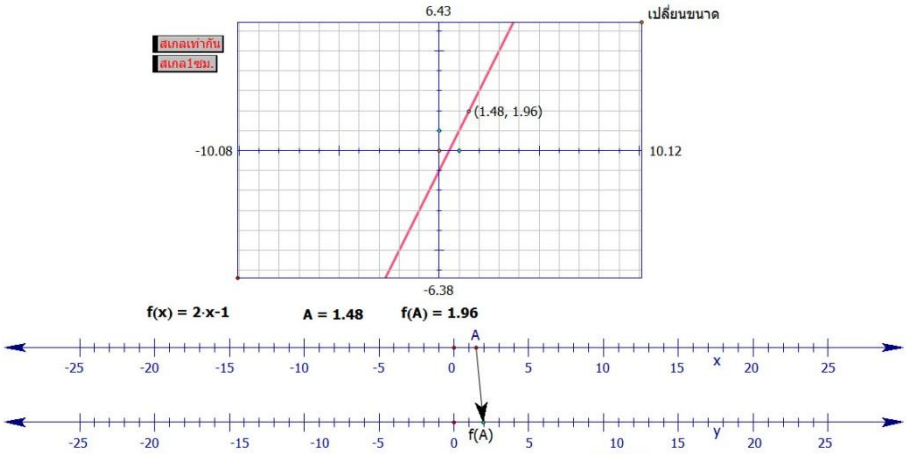


คำถาม 1 พิกัดของจุด P ทางแกน X และ พิกัดของจุด P ทางแกน Y สมนัยกับอะไรบนกราฟรางเลื่อน

6. ยกเลิกการเลือกทั้งหมดโดยใช้เครื่องมือลูกศรคลิกบริเวณที่เป็นที่ว่าง 1 ครั้ง เลือกจุดตัด P แล้วเลือกคำสั่ง **สร้างรอย จุดตัด** จากเมนูแสดงผล แล้วลากจุด A บนแกนรับเข้า และสังเกตขณะที่จุด P สร้างรอยออกมาเป็นกราฟของ f(x)

คำถาม 2 ให้อธิบายรูปร่างของกราฟที่เกิดจากจุดตัด ทำไมจึงเป็นไปได้ที่การเปลี่ยนแปลงของกราฟรางเลื่อนทำให้เกิดรูปกราฟนี้

7. ไปที่หน้า 2 ของ จากกราฟรางเลื่อนสู่ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน.gsp จะเห็นทั้งกราฟรางเลื่อนและกราฟในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน ซึ่งทั้งคู่จำลอง $f(x) = 2x - 1$ ลากจุด A บนกราฟรางเลื่อนแล้วสังเกตแบบจำลองทั้งสองเปลี่ยนแปลงพร้อมกัน



คำถาม 3 ถ้าเพื่อนร่วมชั้นกล่าวว่า "จุดบนกราฟในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนหนึ่งจุดมีข้อมูลเหมือนกับจุดบนกราฟรางเลื่อนสองจุด" ให้อธิบายว่าเขาหมายความว่าอย่างไร

8. สำรวจแต่ละฟังก์ชันต่อไปนี้ บนกราฟรางเลื่อน/ กราฟในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน ทำโดยดับเบิลคลิกบนสมการฟังก์ชัน $f(x) = 2x - 1$ เพื่อแก้ไขฟังก์ชัน ในแต่ละกรณีเริ่มต้นด้วยให้จุด A ของแกนรับเข้าอยู่ทางซ้ายแล้วลากช้า ๆ จากซ้ายไปขวา

$f(x) = 3$ $f(x) = x$ $f(x) = -x$

$f(x) = x^2$ $f(x) = -x^2$ $f(x) = 5x$

คำถาม 4 ให้เติมข้อความลงในช่องว่าง

เมื่อทั้ง A บนแกนรับเข้าและ f(A) บนแกนส่งออกเคลื่อนที่ไปทางขวา จุดบนกราฟในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนจะเคลื่อนที่

_____

เมื่อทั้ง A บนแกนรับเข้าและ f(A) บนแกนส่งออกเคลื่อนที่ไปทางซ้าย จุดบนกราฟในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนจะเคลื่อนที่

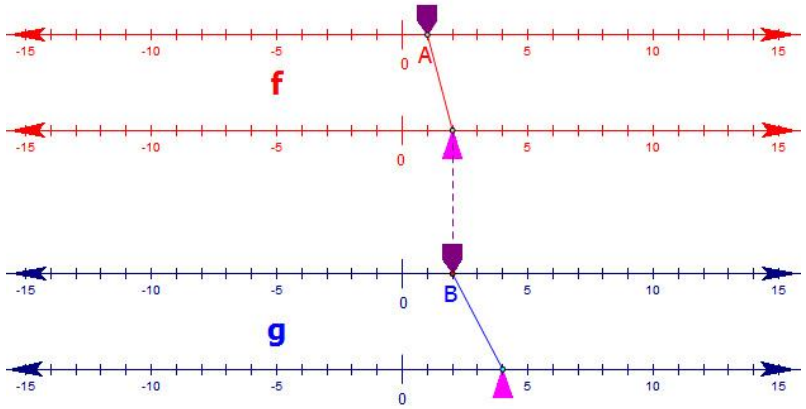
_____

คำถาม 5 กราฟในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนของ $f(x) = 5x$ เปรียบเทียบกับกราฟในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนของ $f(x) = x$ แล้วเป็นอย่างไร ข้อสรุปที่ได้นี้สัมพันธ์กับความแตกต่างระหว่างกราฟรางเลื่อนของฟังก์ชันทั้งสองอย่างไร

คำถาม 6 คิดว่าวิธีใดที่กราฟรางเลื่อนใช้แสดงฟังก์ชันได้ดีกว่ากราฟในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน และวิธีใดที่กราฟในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนใช้แสดงฟังก์ชันได้ดีกว่ากราฟรางเลื่อน

การสำรวจฟังก์ชันประกอบด้วยกราฟรางเลื่อน

ในชีวิตจริงบางครั้งคำตอบของคำถามหนึ่งอาจกลายเป็นคำถามที่นำไปสู่อีกคำตอบหนึ่งได้ ฟังก์ชันก็เช่นเดียวกัน บางครั้งค่าส่งออกของฟังก์ชันหนึ่งจะเป็นค่ารับเข้าของอีกฟังก์ชันหนึ่ง สิ่งนี้เรียกว่าฟังก์ชันประกอบ ในกิจกรรมนี้จะเป็นการแนะนำฟังก์ชันประกอบแบบย่อ ๆ และเห็นวิธีที่กราฟรางเลื่อนแสดงการจำลองฟังก์ชันประกอบ



บทนำ

มารู้จักฟังก์ชันประกอบแบบง่าย ๆ ดังนี้

กำหนดให้ $f(x) = 2x$ และ $g(x) = x^2$ ให้หา $g(f(3))$ (อ่านว่า " g ของ f ของ 3 ")

- เริ่มต้นจากวงเล็บข้างใน คำนวณหา $f(3)$ จะได้ $f(3) = 2 \bullet 3 = 6$
- ใช้ค่าส่งออกนี้เป็นค่ารับเข้าของ g : $g(f(3)) = g(6) = 6^2 = 36$

$g(f(3))$ เป็นตัวอย่างของฟังก์ชันประกอบ

แบบร่างและการสืบเสาะ

1. เปิดแฟ้ม ฟังก์ชันประกอบ.gsp จากโฟล์เดอร์ ฟังก์ชัน
2. ในแบบร่างหน้า f&g ให้ลากตัวชี้ของแกนรับเข้าทั้งสอง (รูปห้าเหลี่ยม) เพื่อให้คุ้นเคยกับกราฟรางเลื่อนของฟังก์ชัน f และ g

คำถาม 1 ฟังก์ชันที่กำหนดให้ $f(x) = 2x$ และ $g(x) = x^2$ ให้หาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

ก. $f(g(2)) =$ ข. $g(f(2)) =$

คำถาม 2 คิดว่า $f(g(x))$ เท่ากับ $g(f(x))$ เสมอไปหรือไม่ ตอบคำถามนี้โดยเปรียบเทียบ $f(g(2))$ และ $g(f(2))$

3. ไปที่หน้า gof ของแบบร่างจะเห็นว่าค่าส่งออกของ f เท่ากับค่ารับเข้าของ g ลากตัวชี้ของแกนรับเข้าของ f เพื่อสำรวจฟังก์ชันประกอบ gof ที่ได้ และตรวจคำตอบ จากคำถาม 1
4. ไปที่หน้า fog ของแบบร่างจะเห็นว่าค่าส่งออกของ g เท่ากับค่ารับเข้าของ f ลากตัวชี้ของแกนรับเข้าของ gเพื่อสำรวจฟังก์ชันประกอบ fog ที่ได้ และตรวจคำตอบ จากคำถาม 1

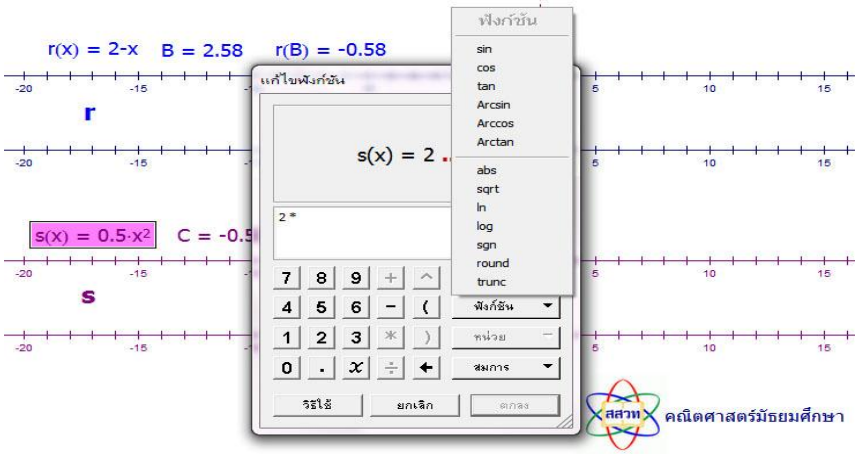
คำถาม 3 ให้ใช้กราฟรางเลื่อนของฟังก์ชันประกอบ หาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

ก. f(g(1)) = _____ ข. f(g(-1)) = _____ ค. f(g(-7)) = _____

คำถาม 4 ไปที่หน้า hog และ goh ของแบบร่างให้สำรวจว่า เรนจ์ของฟังก์ชันประกอบเหล่านี้คืออะไร (นั่นคือค่าส่งออกที่เป็นไปได้ของฟังก์ชันประกอบเหล่านี้เป็นอย่างไร)

คำถาม 5 ไปที่หน้า iof และ foi ของแบบร่างให้สำรวจฟังก์ชันเหล่านี้ สังเกตเห็นอะไรของฟังก์ชันประกอบทั้งสองนี้ ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น

คำถาม 6 ไปที่หน้า พิเศษ ของแบบร่างในหน้านี้เราสามารถสร้างฟังก์ชันประกอบจากสามฟังก์ชันได้ การเปลี่ยนแปลงฟังก์ชันทำโดย ดับเบิลคลิกที่ฟังก์ชัน q หรือ r หรือ s แล้วแก้ไข



ให้ลองสร้างฟังก์ชันประกอบต่อไปนี้

ก. ฟังก์ชันที่ให้ค่าส่งออกเป็นสองเท่าของจำนวนซึ่งเป็นกำลังสองสมบูรณ์ (0, 2, 8, 18, ...)

ข. ฟังก์ชันที่ให้ค่าส่งออกเป็นกำลังสองของจำนวนเต็มคู่ (0, 4, 16, 36, ...)

ค. ฟังก์ชันที่ให้ค่าส่งออกเป็นหนึ่งในสี่ของจำนวน ซึ่งเป็นกำลังสองสมบูรณ์ (0, 0.25, 1, 4, 6.25, ...)

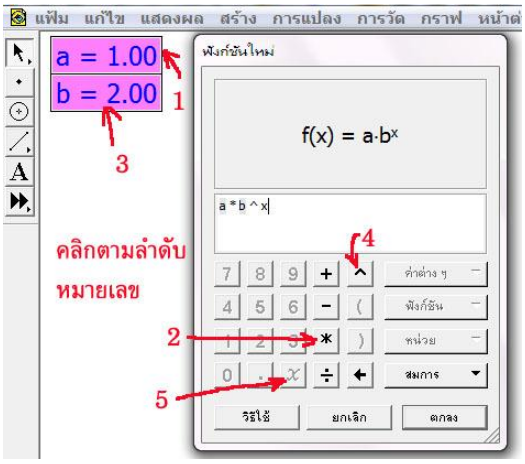
ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

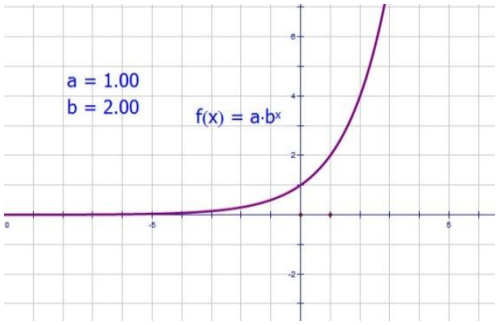
ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชันที่ช่วยในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฟังก์ชันทั้งสองเป็นฟังก์ชันที่มีความสำคัญในการศึกษาวิทยาศาสตร์ด้วยเช่นกัน เช่น การศึกษาการนำความร้อนของฉนวนความร้อน

ในโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) มีเครื่องมือที่สามารถใช้เขียนกราฟของฟังก์ชันใด ๆ ตามที่ต้องการ ในกิจกรรมนี้เราจะสำรวจกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

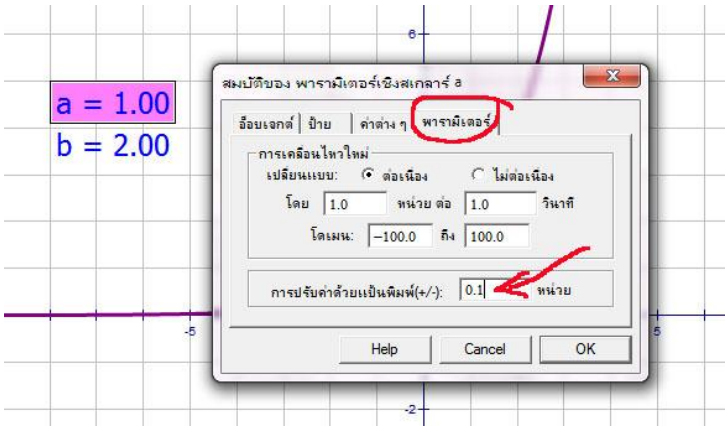
แบบร่างและการสืบเสาะ

1. เปิดแฟ้มใหม่
2. สร้างพารามิเตอร์ใหม่สองตัว คือ a =1.00 และ b = 2.00 โดยใช้คำสั่ง **พารามิเตอร์ใหม่** จากเมนูกราฟ
3. เขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = ab^x$ โดยใช้คำสั่ง **เขียนกราฟของฟังก์ชันใหม่** จากเมนูกราฟ





4. ใช้เครื่องมือลูกศรเลือกพารามิเตอร์ a แล้วลองเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์โดยกดแป้นพิมพ์ + เมื่อต้องการเพิ่มค่า และกดแป้นพิมพ์ - เมื่อต้องการลดค่า สังเกตรูปร่างของกราฟ
5. ใช้เครื่องมือลูกศรเลือกพารามิเตอร์ a แล้วเลือกคำสั่ง สมบัติ จากเมนูแก้ไข ในกล่องโต้ตอบเลือกแผงรายการพารามิเตอร์ แล้วแก้ไขตัวเลขในช่อง การปรับค่าด้วยแป้นพิมพ์ (+/-) เป็น 0.1



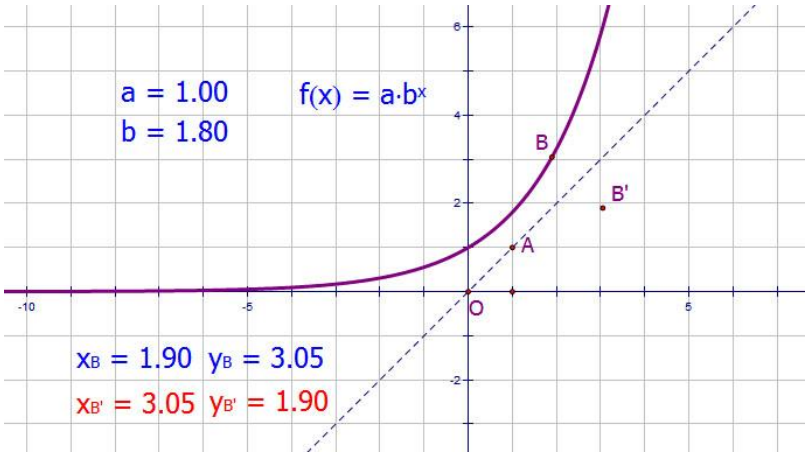
6. ให้ทำพารามิเตอร์ b เช่นเดียวกับพารามิเตอร์ a

คำถาม 1 ให้อธิบายรูปร่างของกราฟ เกิดอะไรขึ้นกับกราฟเมื่อ $a < 0$, $0 < a < 1$, $a = 1$ และ $a > 1$

7. ใช้เครื่องมือลูกศรเลือกพารามิเตอร์ b แล้วลองเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์โดยกดแป้นพิมพ์ + เมื่อต้องการเพิ่มค่า และกดแป้นพิมพ์ - เมื่อต้องการลดค่า สังเกตรูปร่างของกราฟ

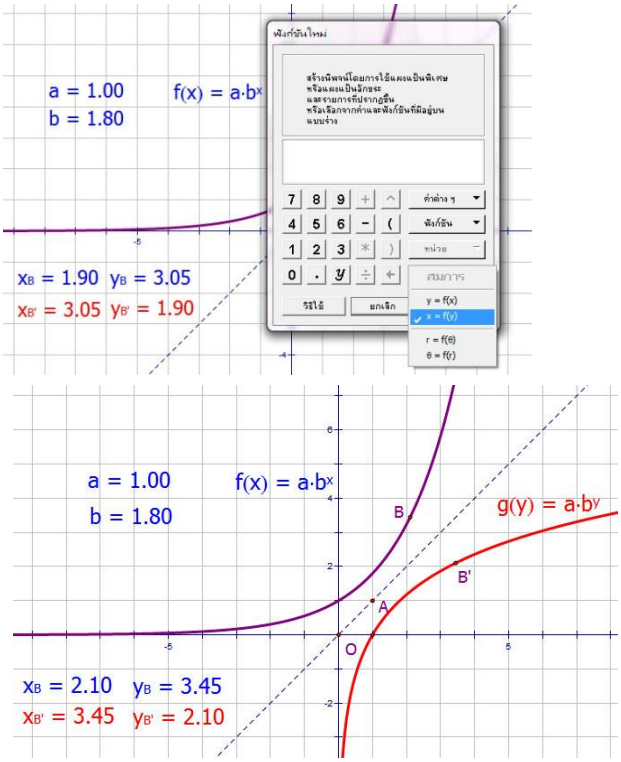
คำถาม 2 ให้อธิบายรูปร่างของกราฟ เกิดอะไรขึ้นกับกราฟเมื่อ $b < 0$, $0 < b < 1$, $b = 1$ และ $b > 1$

8. ลงจุด (1, 1) โดยใช้คำสั่ง **ลงจุด** จากเมนูกราฟ
9. สร้างเส้นตรงผ่านจุด (0, 0) และ (1, 1) ให้เป็นจุด O และจุด A ตามลำดับ
10. สร้างจุดบนกราฟ โดยใช้เครื่องมือลูกศรเลือกกราฟ แล้วเลือกคำสั่ง **จุดบนกราฟของฟังก์ชัน** จากเมนูสร้าง ให้จุดที่ได้เป็นจุด B
11. ระบุเส้นตรง OA เป็นเส้นสะท้อน
12. สะท้อนจุด B ได้จุด B'
13. วัดพิกัดที่หนึ่ง (x) และพิกัดที่สอง (y) ของจุด B และ B'



คำถาม 3 ใช้เครื่องมือลูกศรลากจุด B ไปมาตามเส้นกราฟ แล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงจุด B' และพิกัดที่วัดไว้ เส้นทางการเคลื่อนที่ของจุด B และ จุด B' มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

14. สร้าง inverse ของฟังก์ชัน $f(x) = ab^x$ โดยเลือกคำสั่ง เขียนกราฟของฟังก์ชันใหม่ จากเมนูกราฟ ในกล่องโต้ตอบเลือกสมการ x = f(y) จะเห็น y ในกล่องโต้ตอบแทน x เขียนสมการ $g(y) = ab^y$



คำถาม 4 กราฟ g(y) กับจุด B' สัมพันธ์กันอย่างไร

15. เลือกคำสั่ง **ทางเลือกเอกสาร** จากเมนูแฟ้ม แล้วเลือก **เพิ่มหน้า/ หน้าว่าง**

16. *ในหน้าใหม่สร้างพารามิเตอร์ใหม่หนึ่งตัวคือ c = 1.50 โดยใช้คำสั่ง* ***พารามิเตอร์ใหม่*** จากเมนูกราฟ

17. เขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = c^x$ โดยใช้คำสั่ง **เขียนกราฟของฟังก์ชันใหม่** จากเมนูกราฟ

18. เขียนกราฟของฟังก์ชัน $g(x) = \frac{\log x}{\log c}$ โดยใช้คำสั่ง **เขียนกราฟของฟังก์ชันใหม่** จากเมนูกราฟ

19. ลงจุด (1, 1) โดยใช้คำสั่ง **ลงจุด** จากเมนูกราฟ

20. สร้างเส้นตรงผ่านจุด (0, 0) และ (1, 1) ให้เป็นจุด O และจุด A ตามลำดับ

21. สร้างจุดบนกราฟของ f โดยใช้เครื่องมือลูกศรเลือกกราฟของ f แล้วเลือกคำสั่ง **จุดบนกราฟของฟังก์ชัน** จากเมนูสร้าง ให้จุดที่ได้เป็นจุด B

22. ระบุเส้นตรง OA เป็นเส้นสะท้อน

23. สะท้อนจุด B ได้จุด B'

24. วัดพิกัดของจุด B และ B'

25. ใช้เครื่องมือลูกศรลากจุด B ไปมา ตามเส้นกราฟ แล้วสังเกต พิกัดของจุด B และ B' ที่วัดไว้

คำถาม 5 พิกัดของจุด B และ B' มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

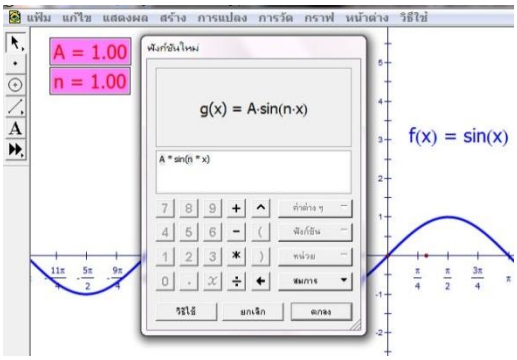
คำถาม 6 จากการทำกิจกรรมนี้ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมสัมพันธ์กันอย่างไร

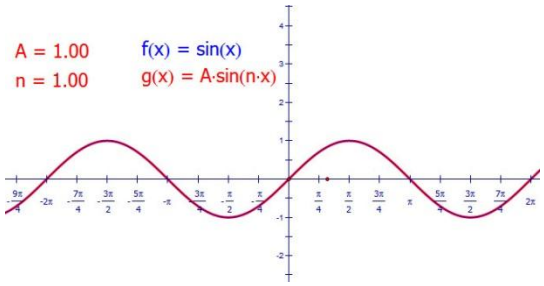
ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันหนึ่งที่มิใช่ฟังก์ชันพีชคณิต เป็นฟังก์ชันที่ช่วยในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และมีความสำคัญในการศึกษาวิทยาศาสตร์ด้วยเช่นกัน เช่น การศึกษาคลื่นเสียงและคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

แบบร่างและการสืบเสาะ

1. เปิดแฟ้ม แกน X เป็นเรเดียน.gsp
2. สร้างพารามิเตอร์ใหม่สองตัว คือ A =1.00 และ n = 1.00 โดยใช้คำสั่ง **พารามิเตอร์ใหม่** จากเมนูกราฟ
3. เขียนกราฟของฟังก์ชัน f(x) = sin(x) โดยใช้คำสั่ง **เขียนกราฟของฟังก์ชันใหม่** จากเมนูกราฟ แสดงกราฟเป็นเส้นบาง สีน้ำเงิน
4. เขียนกราฟของฟังก์ชัน g(x) = Asin(nx) โดยใช้คำสั่ง **เขียนกราฟของฟังก์ชันใหม่** จากเมนูกราฟ แสดงกราฟเป็นเส้นหนา สีแดง





5. ให้ n = 1 แล้วใช้เครื่องมือลูกศรเลือกพารามิเตอร์ A ลองเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์โดยกดแป้นพิมพ์ + เมื่อต้องการเพิ่มค่า และกดแป้นพิมพ์ - เมื่อต้องการลดค่า สังเกตการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของกราฟ

คำถาม 1 การเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ A ทำให้กราฟของฟังก์ชัน g เปลี่ยนแปลงอย่างไรเมื่อเปรียบเทียบกับกราฟของฟังก์ชัน f

คำถาม 2 ตารางต่อไปนี้แสดงฟังก์ชันในรูป $g(x) = Asin(nx)$ ให้ A = 1.00 จากนั้นให้เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ n โดยเลือกพารามิเตอร์ n แล้วกดแป้นพิมพ์ + เมื่อต้องการเพิ่มค่าและกดแป้นพิมพ์ - เมื่อต้องการลดค่า สังเกตการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของกราฟ เราสามารถสรุปอะไรได้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่าง n กับคาบของฟังก์ชันไซน์

n	$g(x) = Asin(nx)$	จำนวนครั้งที่ฟังก์ชันซ้ำในช่วง 2π	คาบของฟังก์ชันไซน์
1	$g(x) = Asin(x)$	1	2π
2			
3			
4			
n			

6. เลือกคำสั่ง **ทางเลือกเอกสาร** จากเมนูแฟ้ม แล้วเลือก **เพิ่มหน้า/ หน้าว่าง**
7. ในหน้าใหม่สร้างพารามิเตอร์ใหม่หนึ่งตัวคือ c = 0 โดยใช้คำสั่ง **พารามิเตอร์ใหม่** จากเมนูกราฟ
8. เขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = sin(x)$ โดยใช้คำสั่ง **เขียนกราฟของฟังก์ชันใหม่** จากเมนูกราฟ แสดงกราฟเป็นเส้นบาง สีน้ำเงิน
9. เขียนกราฟของฟังก์ชัน $g(x) = sin(x + c)$ โดยใช้คำสั่ง **เขียนกราฟของฟังก์ชันใหม่** จากเมนูกราฟ แสดงกราฟเป็นเส้นหนา สีแดง

คำถาม 3 ให้เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ c โดยเลือกพารามิเตอร์ c แล้วกดแป้นพิมพ์ + เมื่อต้องการเพิ่มค่าและกดแป้นพิมพ์ - เมื่อต้องการลดค่า สังเกตการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของกราฟ เราสามารถสรุปอะไรได้เกี่ยวกับ c

เอกสารเพิ่มเติม

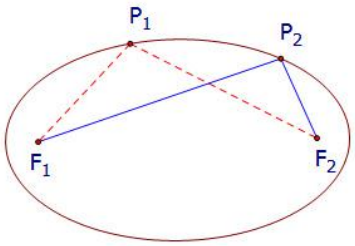
การใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการสอนเรื่องภาคตัดกรวย

วงรีตามบทนิยามเชิงเรขาคณิต

วงรีเป็นโค้งรูปไข่ที่เสมือนการยืดวงกลมให้ยาวขึ้นตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลางเส้นใดเส้นหนึ่ง ในกิจกรรมนี้เราจะสร้างวงรีจากบทนิยามเชิงเรขาคณิต โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) แล้วใช้แบบร่างที่สร้างขึ้นสำรวจวงรี

บทนิยามเชิงเรขาคณิตของวงรี

วงรี (ellipse) คือเซตของจุดทั้งหมดในระนาบ ซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังจุด F_1 และ F_2 ซึ่งตรึงอยู่กับที่ มีค่าคงตัวดังแสดงในรูป โดยค่าคงตัวนี้ต้องมากกว่าระยะห่างระหว่างจุดตรึงที่อยู่กับที่ทั้งสองจุด จุดสองจุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า โฟกัส (focus) ของวงรี

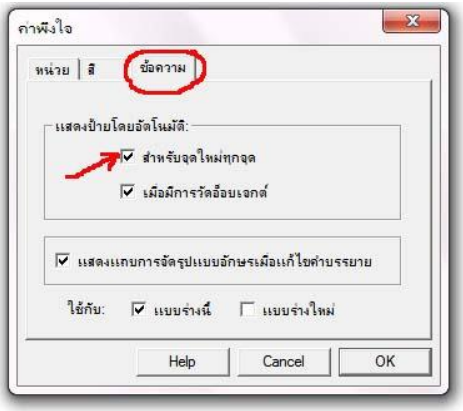


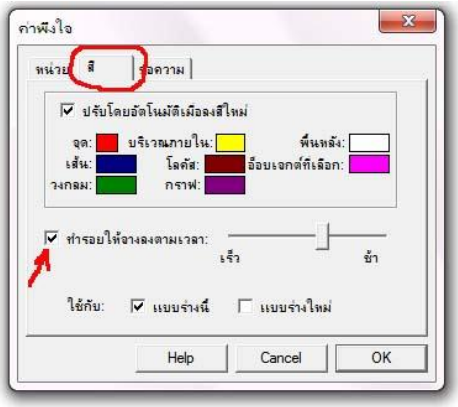
$P_1F_1 + P_1F_2 = P_2F_1 + P_2F_2 = k$

เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

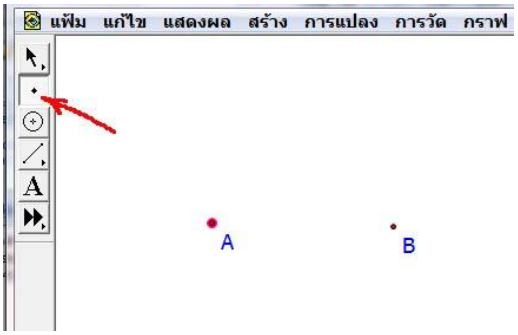
แบบร่างและการสืบเสาะ

1. เปิดแฟ้มใหม่ ในแบบร่างใหม่เลือกคำสั่ง **ค่าพึงใจ** จากเมนูแก้ไข บนแผงรายการข้อความให้ทำเครื่องหมาย ✓ สำหรับจุดใหม่ทุกจุด และแผงรายการสีให้ทำเครื่องหมาย ✓ทำรอยให้จางลงตามเวลา

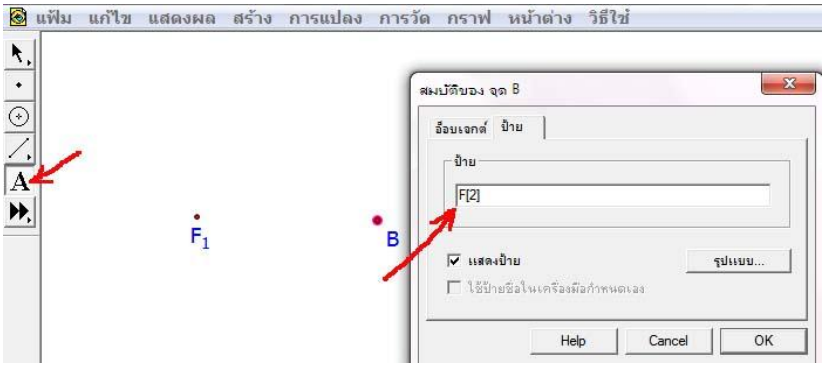




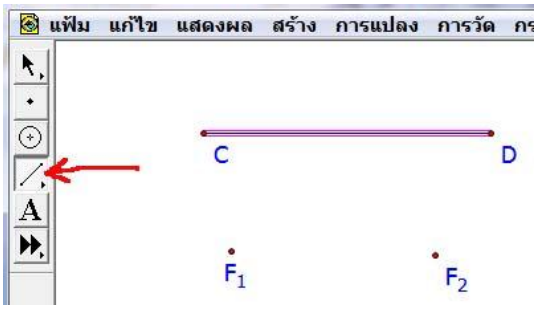
2. ใช้เครื่องมือลงจุด ลงจุด 2 จุดในแนวนอนและให้อยู่ห่างกันพอสมควร (ประมาณ 3 - 4 ซม.)



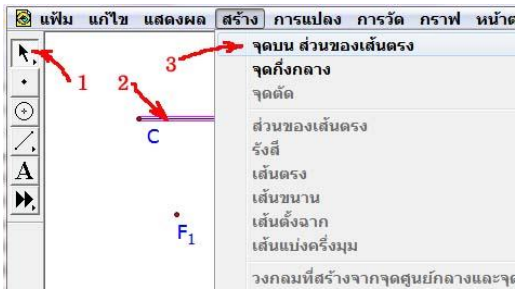
3. เปลี่ยนชื่อจุด A และจุด B เป็น F_1 และ F_2 ตามลำดับ โดยใช้เครื่องมือสร้างข้อความดับเบิลคลิกที่ตัว อักษร A หรือ B แล้วเปลี่ยนชื่อ



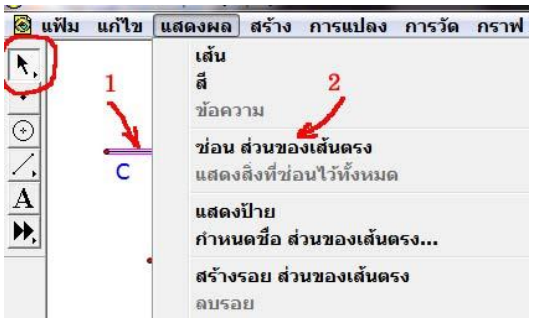
4. ใช้เครื่องมือส่วนของเส้นตรง สร้างส่วนของเส้นตรง CD ให้ยาวพอสมควร และยาวกว่าระยะห่างระหว่างจุด F_1 และ F_2



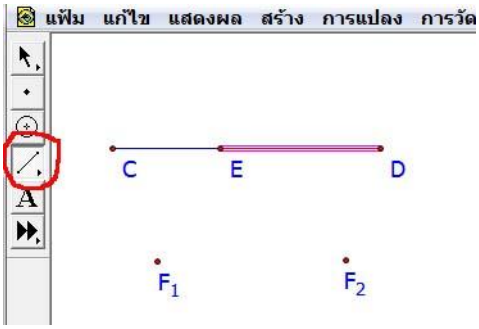
5. สร้างจุดบนส่วนของเส้นตรง CD โดยเลือกส่วนของเส้นตรง CD แล้วเลือกคำสั่ง **จุดบน ส่วนของเส้นตรง** จากเมนูสร้าง



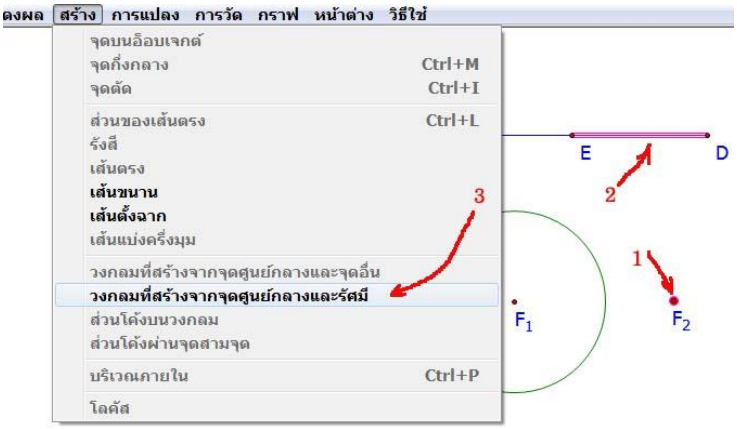
6. ซ่อนส่วนของเส้นตรง CD โดยเลือกส่วนของเส้นตรง CD แล้วเลือกคำสั่ง**ซ่อน ส่วนของเส้นตรง** จากเมนูแสดงผล



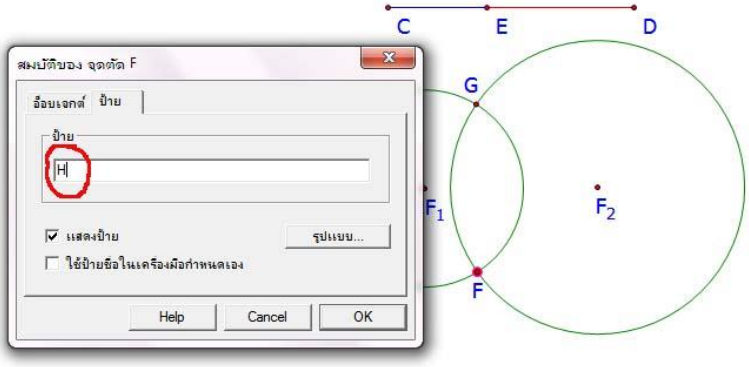
7. ใช้เครื่องมือส่วนของเส้นตรง สร้างส่วนของเส้นตรง CE และ ED



8. ใช้เครื่องมือลูกศรเลือกจุด F_1 และส่วนของเส้นตรง CE แล้วเลือกคำสั่ง **วงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและรัศมี** จากเมนูสร้าง
9. ใช้เครื่องมือลูกศรเลือกจุด F_2 และส่วนของเส้นตรง ED แล้วเลือกคำสั่ง **วงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและรัศมี** จากเมนูสร้าง

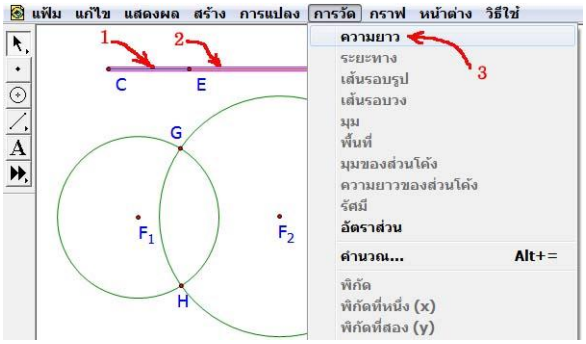


10. ใช้เครื่องมือลูกศรเลือกวงกลมทั้งสองวงแล้วเลือกคำสั่ง **จุดตัด** จากเมนูสร้าง เปลี่ยนชื่อจุดตัด F เป็น H โดยใช้เครื่องมือสร้างข้อความดับเบิลคลิกที่ตัว F แล้วเปลี่ยนชื่อ

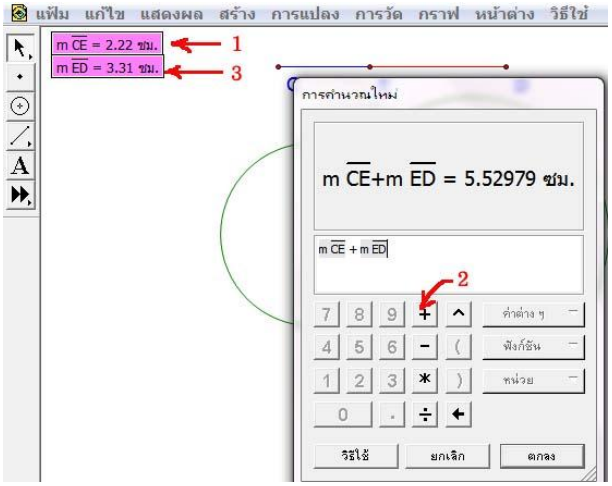


ใช้เครื่องมือลูกศรลากจุด E ไปมาบนส่วนของเส้นตรง CD แล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงของจุดตัด

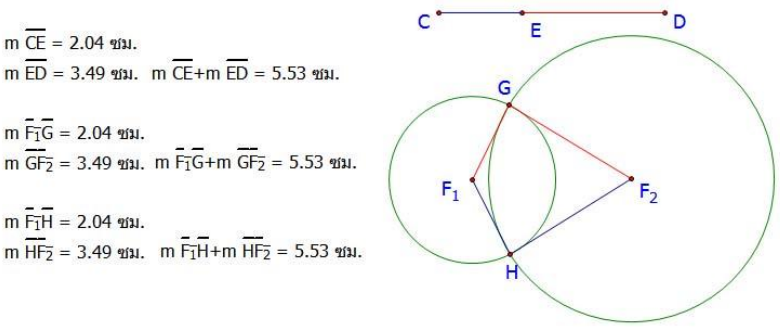
11. วัดความยาวส่วนของเส้นตรง CE และ ED โดยเลือกส่วนของเส้นตรงทั้งสองแล้วเลือกคำสั่ง **ความยาว** จากเมนูการวัด



12. คำนวณผลบวกของความยาว CE และ ED โดยใช้คำสั่ง **คำนวณ** จากเมนูการวัด



13. ใช้เครื่องมือส่วนของเส้นตรง สร้างส่วนของเส้นตรง F_1G, F_2G, F_1H และ F_2H
14. วัดความยาวส่วนของเส้นตรง F_1G, F_2G, F_1H และ F_2H โดยเลือกส่วนของเส้นตรงทั้งสี่แล้วเลือกคำสั่ง**ความยาว** จากเมนูการวัด
15. คำนวณผลบวกของความยาว F_1G และ F_2G โดยใช้คำสั่ง **คำนวณ** จากเมนูการวัด
16. คำนวณผลบวกของความยาว F_1H และ F_2H โดยใช้คำสั่ง **คำนวณ** จากเมนูการวัด

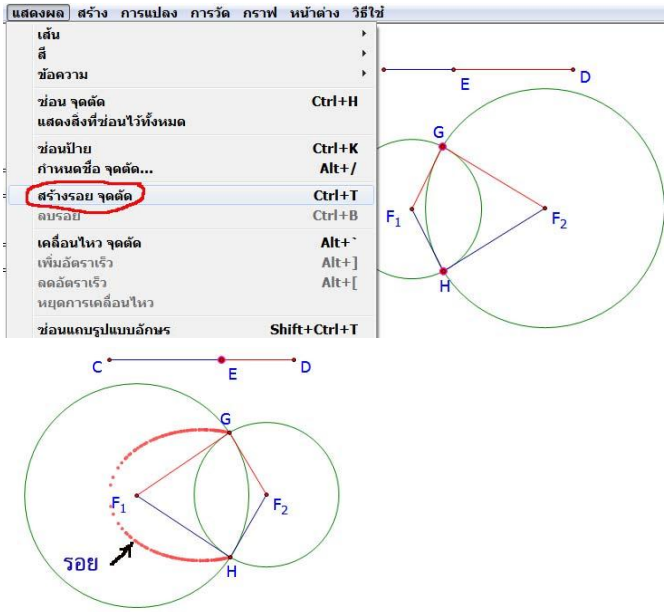


คำถาม 1 ใช้เครื่องมือลูกศรลากจุด E ไปมาบนส่วนของเส้นตรง CD สังเกตเห็นอะไรเกี่ยวกับค่าที่วัดได้ และค่าที่ได้จากการคำนวณ

คำถาม 2 ใช้เครื่องมือลูกศรลากจุด F_2 ให้ห่างออกจาก F_1 แต่ต้องไม่มากกว่า CD แล้วลากจุด E ไปมาบนส่วนของเส้นตรง CD ค่าที่วัดได้และค่าที่คำนวณไว้เปลี่ยนแปลงอย่างไร

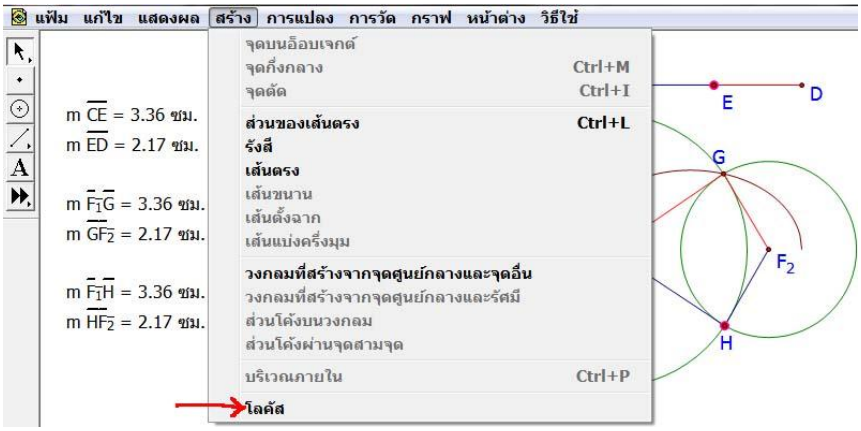
คำถาม 3 ใช้เครื่องมือลูกศรลากจุด F_2 ให้ใกล้ F_1 มากกว่าตอนเริ่มต้น แล้วลากจุด E ไปมาบนส่วนของเส้นตรง CD ค่าที่วัดได้และค่าที่คำนวณไว้เปลี่ยนแปลงอย่างไร

17. เลือกจุด G และ จุด H แล้วเลือกคำสั่ง **สร้างรอยจุดตัด** จากเมนูแสดงผล แล้วลากจุด E ไปมาอีกครั้ง จุด G และจุด H จะทิ้งรอยไว้ทุกแห่งที่จุดผ่านไป เรียกว่า รอย



18. ลากจุด F_2 ให้ออกห่างจากจุด F_1 จากนั้นลากจุด E ไปมาอีกครั้งแล้วสังเกตรอยที่เกิดขึ้น เปรียบเทียบวงรีนี้กับวงรีก่อนหน้านี้ ลองเปลี่ยนระยะห่างระหว่างจุด F_1 และจุด F_2 ให้มีขนาดต่าง ๆ แล้วทำเช่นเดิม การสร้างรอยวงรีด้วยวิธีนี้ใช้ได้ดีในการแสดงให้เห็นว่า โค้งของวงรีเกิดจากเซตของจุดได้อย่างไร แต่ผู้เรียนอาจจะรู้สึกหงุดหงิดที่ต้องลากจุด E ครั้งแล้วครั้งเล่า วิธีต่อไปนี้จะเป็นวิธีสร้างวงรีที่ดีกว่า

19. เลือกจุด G และ จุด H แล้วเลือกคำสั่ง **สร้างรอยจุดตัด** จากเมนูแสดงผล เพื่อยกเลิกการสร้างรอยจุด G และจุด H



20. เลือกจุด E และจุด G แล้วเลือกคำสั่ง **โลคัส** จากเมนูสร้าง โค้งของวงรีครึ่งบนจะปรากฏขึ้น เรียกโค้งนี้ว่าโลคัสของจุด G เมื่อจุด E เคลื่อนที่บนส่วนของเส้นตรง CD
21. เลือกจุด E และจุด H แล้วเลือกคำสั่ง **โลคัส** จากเมนูสร้าง โค้งของวงรีส่วนที่เหลือจะปรากฏขึ้นทำให้ได้วงรีที่สมบูรณ์
22. ลากจุด F_1 หรือ F_2 ไปที่ตำแหน่งต่าง ๆ แล้วสังเกตว่าวงรีเปลี่ยนแปลงอย่างไร

คำถาม 4 ลักษณะของวงรีเป็นอย่างไรเมื่อจุด F_1 และจุด F_2 อยู่ใกล้กัน

คำถาม 5 เมื่อจุด F_1 และจุด F_2 อยู่ห่างกันแต่น้อยกว่าความยาว CD วงรีจะเป็นอย่างไร

คำถาม 6 เกิดอะไรขึ้นเมื่อจุด F_1 และจุด F_2 ซ้อนทับกันพอดี เพราะเหตุใด

คำถาม 7 เกิดอะไรขึ้นเมื่อจุด F_1 และจุด F_2 อยู่ห่างกันแต่มากกว่าความยาว CD เพราะเหตุใด

คำถาม 8 ตำแหน่งของจุด F_1 และจุด F_2 มีผลต่อวงรีอย่างไร เมื่อผลรวมของระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรีไปยังโฟกัสทั้งสองคงตัว

คำถาม 9 ถ้าต้องการให้วงรีอยู่ในแนวดิ่งจะต้องทำอย่างไร

งานมอบหมาย สร้างวงรีโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)

1) ให้สร้างวงรีโดยมีโฟกัสอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่งและจุดอีกจุดหนึ่งซึ่งอยู่ภายในวงกลมวงนั้น
2) ให้สร้างวงรีเมื่อ กำหนดจุดศูนย์กลางของวงรี ความยาวแกนเอกและแกนโทให้

พาราโบลาตามบทนิยามเชิงเรขาคณิต

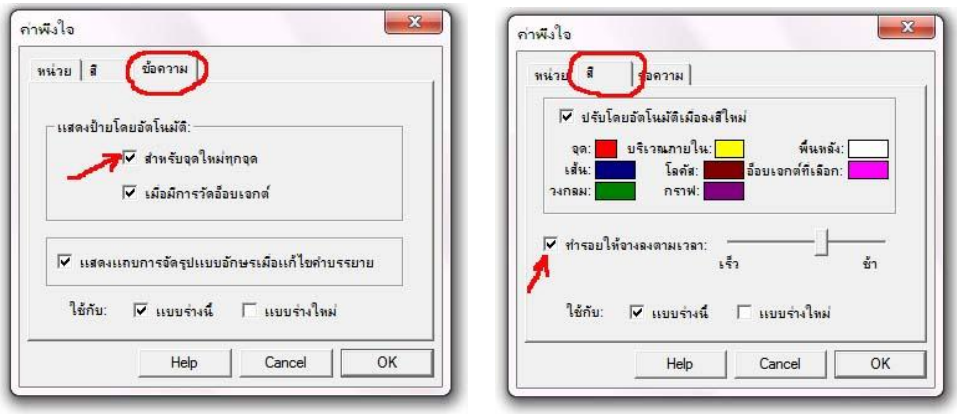
เราเคยเรียนรู้พาราโบลาที่เป็นกราฟของสมการมาแล้วเช่น $y = x^2 + 1$ แต่คราวนี้เราจะศึกษาพาราโบลาด้วยวิธีการทางเรขาคณิตโดยไม่ต้องใช้สมการพีชคณิต ในกิจกรรมนี้เราจะสร้างพาราโบลาจากบทนิยามเชิงเรขาคณิต โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) และใช้แบบร่างที่สร้างขึ้นสำรวจพาราโบลา

บทนิยามเชิงเรขาคณิตของพาราโบลา

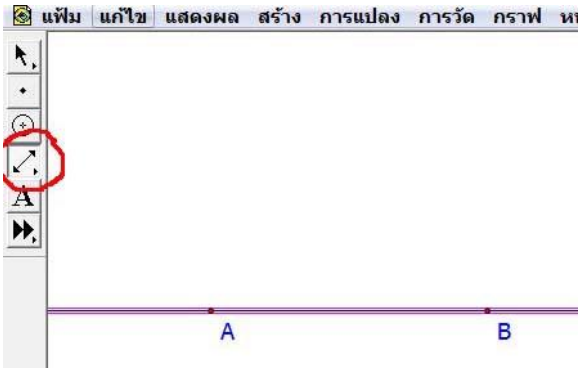
พาราโบลา (parabola) คือเซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งอยู่ห่างจากจุด F ที่ตรึงอยู่กับที่จุดหนึ่งและเส้นตรง l ที่ตรึงอยู่กับที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า โฟกัส และเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า เส้นบังคับ หรือ ไดเรกตริกซ์ (directrix) ของพาราโบลา

แบบร่างและการสืบเสาะ

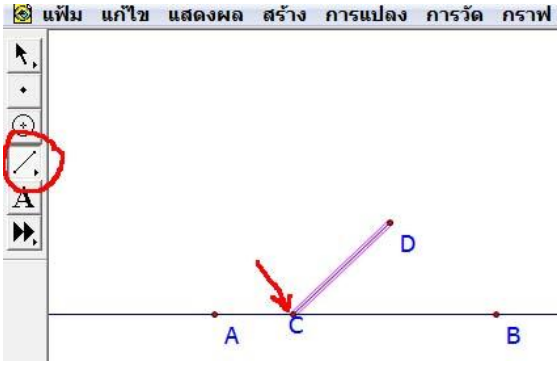
1. เปิดแฟ้มใหม่ ในแบบร่างใหม่เลือกคำสั่ง **ค่าพึงใจ** จากเมนูแก้ไข บนแผงรายการข้อความให้ทำเครื่องหมาย ✓ สำหรับจุดใหม่ทุกจุด และแผงรายการสีให้ทำเครื่องหมาย ✓ทำรอยให้จางลงตามเวลา



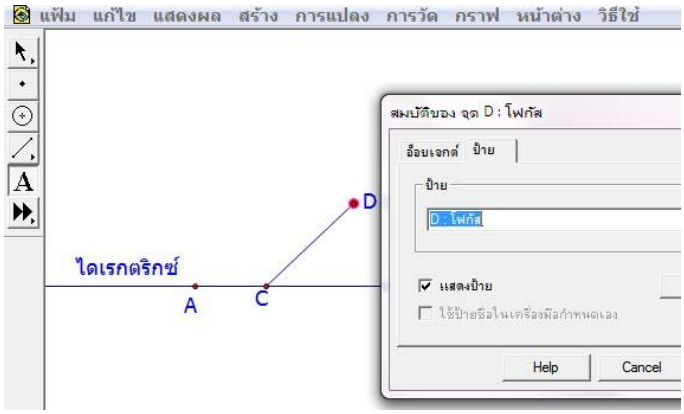
2. ใช้เครื่องมือเส้นตรง สร้างเส้นตรง AB ในแนวนอน เส้นตรงควรอยู่ในตำแหน่งหนึ่งในสามจากขอบล่างของแบบร่าง



3. ใช้เครื่องมือส่วนของเส้นตรง สร้างส่วนของเส้นตรง CD โดยให้จุด C อยู่บนเส้นตรง AB และจุด D อยู่เหนือเส้นตรง AB พอสมควร (ประมาณ 2 - 3 ซม.)

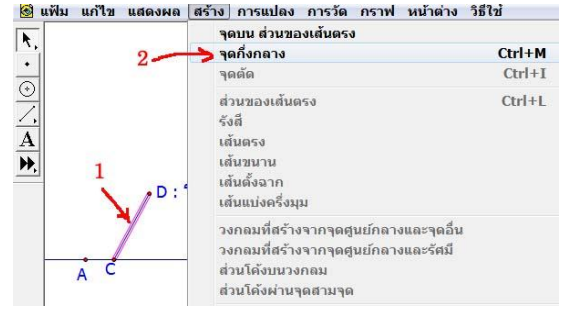


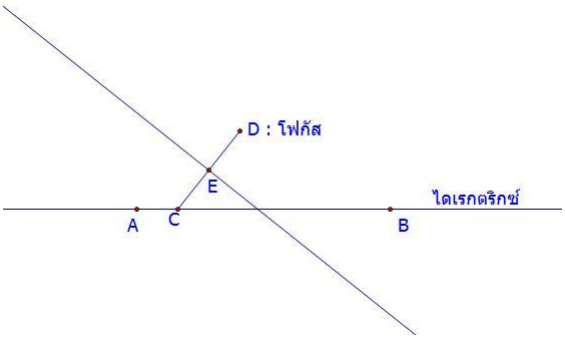
4. ใช้เครื่องมือสร้างข้อความแสดงป้ายชื่อเส้นตรงและเปลี่ยนชื่อเป็น ไดเรกตริกซ์ แล้วเปลี่ยนชื่อจุด D เป็น D : โฟกัส



5. สร้างจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง CD โดยเลือกส่วนของเส้นตรง CD แล้วเลือกคำสั่ง **จุดกึ่งกลาง**จากเมนูสร้าง

6. เลือกส่วนของเส้นตรง CD และจุดกึ่งกลาง E แล้วเลือกคำสั่ง **เส้นตั้งฉาก** จากเมนูสร้าง

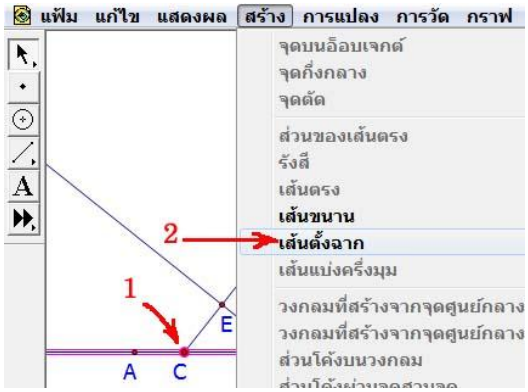




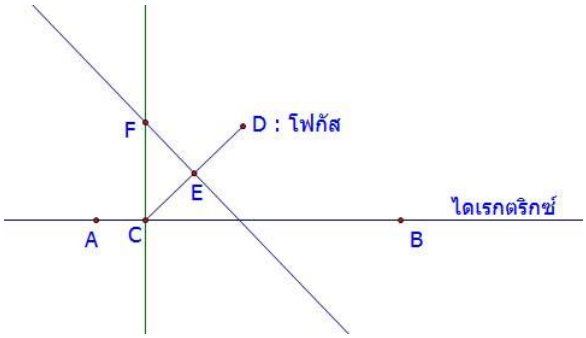
ข้อ 5 ข้อ 6

คำถาม 1 ให้ลองนึกภาพของจุดใด ๆ บนเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง CD คิดว่าระยะห่างของจุดเหล่านี้ถึงจุด C เทียบกับระยะห่างของจุดเหล่านี้ถึงจุด D จะเป็นอย่างไรเพราะเหตุใด

7. สร้างเส้นตั้งฉากกับเส้นตรง AB และผ่านจุด C โดยเลือกเส้นตรง AB และจุด C แล้วเลือกคำสั่ง **เส้นตั้งฉาก** จากเมนูสร้าง ดังรูป



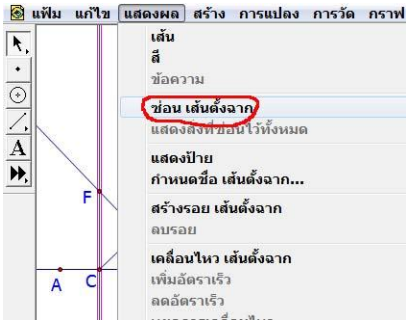
8. เลือกเส้นตั้งฉากทั้งสองเส้น (เป็นเส้นตั้งฉากที่สร้างในข้อ 6 และข้อ 7) แล้วเลือกคำสั่ง **จุดตัด** จากเมนูสร้าง



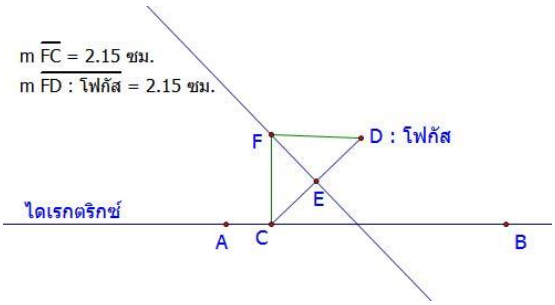
จะได้จุด F ซึ่งเป็นจุดแรกบนพาราโบลา

คำถาม 2 เพราะเหตุใดจุด F จึงเป็นจุดบนพาราโบลา

2. ซ่อนเส้นตรง FC โดยเลือกเส้นตรง FC แล้วเลือกคำสั่ง **ซ่อนเส้นตั้งฉาก** จากเมนูแสดงผล



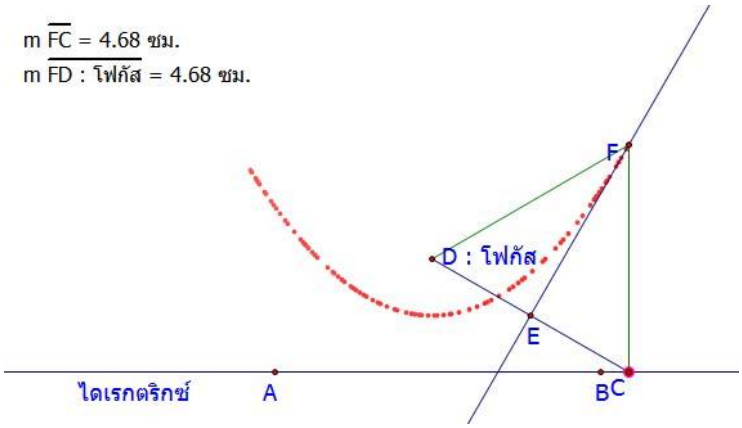
3. ใช้เครื่องมือสร้างส่วนของเส้นตรง สร้างส่วนของเส้นตรง FC และ FD
4. วัดความยาวส่วนของเส้นตรง FC และ FD โดยเลือกส่วนของเส้นตรงทั้งสองแล้วเลือกคำสั่ง **ความยาว** จากเมนูการวัด



คำถาม 3 ใช้เครื่องมือลูกศรลากจุด C ไปมาบนเส้นตรง AB สังเกตเห็นอะไรเกี่ยวกับความยาวที่วัดได้เมื่อลากจุด C

ให้อธิบายว่าทำไมจุด F จึงเป็นจุดที่อยู่บนพาราโบลาที่กำหนดโดยโฟกัสและเส้นไดเรกตริกซ์ที่กำหนดให้ ไม่ว่าจะลากจุด C ไปอยู่ที่ตำแหน่งใดบนไดเรกตริกซ์

5. เลือกจุด F แล้วเลือกคำสั่ง **สร้างรอยจุดตัด** จากเมนูแสดงผล แล้วลากจุด C ไปมาอีกครั้ง จุด F จะทิ้งรอยไว้ทุกแห่งที่จุดผ่านไป เรียกว่า รอย

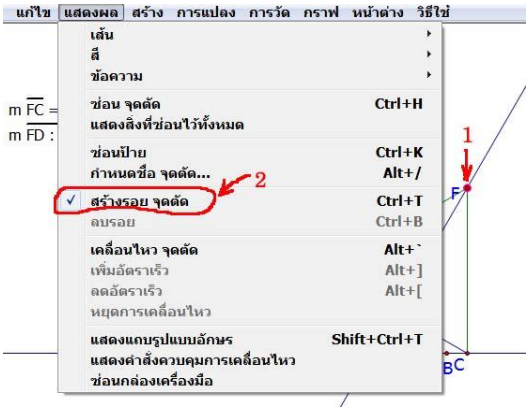


(เมื่อเสร็จข้อ 12)

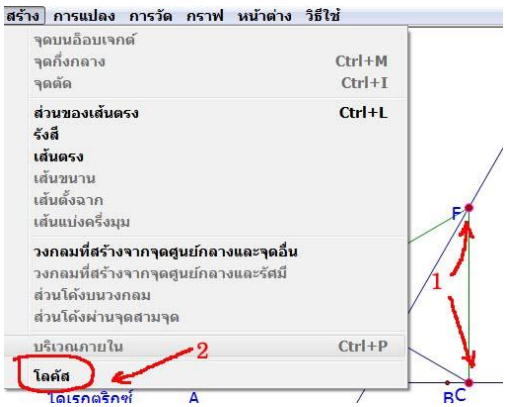
6. ลากโฟกัสออกห่างจากไดเรกตริกซ์ แล้วลากจุด C ไปมาอีกครั้ง แล้วสังเกตเปรียบเทียบเส้นโค้งนี้กับเส้นโค้งก่อนหน้านี้ ต่อไปให้ลากโฟกัสเข้าใกล้ไดเรกตริกซ์มากกว่าครั้งแรก แล้วลากจุด C ไปมาอีกครั้ง การสร้างรอยเส้นโค้งด้วยวิธีนี้ใช้ได้ดีในการแสดงให้เห็นว่าเส้นโค้งเกิดจากเซตของจุดได้อย่างไร แต่ผู้เรียนอาจจะรู้สึกหงุดหงิดที่ต้องลากจุด C ครั้งแล้วครั้งเล่า วิธีต่อไปนี้จะเป็นวิธีสร้างเส้นโค้งที่ดีกว่า

7. เลือกจุด F แล้วเลือกคำสั่ง **สร้างรอยจุดตัด** จากเมนูแสดงผล เพื่อยกเลิกการสร้างรอยจุด F

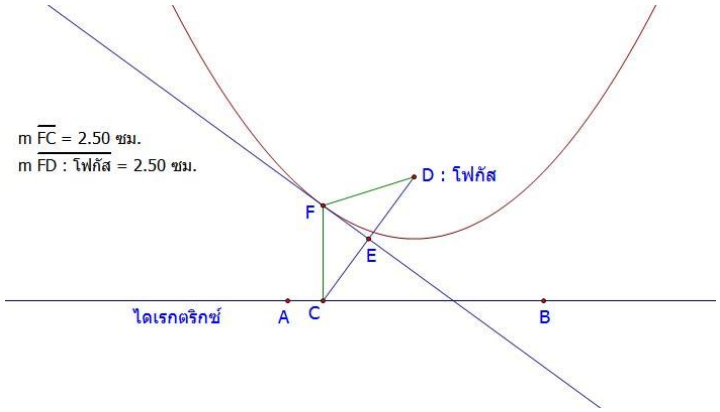
8. เลือกจุด F และจุด C แล้วเลือกคำสั่ง **โลคัส** จากเมนูสร้าง เส้นโค้งทั้งเส้นจะปรากฏขึ้น เรียกเส้นโค้งนี้ว่าโลคัสของจุด F เมื่อจุด C เคลื่อนที่ไปบนเส้นตรง AB



ข้อ 14

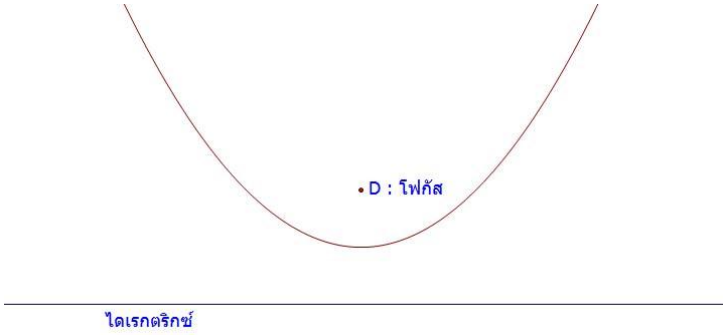


ข้อ 15



(เมื่อเสร็จข้อ 15)

9. ให้ซ่อนทุกอย่างยกเว้น พาราโบลา โฟกัส และไดเรกตริกซ์ เพื่อให้แบบร่างดูยุ่งเหยิงน้อยลง
10. ลากโฟกัสไปรอบ ๆ แล้วสังเกตว่าเส้นโค้งเปลี่ยนแปลงอย่างไร



ข้อ 16

คำถาม 4 พาราโบลามีการเปลี่ยนแปลงอย่างไรเมื่อลากโฟกัสเข้าใกล้ไดเรกตริกซ์ และเมื่อลากโฟกัสห่างออกไปจากไดเรกตริกซ์

คำถาม 5 เกิดอะไรขึ้นกับพาราโบลา เมื่อลากโฟกัสต่ำกว่าไดเรกตริกซ์

คำถาม 6 เกิดอะไรขึ้นกับพาราโบลา เมื่อลากจุด B ให้ไดเรกตริกซ์อยู่ในแนวดิ่งและอยู่ทางซ้ายของโฟกัส

คำถาม 7 เกิดอะไรขึ้นกับพาราโบลา เมื่อลากจุด B ให้ไดเรกตริกซ์อยู่ในแนวดิ่งและอยู่ทางขวาของโฟกัส

คำถาม 8 จะเกิดอะไรขึ้นถ้าโฟกัสอยู่บนไดเรกตริกซ์ เพราะเหตุใด

คำถาม 9 จะเกิดอะไรขึ้นกับพาราโบลา ถ้าไดเรกตริกซ์ เปลี่ยนจากเส้นตรงเป็นส่วนของเส้นตรงเพราะเหตุใด

งานที่มอบหมาย

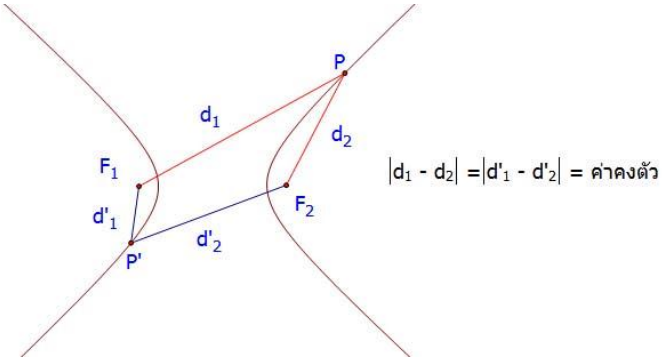
1. ให้สร้างพาราโบลา โดยกำหนด โฟกัส และ ไดเรกตริกซ์เอง
2. กำหนดจุด F เป็นโฟกัสของพาราโบลา และเส้นสัมผัสพาราโบลาเส้นหนึ่ง มาให้ ให้สร้างพาราโบลาที่มีจุด F เป็นโฟกัส และสัมผัสกับเส้นสัมผัสที่กำหนดให้

ไฮเพอร์โบลาตามบทนิยามเชิงเรขาคณิต

ไฮเพอร์โบลาเป็นภาคตัดกรวยที่มีรูปร่างต่างจากวงรี แต่มีบทนิยามที่คล้ายกัน โดยบทนิยามของวงรีใช้ผลบวกของระยะห่างจากโฟกัสทั้งสอง ในขณะที่นิยามของไฮเพอร์โบลาใช้ผลต่างของระยะห่างจากโฟกัสทั้งสอง ในกิจกรรมนี้เราจะสร้างไฮเพอร์โบลาจากบทนิยามเชิงเรขาคณิต โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) และใช้แบบร่างที่สร้างขึ้นสำรวจไฮเพอร์โบลา

บทนิยามเชิงเรขาคณิตของไฮเพอร์โบลา

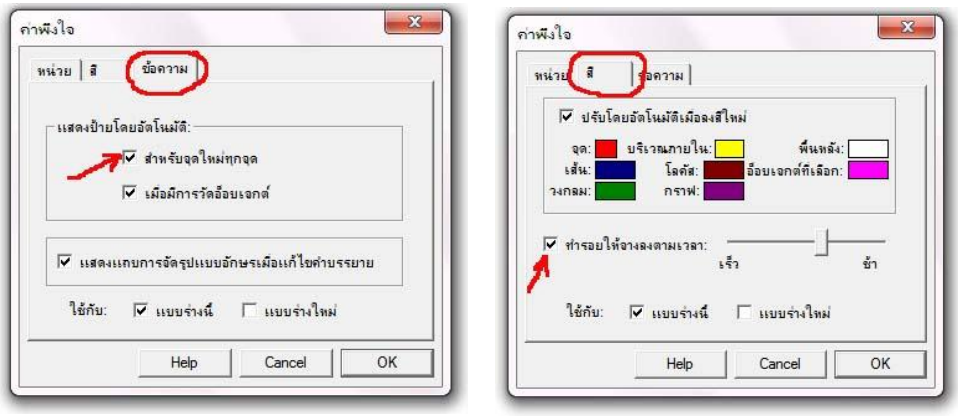
ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola) คือเซตของจุดทั้งหมดในระนาบ ซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังจุด F_1 และ F_2 ที่ตรึงอยู่กับที่ มีค่าคงตัว (ดังรูป ก) โดยค่าคงตัวน้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสอง จุด F_1 และ F_2 ดังกล่าวนี้เรียกว่า โฟกัส ของไฮเพอร์โบลา



รูป ก

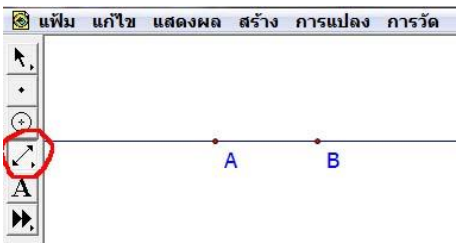
แบบร่างและการสืบเสาะ

1. เปิดแฟ้มใหม่ ในแบบร่างใหม่เลือกคำสั่ง **ค่าพึงใจ** จากเมนูแก้ไข บนแผงรายการข้อความให้ทำเครื่องหมาย ✓ สำหรับจุดใหม่ทุกจุด และแผงรายการสีให้ทำเครื่องหมาย ✓ทำรอยให้จางลงตามเวลา

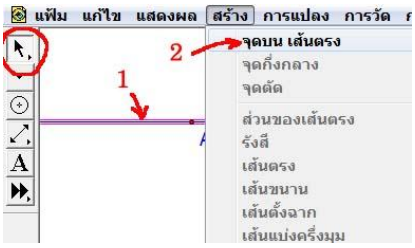


ข้อ 1

2. ใช้เครื่องมือเส้นตรง สร้างเส้นตรง AB โดยให้จุด A และจุด B อยู่ห่างกันพอสมควร (ประมาณ 2-3 ซม.)
3. สร้างจุดบนเส้นตรง AB โดยเลือกเส้นตรง AB แล้วเลือก **คำสั่งจุด บนเส้นตรง** จากเมนูสร้าง จากนั้นลากจุด C ให้อยู่ทางขวาของจุด B

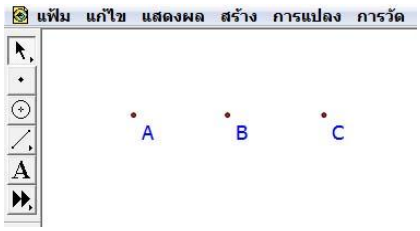


ข้อ 2

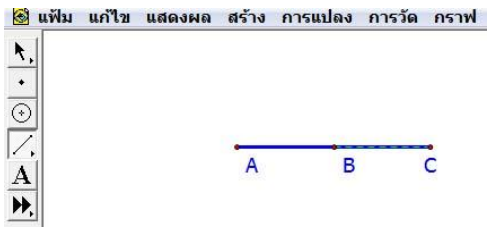


ข้อ 3

4. ซ่อนเส้นตรง AB โดยเลือกเส้นตรง AB แล้วเลือกคำสั่ง **ซ่อนเส้นตรง** จากเมนูแสดงผล
5. ใช้เครื่องมือส่วนของเส้นตรง สร้างส่วนของเส้นตรง AC และ BC โดยส่วนของเส้นตรง AC ใช้เส้นหนาสีน้ำเงิน และส่วนของเส้นตรง BC ใช้เส้นประสีเขียว



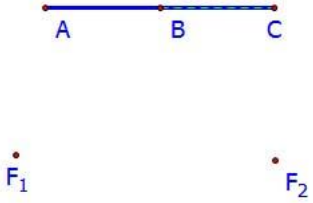
ข้อ 4



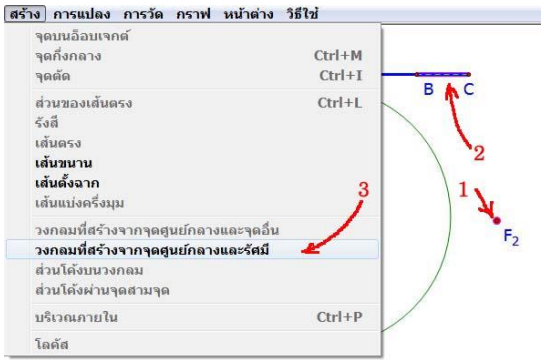
ข้อ 5

6. ใช้เครื่องมือลงจุด ลงจุด 2 จุด ในแนวนอนโดยให้ระยะห่างระหว่างจุดทั้งสองมากกว่าระยะห่างระหว่างจุด A กับจุด B

7. เปลี่ยนชื่อจุด D และ E เป็น F_1 และ F_2 ตามลำดับ โดยใช้เครื่องมือสร้างข้อความดับเบิลคลิกที่ตัว D และ E แล้วเปลี่ยนชื่อ
8. ใช้เครื่องมือลูกศรเลือกจุด F_1 และส่วนของเส้นตรง AC แล้วเลือกคำสั่ง **เขียนวงกลมจากจุดศูนย์กลางและรัศมี** จากเมนูสร้าง
9. ใช้เครื่องมือลูกศรเลือกจุด F_2 และส่วนของเส้นตรง BC แล้วเลือกคำสั่ง **เขียนวงกลมจากจุดศูนย์กลางและรัศมี** จากเมนูสร้าง

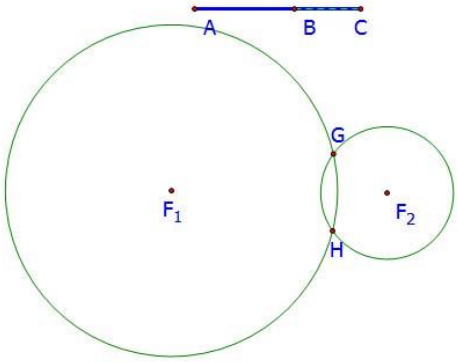


เมื่อเสร็จข้อ 7



ข้อ 9

10. ใช้เครื่องมือลูกศรเลือกวงกลมทั้งสอง แล้วเลือกคำสั่ง **จุดตัด** จากเมนูสร้าง เปลี่ยนชื่อจุดตัด F เป็น H โดยใช้เครื่องมือสร้างข้อความดับเบิลคลิกที่ตัว F แล้วเปลี่ยนชื่อ

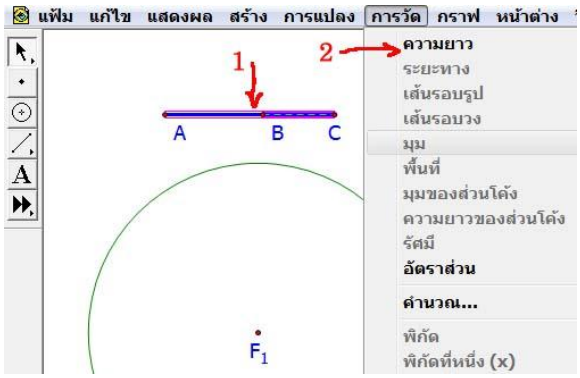


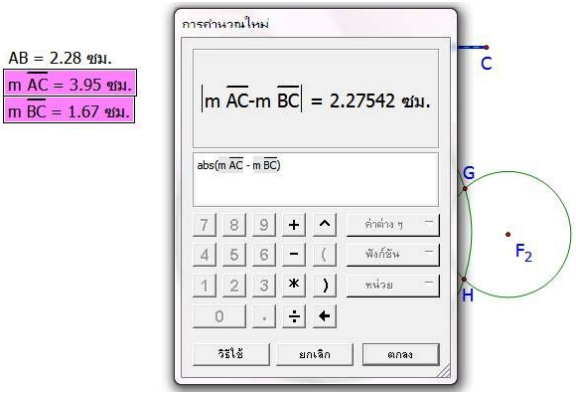
เมื่อเสร็จข้อ 10

คำถาม 1 ใช้เครื่องมือลูกศรลากจุด C ไปมา ให้จุด C ทางซ้ายของจุด A และทางขวาของ B แล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงของจุดตัดทั้งสอง คาดเดาเส้นทางของจุดตัดแล้วร่างลงในกระดาษ

11. วัดระยะห่าง AB ทำโดยเลือกจุด A และจุด B แล้วเลือกคำสั่ง **ระยะทาง** จากเมนูการวัด
12. วัดความยาวส่วนของเส้นตรง AC และ BC ทำโดยเลือกส่วนของเส้นตรงทั้งสองแล้วเลือกคำสั่ง **ความยาว** จากเมนูการวัด

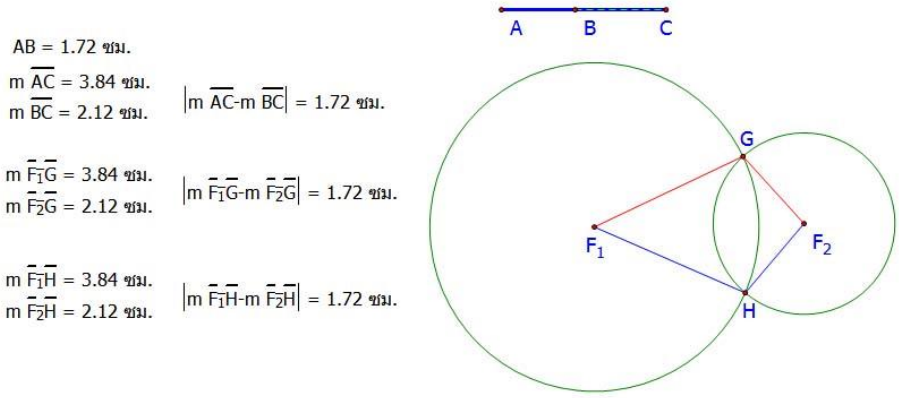
13. คำนวณค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของความยาว AC และ BC โดยใช้คำสั่ง **คำนวณ** จากเมนูการวัด ในกล่องโต้ตอบการคำนวณใหม่ เลือกคำสั่ง **abs** จากเมนูฟังก์ชันแล้วคลิกเลือกความยาวส่วนของเส้นตรงที่วัดไว้เพื่อใส่ในการคำนวณ





ข้อ 12 ข้อ 13

14. ใช้เครื่องมือส่วนของเส้นตรง สร้างส่วนของเส้นตรง F_1G, F_2G, F_1H และ F_2H
15. วัดความยาวส่วนของเส้นตรง F_1G, F_2G, F_1H และ F_2H ทำโดยเลือกส่วนของเส้นตรงทั้งสี่แล้วเลือกคำสั่ง **ความยาว** จากเมนูการวัด
16. คำนวณค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของความยาว F_1G และ F_2G โดยใช้คำสั่ง **คำนวณ** จากเมนูการวัด
17. คำนวณค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของความยาว F_1H และ F_2H โดยใช้คำสั่ง**คำนวณ** จากเมนูการวัด



เมื่อเสร็จข้อ 17

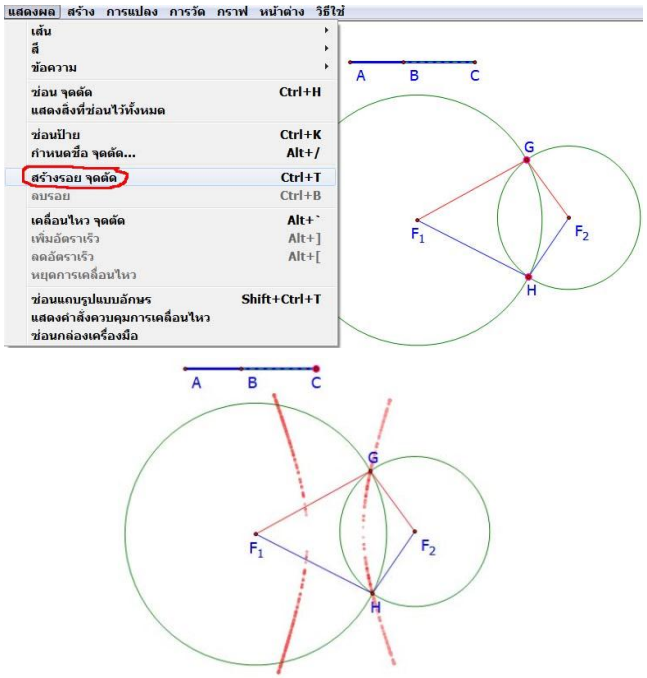
คำถาม 2 ใช้เครื่องมือลูกศรลากจุด C ไปมาให้จุด C ไปทั้งทางซ้ายของจุด A และทางขวาของจุด B สังเกตเห็นอะไรเกี่ยวกับค่าที่วัดไว้ และค่าที่ได้จากการคำนวณ

คำถาม 3 ใช้เครื่องมือลูกศรลากจุด F_2 ให้ห่างออกไปจากจุด F_1 แล้วลากจุด C เหมือนเดิม ค่าที่วัดได้และค่าที่คำนวณได้เปลี่ยนแปลงอย่างไร ลองเปลี่ยนระยะห่างระหว่างจุด F_1 และจุด F_2 หลาย ๆ ค่าโดยมีระยะมากกว่าระยะ AB ดูว่าผลที่ได้เหมือนกันหรือแตกต่างกัน

18. เลือกจุด G และจุด H แล้วเลือกคำสั่ง**สร้างรอยจุดตัด** จากเมนูแสดงผล แล้วลากจุด C ไปมาอีกครั้ง

    จุด G และจุด H จะทิ้งรอยไว้ทุกแห่งที่จุดผ่านไป เรียกว่ารอย

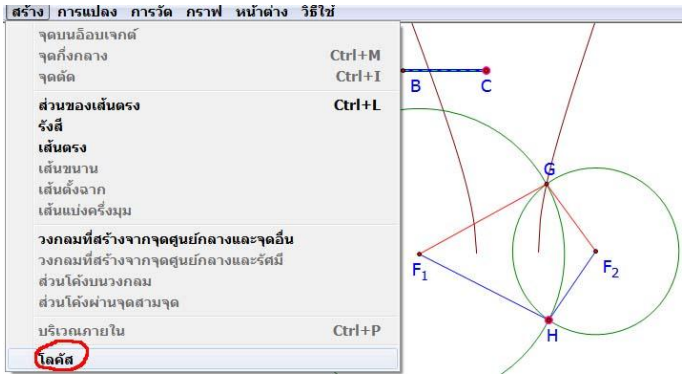
    รอยที่ปรากฏเหมือนกับเส้นทางของจุดตัดที่ร่างไว้ในคำถาม 1 หรือไม่

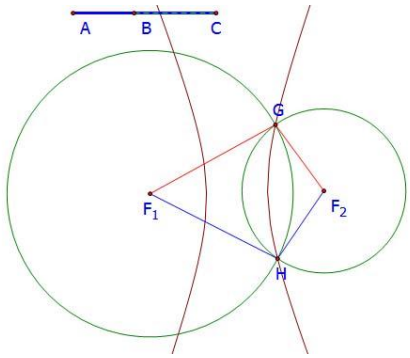


ข้อ 18

19. ลากจุด F_2 ให้ห่างออกไปจากจุด F_1 แล้วลากจุด C ไปมาอีกครั้งแล้วสังเกตรอย เปรียบเทียบไฮเพอร์โบลานี้กับไฮเพอร์โบลาก่อนหน้า ลองเปลี่ยนระยะห่างระหว่าง F_1 และ F_2 ให้มีขนาดต่าง ๆ แล้วทำเช่นเดิม การสร้างไฮเพอร์โบลาวิธีนี้ใช้ได้ดีในการแสดงให้เห็นว่า ไฮเพอร์โบลาเกิดจากเซตของจุดได้อย่างไร แต่ผู้เรียนอาจจะรู้สึกหงุดหงิดที่ต้องลากจุด C ครั้งแล้วครั้งเล่า วิธีต่อไปนี้จะเป็นวิธีสร้างไฮเพอร์โบลาที่ดีกว่า

20. เลือกจุด G และจุด H แล้วเลือกคำสั่ง **สร้างรอยจุดตัด** จากเมนูแสดงผล เพื่อยกเลิกการสร้างรอยจุด G และจุด H
21. เลือกจุด C และจุด G แล้วเลือกคำสั่ง **โลคัส** จากเมนูสร้าง ไฮเพอร์โบลาซีกบนจะปรากฏขึ้น เรียกโค้งนี้ว่าโลคัสของจุด G เมื่อจุด C เคลื่อนที่ไปบนเส้นตรง AB
22. เลือกจุด C และจุด H แล้วเลือกคำสั่ง **โลคัส** จากเมนูสร้าง ไฮเพอร์โบลาส่วนที่เหลือจะปรากฏขึ้น ทำให้ได้ไฮเพอร์โบลาที่สมบูรณ์





เมื่อเสร็จข้อ 21 เมื่อเสร็จข้อ 22

คำถาม 4 เมื่อจุด F_1 และจุด F_2 อยู่ใกล้กันแต่มากกว่าระยะ AB ไฮเพอร์โบลาจะเป็นอย่างไร

คำถาม 5 เมื่อจุด F_1 และจุด F_2 อยู่ห่างกันมาก ๆ ไฮเพอร์โบลาจะเป็นอย่างไร

คำถาม 6 เกิดอะไรขึ้น เมื่อจุด F_1 และจุด F_2 อยู่ห่างกันเท่ากับระยะ AB

คำถาม 7 เกิดอะไรขึ้น เมื่อจุด F_1 และจุด F_2 อยู่ห่างกันน้อยกว่าระยะ AB เพราะเหตุใด

คำถาม 8 ระยะห่างระหว่างจุด F_1 และจุด F_2 มีผลอย่างไรต่อไฮเพอร์โบลา เมื่อผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลาไปยังโฟกัสทั้งสองคงตัว

งานมอบหมาย สร้างไฮเพอร์โบลาโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ให้สร้างไฮเพอร์โบลาโดยมีโฟกัสอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง และจุดอีกจุดหนึ่งซึ่งอยู่ภายนอกวงกลมวงนั้น

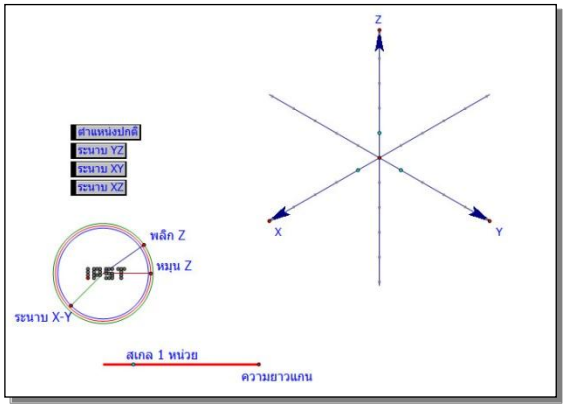
เอกสารเพิ่มเติม

การใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการสอนเวกเตอร์

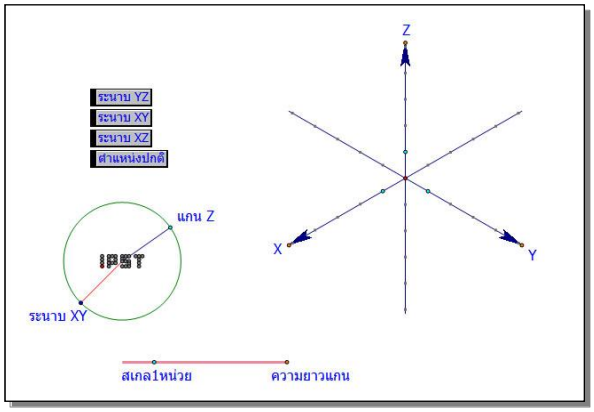
ระบบพิกัดฉากสามมิติ

ระบบพิกัดฉากสามมิติเมื่อแสดงอยู่บนแผ่นกระดาษ สำหรับบางคนแล้วอาจจะมีความยุ่งยากในการมองภาพบนระบบพิกัดฉากสามมิติที่อยู่นิ่งบนระนาบสองมิติ แต่เราสามารถแสดงระบบพิกัดฉากสามมิติและภาพสามมิติที่มีพลวัตโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ได้ระบบพิกัดฉากสามมิติซึ่งต่อไปนี้จะเรียกว่าแกนสามมิติ ที่จะใช้ต่อไปนี้เป็นแกนสามมิติที่สามารถพลิกแกน Z หมุนแกน Z และระนาบ XY ได้ แกนสามมิติมีส่วนประกอบที่สำคัญ 3 ส่วน คือ

1. ส่วนควบคุมการพลิกแกน Z หมุนแกน Z และหมุนระนาบ X-Y รวมถึงปุ่มแสดงการทำงานอีกสี่ปุ่ม
2. ส่วนควบคุมความยาวแกน และสเกลหนึ่งหน่วย
3. ระบบพิกัดฉากสามแกน



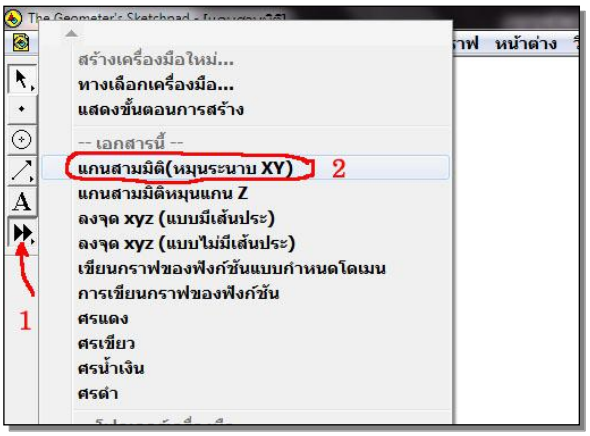
แกนสามมิติ



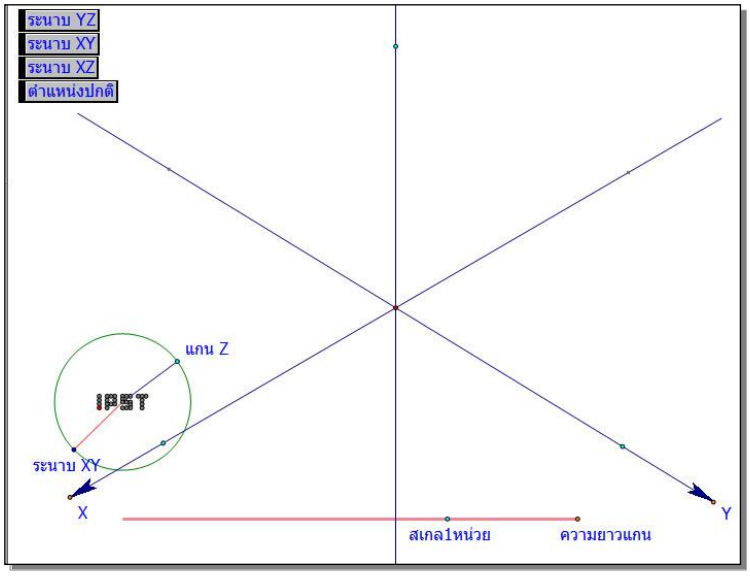
แกนสามมิติแบบหมุนระนาบ XY พลิกแกน Z

วิธีใช้แกนสามมิติ

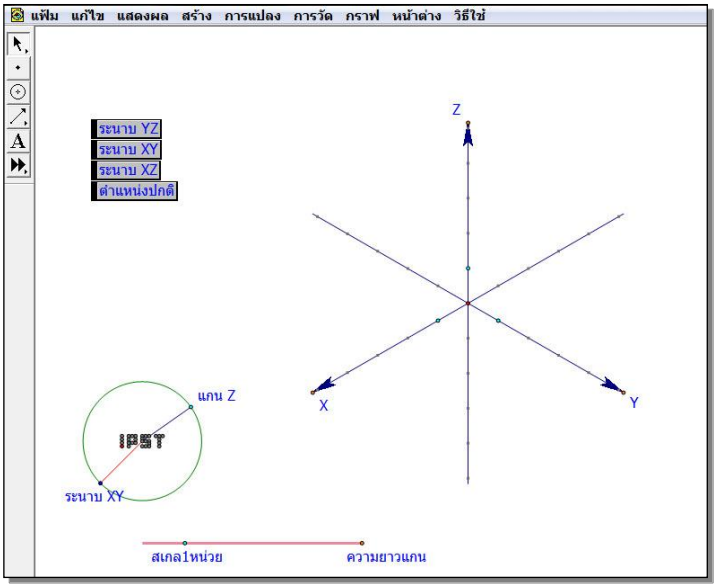
1. เปิดแฟ้ม แกนสามมิติ.gsp ในแบบร่างหน้าใหม่ เลือก **แกนสามมิติ(หมุนระนาบ XY)** จากเครื่องมือกำหนดเอง



2. ที่ปลายลูกศรจะมีส่วนควบคุมแกนปรากฏอยู่ เลือกตำแหน่งที่จะวางวงกลมควบคุมแกนสามมิติแล้วคลิก 1 ครั้ง จากนั้นจะปรากฏจุดกำเนิดและแกนสามมิติที่ปลายลูกศร
3. เลือกตำแหน่งที่จะวางจุดกำเนิดของแกนสามมิติแล้วคลิก 1 ครั้ง



4. กดแป้น Esc หรือคลิกที่กล่องเครื่องมือลูกศร เพื่อยกเลิกการเลือกเครื่องมือกำหนดเอง
5. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน **ตำแหน่งปกติ** เพื่อให้แกนอยู่ในตำแหน่งปกติ
6. เลื่อนจุดความยาวแกน และจุดหนึ่งหน่วยให้อยู่ในตำแหน่งที่ต้องการ



ในแบบร่างหนึ่งหน้าเราสามารถสร้างแกนสามมิติเพื่อใช้งานได้มากกว่าหนึ่งแกน

เครื่องมือที่ต้องมีมาพร้อมกับแกนสามมิติคือ เครื่องมือลงจุด เป็นเครื่องมือที่ใช้สำหรับระบุตำแหน่งของจุดเมื่อเทียบกับระบบพิกัดฉากสามมิติ จุดที่ลงด้วยเครื่องมือนี้จะเปลี่ยนแปลงตำแหน่งเมื่อระบบพิกัดฉากสามมิติเปลี่ยนแปลง การสร้างเวกเตอร์ หรือ ทรงสามมิติบนระบบพิกัดสามแกนต้องใช้

เครื่องมือลงจุด (x, y, z) ในการระบุ ตำแหน่งปลายเวกเตอร์ หรือ จุดมุมของทรงสามมิติ เครื่องมือลงจุดที่มาพร้อมกับแกนสามมิตินี้มี 2 แบบ คือ ลงจุด xyz (แบบมีเส้นประ) และ ลงจุด xyz (แบบไม่มีเส้นประ)

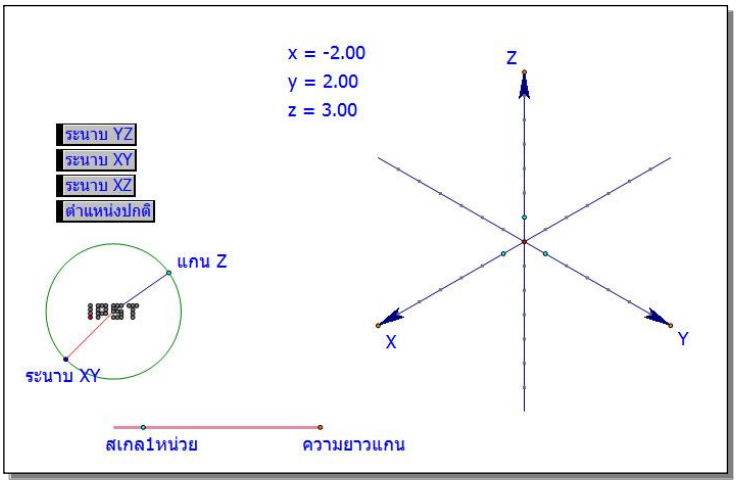
วิธีใช้เครื่องมือลงจุด (x, y, z) ทั้งสองแบบ

1. ต้องมีระบบแกนสามมิติ
2. ต้องมีพารามิเตอร์ หรือตัวเลขที่ได้จากเครื่องคำนวณที่ไม่มีหน่วย สำหรับพิกัด (x, y, z)
3. เมื่อเลือกเครื่องมือกำหนดเอง **ลงจุด (x, y, z)** แล้ว ที่ปลายลูกศรของเมาส์จะมีจุดปรากฏอยู่ด้วย นำลูกศรไปคลิกที่จุดกำเนิด จุดหนึ่งหน่วยทางแกน X แกน Y และแกน Z ของแกนสามมิติตามลำดับ
4. เลือกพารามิเตอร์สำหรับพิกัดทางแกน X แกน Y และแกน Z ตามลำดับ จะได้จุดพิกัดตามต้องการ
5. เมื่อลงจุดที่ 1 แล้วสามารถลงจุดที่ 2 ต่อได้โดยคลิกที่จุดกำเนิด จุดหนึ่งหน่วยทางแกน X แกน Y และแกน Z ของแกนสามมิติตามลำดับก่อนทุกครั้ง แล้วตามด้วยเลือกพารามิเตอร์สำหรับพิกัด (x, y, z)
6. เส้นประที่แสดงพิกัดสามารถลบทิ้งได้เมื่อไม่ต้องการ

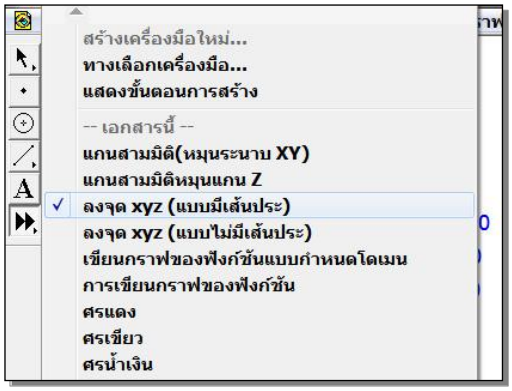
สิ่งที่สำคัญในการใช้เครื่องมือนี้ก็คือ ต้องระบุตำแหน่งอ้างอิงของระบบพิกัดสามแกนที่จะลงจุดก่อนจะคลิกเลือกพิกัดของจุดแต่ละจุด ตำแหน่งอ้างอิงของระบบพิกัดสามแกนคือ จุดกำเนิด จุดหนึ่งหน่วยทางแกน X แกน Y และแกน Z

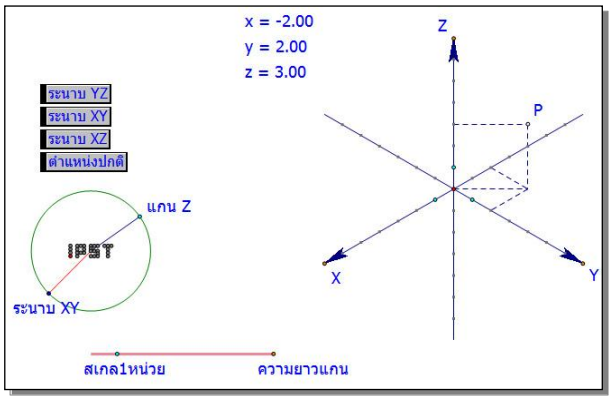
การลงจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ

1. เปิดแฟ้ม แกนสามมิติ.gsp ในแบบร่างหน้าใหม่สร้างแกนสามมิติ โดยใช้คำสั่ง **แกนสามมิติ (หมุนระนาบ XY)** จากกล่องเครื่องมือกำหนดเอง
2. สร้างพารามิเตอร์ใหม่สามตัว x = -2, y = 2, และ z = 3 โดยใช้คำสั่ง **พารามิเตอร์ใหม่** จากเมนูกราฟ

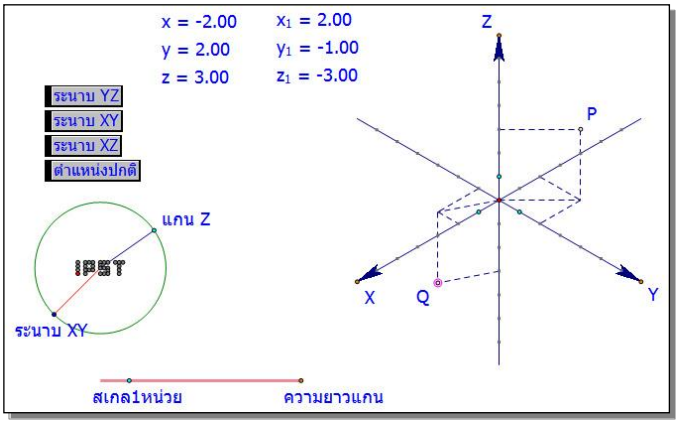


3. ลงจุด (-2, 2, 3) ในแกนสามมิติโดยใช้คำสั่ง **ลงจุด xyz (แบบมีเส้นประ)** จากกล่องเครื่องมือกำหนดเอง ที่ปลายลูกศรของเมาส์จะมีจุดปรากฏอยู่ด้วย นำลูกศรไปคลิกที่จุดกำเนิด จุดหนึ่งหน่วยทางแกน X แกน Y และแกน Z ของแกนสามมิติตามลำดับ จากนั้นเลือกพารามิเตอร์สำหรับพิกัดทางแกน X แกน Y และแกน Z ตามลำดับ จะได้จุดพิกัดตามต้องการ





4. กำหนดชื่อจุดที่ลงใหม่เป็นจุด P
5. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน **ระนาบ YZ, ระนาบ XY และ ระนาบ XZ** แล้วสังเกตจุด P เทียบกับแกนสามมิติ
6. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน **ตำแหน่งปกติ** เพื่อให้แกนสามมิติอยู่ในตำแหน่งปกติ
7. เลือกจุด ระนาบ XY ที่อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมที่ควบคุมแกนสามมิติ แล้วลากไปตามเส้นรอบวงสังเกตการเปลี่ยนแปลงของจุด P
8. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน **ตำแหน่งปกติ** เพื่อให้แกนสามมิติอยู่ในตำแหน่งปกติ
9. เลือกจุด แกน Z ที่อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมที่ควบคุมแกนสามมิติ แล้วลากไปตามเส้นรอบวงสังเกตการเปลี่ยนแปลงของจุด P
10. สร้างพารามิเตอร์ใหม่อีกสามตัว $x_1 = 2$, $y_1 = -1$, และ $z_1 = -3$ โดยใช้คำสั่ง **พารามิเตอร์ใหม่** จากเมนูกราฟ
11. ลงจุด (2, -1, -3) ในแกนสามมิติโดยใช้คำสั่ง **ลงจุด xyz (แบบมีเส้นประ)** จากกล่องเครื่องมือกำหนดเอง ที่ปลายลูกศรของเมาส์จะมีจุดปรากฏอยู่ด้วย นำลูกศรไปคลิกที่จุดกำเนิด จุดหนึ่งหน่วยทางแกน X แกน Y และแกน Z ของแกนสามมิติตามลำดับ จากนั้นเลือกพารามิเตอร์สำหรับพิกัดทางแกน X แกน Y และแกน Z ตามลำดับ จะได้จุดตามต้องการ ชื่อจุด Q



12. วัดระยะทางระหว่างจุด P และจุด Q โดยใช้เครื่องมือลูกศรเลือกจุด P และจุด Q แล้วเลือกคำสั่ง **ระยะทาง** จากเมนูการวัด
13. คำนวณระยะทางระหว่างจุด P และจุด Q โดยใช้คำสั่ง**คำนวณ** จากเมนูการวัดคำนวณค่า $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$
14. ใช้เครื่องมือลูกศรลากจุดควบคุมแกน (ระนาบ XY หรือ แกน Z) เพื่อหมุนหรือพลิกแกนสามมิติ แล้วสังเกตค่าที่วัดไว้ในข้อ 12 และค่าที่คำนวณไว้ในข้อ 13

คำถาม 1 ระยะทางระหว่างจุด P และจุด Q ในระบบแกนสามมิติ ที่ได้จากการวัดและที่ได้จากการคำนวณเท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

คำถาม 2 ให้ลงจุดยอดมุมของลูกบาศก์ ที่มีความยาวด้าน ๆ ละ 4 หน่วย ในระบบพิกัดฉากสามมิติ โดยลูกบาศก์ดังกล่าวมีจุดยอดมุม สามจุดอยู่ที่พิกัด A(1, 1, 0), B(5, 1, 0) และ C(1, 5, 0) เมื่อลงจุดเสร็จแล้วให้สร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมต่อจุดให้เป็นรูปลูกบาศก์

เวกเตอร์

บทนิยาม ปริมาณที่มีขนาดเพียงอย่างเดียว เรียกว่า ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity) ส่วนปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เรียกว่า ปริมาณเวกเตอร์ (vector quantity) หรือเรียกสั้น ๆ ว่าเวกเตอร์

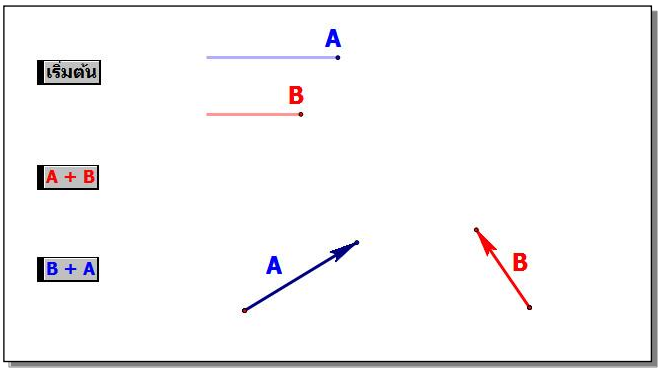
จากบทนิยามจะพบว่า ปริมาณเวกเตอร์ประกอบด้วยสองส่วนที่สำคัญคือ ขนาด และ ทิศทาง ในทางเรขาคณิตแทนขนาดด้วยความยาวของส่วนของเส้นตรง และแทนทิศทางด้วยหัวลูกศร

การบวกเวกเตอร์

บทนิยาม ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ เลื่อน $\vec{v}$ ให้จุดเริ่มต้นของ $\vec{v}$ อยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\vec{u}$ ผลบวกของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย "$\vec{u}+\vec{v}$" คือเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\vec{u}$ และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\vec{v}$

แบบร่างและการสืบเสาะ

1. เปิดแฟ้ม การบวกลบเวกเตอร์ในสองมิติ.gsp หน้า sum01 ในหน้านี้ จะมีเวกเตอร์ A และเวกเตอร์ B ที่สามารถปรับขนาดได้โดยการลากจุด A หรือ B ที่ปลายส่วนของเส้นตรง และเปลี่ยนทิศทางโดยการลากจุดที่ปลายลูกศรของเวกเตอร์แต่ละอัน



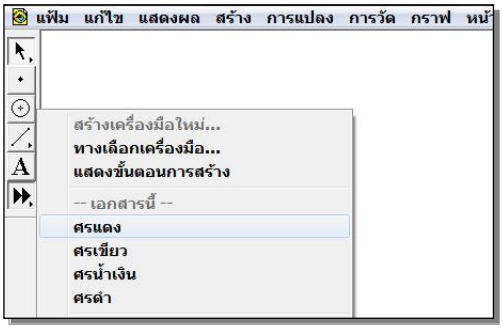
หน้านี้จะเป็นการแสดงการบวกเวกเตอร์ตามบทนิยามในหนังสือเรียน

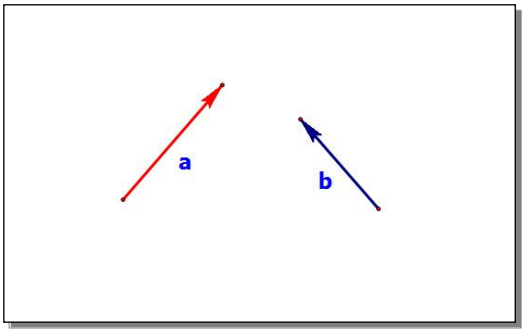
2. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน **A + B** จากนั้นสังเกตการเปลี่ยนแปลงบนหน้าจอ
3. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน เริ่มต้น แล้วคลิกปุ่มแสดงการทำงาน **B + A** จากนั้นสังเกตการเปลี่ยนแปลงบนหน้าจอ
4. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน **เริ่มต้น**
5. ลากจุดควบคุมเวกเตอร์ เพื่อเปลี่ยนแปลงขนาด และทิศทางของเวกเตอร์ทั้งสอง
6. ทำซ้ำข้อ 2 และข้อ 3

คำถาม 1 การทำงานของ **A + B** และ **B + A** เหมือนกันหรือต่างกันอย่างไร

คำถาม 2 เวกเตอร์ลัพธ์จากทั้งสองกรณีเหมือนหรือต่างกันอย่างไร

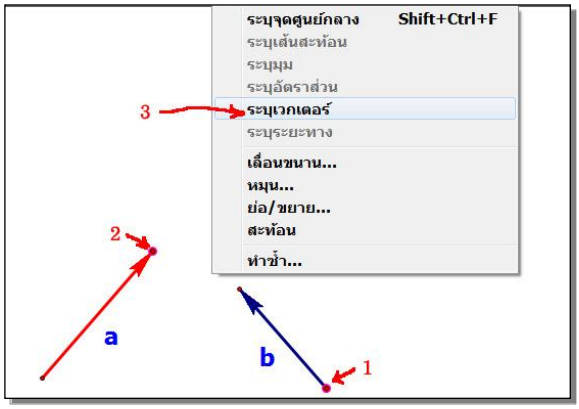
7. ไปที่หน้าการบวกเวกเตอร์ในสองมิติ หน้านี้จะเป็นหน้าว่างเปล่า
8. สร้างลูกศรแทนเวกเตอร์สองเวกเตอร์ โดยใช้เครื่องมือ**ศรแดง** และ**ศรน้ำเงิน** จากกล่องเครื่องมือกำหนดเองซึ่งแนบมาพร้อมกับไฟล์นี้แล้ว



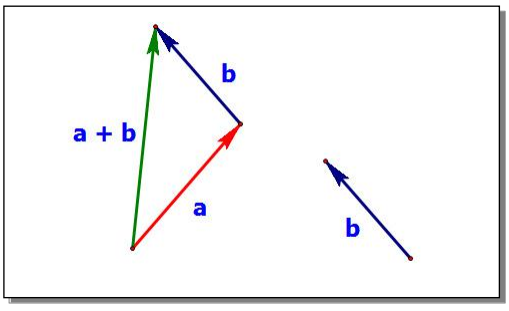


หาเวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{a}+\vec{b}$

9. ใช้เครื่องมือลูกศรเลือกจุดเริ่มต้นของ $\vec{b}$ และจุดสิ้นสุดของ $\vec{a}$ ตามลำดับ แล้วเลือกคำสั่ง **ระบุเวกเตอร์** จากเมนูการแปลง



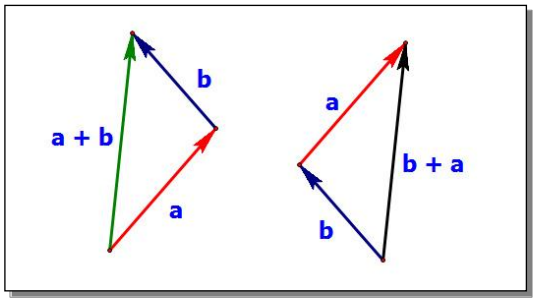
10. เลือก $\vec{b}$ แล้วเลือกคำสั่ง **เลื่อนขนาน** จากเมนูการแปลง
11. สร้าง $\vec{a}+\vec{b}$ จากจุดเริ่มต้นของ $\vec{a}$ กับจุดสิ้นสุดของ $\vec{b}$ ที่ได้จากการแปลง โดยใช้เครื่องมือ **ศรเขียว** จากกล่องเครื่องมือกำหนดเอง



เป็นเวกเตอร์ลัพธ์ ตามบทนิยาม

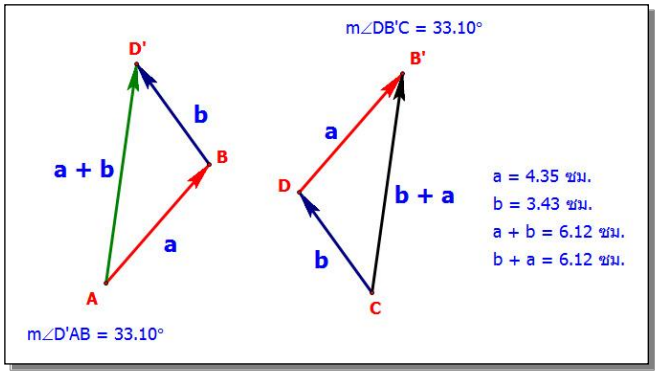
หาเวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{b}+\vec{a}$

12. ใช้เครื่องมือลูกศรเลือกจุดเริ่มต้นของ $\vec{a}$ และจุดสิ้นสุดของ $\vec{b}$ ตามลำดับ แล้วเลือกคำสั่ง **ระบุเวกเตอร์** จากเมนูการแปลง
13. เลือก $\vec{a}$ แล้วเลือกคำสั่ง **เลื่อนขนาน** จากเมนูการแปลง
14. สร้าง $\vec{b}+\vec{a}$ จากจุดเริ่มต้นของ $\vec{b}$ กับจุดสิ้นสุดของ $\vec{a}$ ที่ได้จากการแปลง โดยใช้เครื่องมือ **ศรดำ** จากกล่องเครื่องมือกำหนดเอง



$\vec{b}+\vec{a}$ เป็นเวกเตอร์ลัพธ์ ตามบทนิยาม

15. วัดขนาดของ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}+\vec{b}$ และ $\vec{b}+\vec{a}$ โดยเลือกส่วนของเส้นตรงที่เป็นตัวลูกศร แล้วเลือกคำสั่ง**ความยาว** จากเมนู การวัด
16. วัดขนาดของมุมที่ $\vec{a}+\vec{b}$ ทำกับ $\vec{a}$ โดยเลือกจุดสิ้นสุดของ $\vec{a}+\vec{b}$ จุดเริ่มต้นของ $\vec{a}$ และจุดสิ้นสุดของ $\vec{a}$ ตามลำดับแล้วเลือกคำสั่ง **มุม** จากเมนูการวัด
17. วัดขนาดของมุมที่ $\vec{b}+\vec{a}$ ทำกับ $\vec{a}$ โดยเลือก จุดเริ่มต้นของ $\vec{a}$ จุดสิ้นสุดของ $\vec{a}$ และจุดเริ่มต้นของ $\vec{b}$ ตามลำดับแล้วเลือกคำสั่ง **มุม** จากเมนูการวัด
18. ใช้เครื่องมือลูกศร จุดเริ่มต้น หรือจุดสิ้นสุด ของ $\vec{a}$ หรือ $\vec{b}$ แล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงของ $\vec{a}+\vec{b}$ $\vec{b}+\vec{a}$ และค่าต่าง ๆ ที่วัดไว้



คำถาม 3 จากการทำกิจกรรมนี้ให้เขียนข้อคาดเดาเกี่ยวกับ $\vec{a}+\vec{b}$ และ $\vec{b}+\vec{a}$ พร้อมข้อมูลสนับสนุนข้อคาดเดานี้

19. วัดพิกัดที่หนึ่ง (x) ของจุดเริ่มต้น และจุดสิ้นสุดของ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}+\vec{b}$ และ $\vec{b}+\vec{a}$ โดยใช้คำสั่ง **พิกัดที่หนึ่ง (x)** จากเมนูการวัด
20. วัดพิกัดที่สอง (y) ของจุดเริ่มต้น และจุดสิ้นสุดของ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}+\vec{b}$ และ $\vec{b}+\vec{a}$ โดยใช้คำสั่ง **พิกัดที่สอง (y)** จากเมนูการวัด
21. ใช้คำสั่ง **คำนวณ** จากเมนูการวัด คำนวณหาขนาดของ $\vec{a}+\vec{b}$ และ $\vec{b}+\vec{a}$
22. ใช้คำสั่ง **คำนวณ** จากเมนูการวัด คำนวณหาขนาดของมุมที่ $\vec{a}+\vec{b}$ และ $\vec{b}+\vec{a}$ ทำกับแกน X

คำถาม 4 ผลจากการคำนวณที่ได้สอดคล้องกับข้อคาดเดาในคำถาม 3 หรือไม่

การลบเวกเตอร์

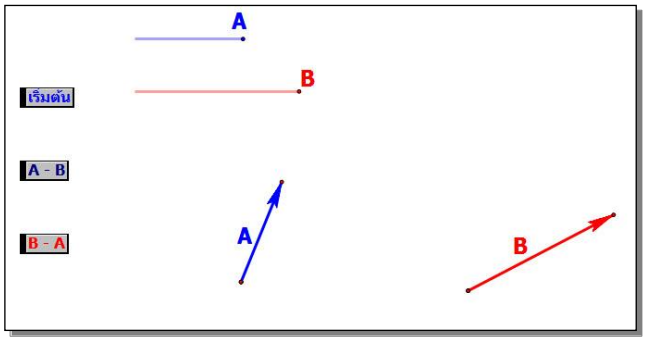
บทนิยาม ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ

ผลลบ ของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u}-\vec{v}$ หมายถึง ผลบวกของ $\vec{u}$ และนิเสธของ $\vec{v}$ นั่นคือ $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$

บทนิยาม นิเสธ ของ $\vec{u}$ (negative of $\vec{u}$) คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $\vec{u}$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกับทิศทางของ $\vec{u}$ เขียนแทนด้วย $-\vec{u}$

แบบร่างและการสืบเสาะ

1. เปิดแฟ้ม การบวกลบเวกเตอร์ในสองมิติ.gsp หน้า sum02 ในหน้านี้ จะมีเวกเตอร์ A และเวกเตอร์ B ที่สามารถปรับขนาดได้โดยการลากจุด A หรือ B ที่ปลายส่วนของเส้นตรง และเปลี่ยนทิศทางโดยการลากจุดที่ปลายลูกศรของเวกเตอร์แต่ละอัน



หน้านี้จะเป็นการแสดงการลบเวกเตอร์ตามบทนิยามในหนังสือเรียน

2. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน **A - B** จากนั้นสังเกตการเปลี่ยนแปลงบนหน้าจอ
3. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน เริ่มต้น แล้วคลิกปุ่มแสดงการทำงาน **B - A** จากนั้นสังเกตการเปลี่ยนแปลงบนหน้าจอ
4. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน **เริ่มต้น**
5. ลากจุดควบคุมเวกเตอร์ เพื่อเปลี่ยนแปลงขนาด และทิศทางของเวกเตอร์ทั้งสอง
6. ทำซ้ำข้อ 2 และข้อ 3

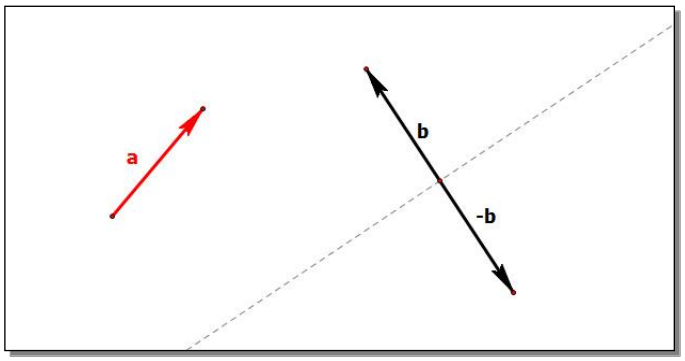
คำถาม 1 การทำงานของ **A - B** และ **B - A** เหมือนกันหรือต่างกันอย่างไร

คำถาม 2 เวกเตอร์ลัพธ์จากทั้งสองกรณีเหมือนกันหรือต่างกันอย่างไร

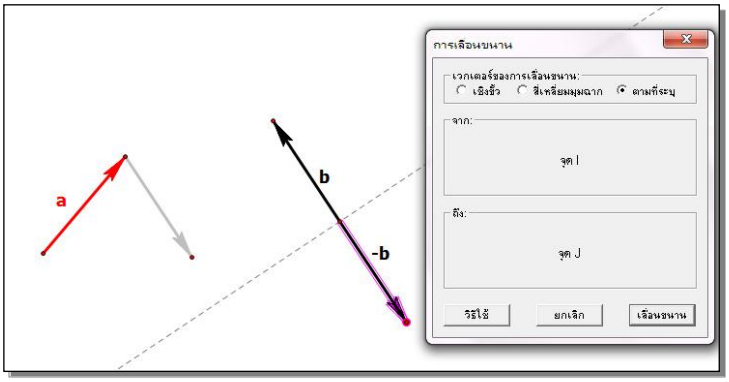
7. ไปที่หน้าการลบเวกเตอร์ในสองมิติ หน้านี้จะเป็นหน้าว่างเปล่า
8. สร้างลูกศรแทนเวกเตอร์สองเวกเตอร์ โดยใช้เครื่องมือ **ศรแดง** และ **ศรน้ำเงิน** จากกล่องเครื่องมือกำหนดเองซึ่งแนบมาพร้อมกับไฟล์นี้แล้ว

หาเวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{a} - \vec{b}$ หรือ $\vec{a} + (-\vec{b})$

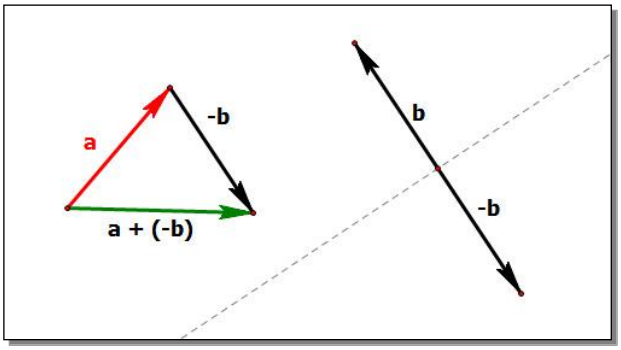
9. สร้างเส้นตั้งฉากกับ $\vec{b}$ ที่จุดเริ่มต้นของ $\vec{b}$ โดยใช้เครื่องมือลูกศรเลือก $\vec{b}$ และจุดเริ่มต้นของ $\vec{b}$ จากนั้นเลือกคำสั่ง **เส้นตั้งฉาก** จากเมนูสร้าง
10. เลือกเส้นตั้งฉาก (เส้นประ) แล้วเลือกคำสั่ง **ระบุเส้นสะท้อน** จากเมนูการแปลง
11. สร้างนิเสธของ $\vec{b}$ โดยเลือก $\vec{b}$ แล้วเลือกคำสั่ง สะท้อน จากเมนูการแปลง จะได้ $-\vec{b}$



12. ใช้เครื่องมือลูกศรเลือกจุดเริ่มต้นของ $\vec{b}$ และจุดปลายลูกศรของ $\vec{a}$ ตามลำดับ แล้วเลือกคำสั่ง **ระบุเวกเตอร์** จากเมนูการแปลง
13. เลือก $-\vec{b}$ แล้วเลือกคำสั่ง **เลื่อนขนาน** จากเมนูการแปลง



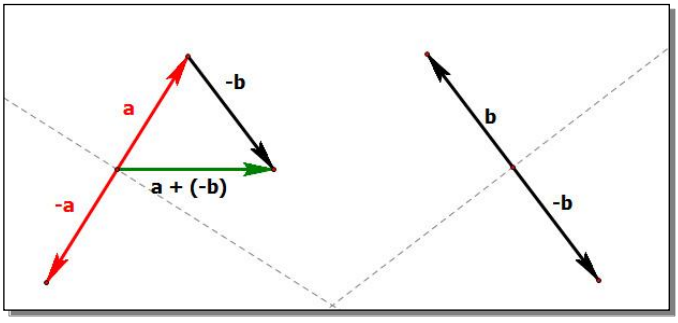
14. สร้าง $\vec{a} + (-\vec{b})$ จากจุดเริ่มต้นของ $\vec{a}$ กับจุดสิ้นสุดของ $-\vec{b}$ ที่ได้จากการแปลง โดยใช้เครื่องมือ **ศรเขียว** จากกล่องเครื่องมือกำหนดเอง



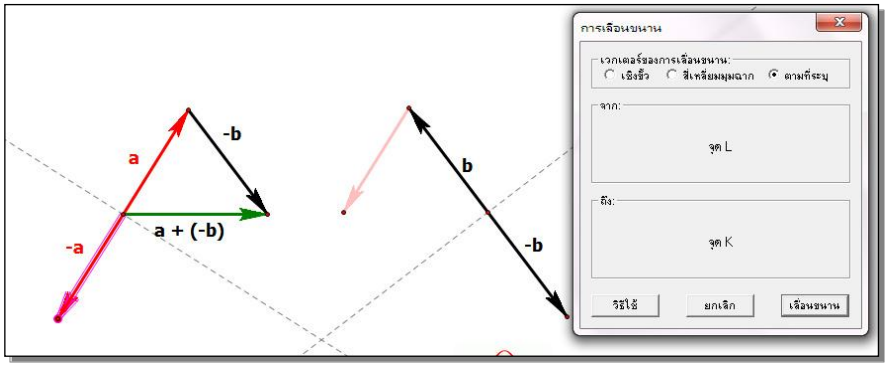
$\vec{a} + (-\vec{b})$ เป็นเวกเตอร์ลัพธ์ ตามบทนิยาม

หาเวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{b} - \vec{a}$ หรือ $\vec{b} + (-\vec{a})$

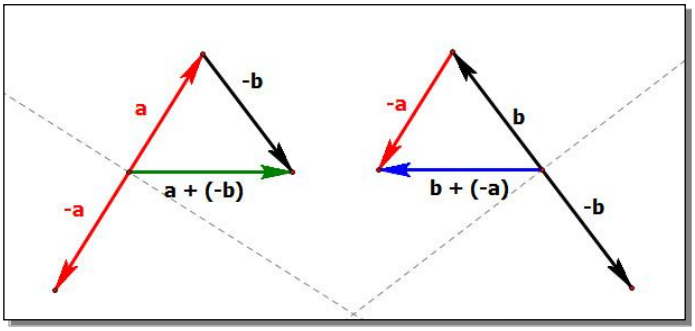
15. สร้างเส้นตั้งฉากกับ $\vec{a}$ ที่จุดเริ่มต้นของ $\vec{a}$ โดยใช้เครื่องมือลูกศรเลือก $\vec{a}$ และจุดเริ่มต้นของ $\vec{a}$ จากนั้นเลือกคำสั่ง **เส้นตั้งฉาก** จากเมนูสร้าง
16. เลือกเส้นตั้งฉาก (เส้นประ) แล้วเลือกคำสั่ง **ระบุเส้นสะท้อน** จากเมนูการแปลง
17. สร้างนิเสธของ $\vec{a}$ โดยเลือก $\vec{a}$ แล้วเลือกคำสั่ง สะท้อน จากเมนูการแปลง จะได้ $-\vec{a}$



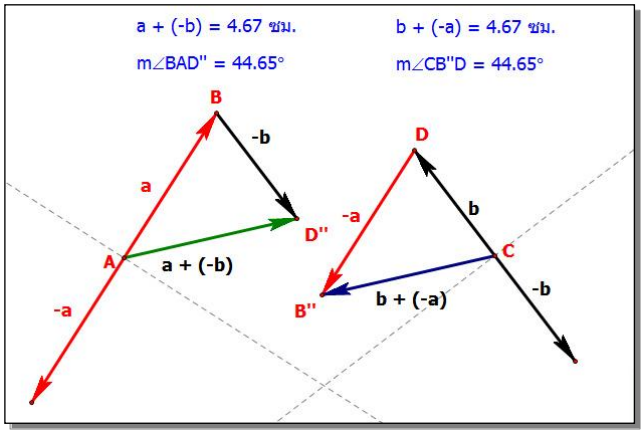
18. ใช้เครื่องมือลูกศรเลือกจุดเริ่มต้นของ $\vec{a}$ และจุดสิ้นสุดของ $\vec{b}$ ตามลำดับ แล้วเลือกคำสั่ง **ระบุเวกเตอร์** จากเมนูการแปลง
19. เลือก $-\vec{a}$ แล้วเลือกคำสั่ง **เลื่อนขนาน** จากเมนูการแปลง



20. สร้าง $\vec{b} + (-\vec{a})$ จากจุดเริ่มต้นของ $\vec{b}$ กับจุดสิ้นสุดของ $-\vec{a}$ ที่ได้จากการแปลง โดยใช้เครื่องมือ **ศรน้ำเงิน** จากกล่องเครื่องมือกำหนดเอง



21. วัดขนาดของ $\vec{a} + (-\vec{b})$ และ $\vec{b} + (-\vec{a})$ โดยเลือกส่วนของเส้นตรงที่เป็นตัวลูกศร แล้วเลือกคำสั่ง **ความยาว** จากเมนู การวัด
22. วัดขนาดของมุมที่ $\vec{a} + (-\vec{b})$ ทำกับ $\vec{a}$ โดยเลือกจุดสิ้นสุดของ $\vec{a} + (-\vec{b})$ จุดเริ่มต้นของ $\vec{a}$ และจุดสิ้นสุดของ $\vec{a}$ ตามลำดับแล้วเลือกคำสั่ง **มุม** จากเมนูการวัด
23. วัดขนาดของมุมที่ $\vec{b} + (-\vec{a})$ ทำกับ $-\vec{a}$ โดยเลือก จุดเริ่มต้นของ $\vec{a}$ จุดสิ้นสุดของ $-\vec{a}$ และจุดเริ่มต้นของ $\vec{b}$ ตามลำดับแล้วเลือกคำสั่ง **มุม** จากเมนูการวัด



24. ใช้เครื่องมือลูกศร จุดเริ่มต้น หรือจุดสิ้นสุด ของ $\vec{a}$ หรือ $\vec{b}$ แล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงของ $\vec{a}+\vec{b}$ $\vec{b}+\vec{a}$ และค่าต่าง ๆ ที่วัดไว้

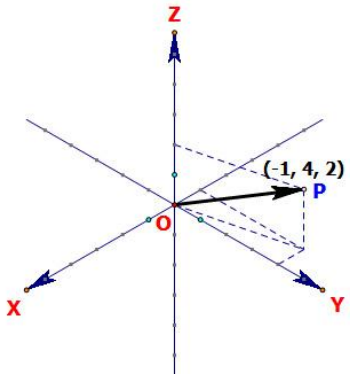
คำถาม 3 จากการทำกิจกรรมนี้ให้เขียนข้อคาดเดาเกี่ยวกับ $\vec{a}+(-\vec{b})$ และ $\vec{b}+(-\vec{a})$ พร้อมข้อมูลสนับสนุนข้อคาดเดานี้

งานที่มอบหมาย ศึกษาแฟ้ม บวกลบเวกเตอร์ในสองมิติ.gsp หน้า sum03, app01, และ app02 เพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในการจัดการเรียนการสอน

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

บทนิยาม กำหนดให้ x, y, z เป็นจำนวนจริง เรียก $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ว่าเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ หรือ เวกเตอร์ในสามมิติ หรือเรียกสั้น ๆ ว่า เวกเตอร์

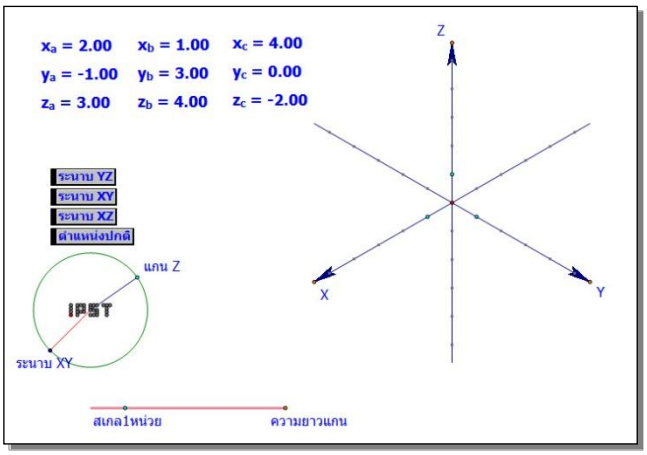
ในทางเรขาคณิตแทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ด้วยส่วนของเส้นตรงที่กำหนดทิศทางซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด O และมีจุดสิ้นสุดที่ P (x, y, z)



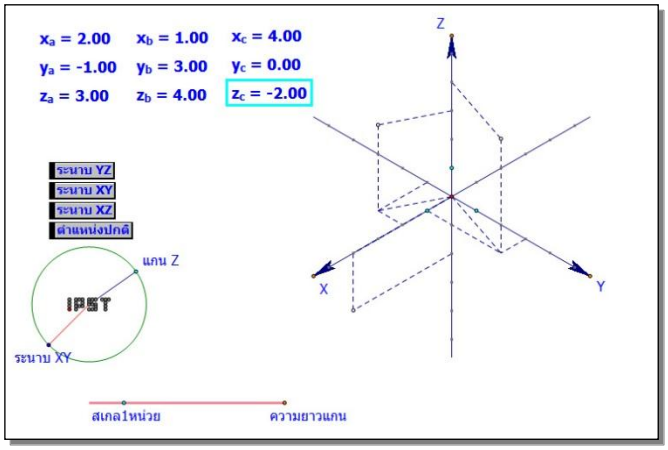
การเขียนเวกเตอร์ลงในระบบพิกัดฉากสามมิติ

การเขียนเวกเตอร์ลงในระบบพิกัดฉาก ในโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) มีวิธีการคล้ายกับการลงจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ เพียงแต่เพิ่มการสร้างลูกศรที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดและมีจุดสิ้นสุดที่จุด P ใด ๆ

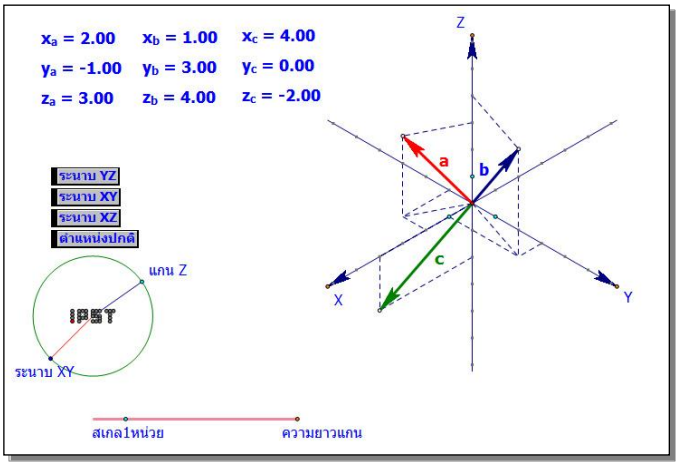
1. เปิดแฟ้ม เวกเตอร์สามมิติ.gsp หน้า เขียนเวกเตอร์ในแกนสามมิติ หน้านี้จะเป็นหน้าว่าง
2. สร้างแกนสามมิติ โดยใช้เครื่องมือ **แกนสามมิติ (หมุนระนาบ XY)** จากกล่องเครื่องมือกำหนดเองที่แนบมาพร้อมกับแฟ้มนี้
3. สร้างพารามิเตอร์ 9 ตัวแทนพิกัดของจุดสิ้นสุดของ $\vec{a}$, $\vec{b}$ และ $\vec{c}$ ตามตัวอย่างที่ 4 ในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 โดยใช้คำสั่ง **พารามิเตอร์ใหม่** จากเมนูกราฟ



4. ลงจุดสิ้นสุดของ $\vec{a}$, $\vec{b}$ และ $\vec{c}$ โดยใช้เครื่องมือ **ลงจุด xyz (แบบมีเส้นประ)** จากกล่องเครื่องมือกำหนดเอง



5. สร้างลูกศรแทน $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ โดยใช้เครื่องมือ **ศรแดง ศรน้ำเงิน** และ **ศรเขียว** จากกล่องเครื่องมือกำหนดเอง สร้างระหว่างจุดกำเนิดกับจุดสิ้นสุดที่ลงไว้ในข้อ 4

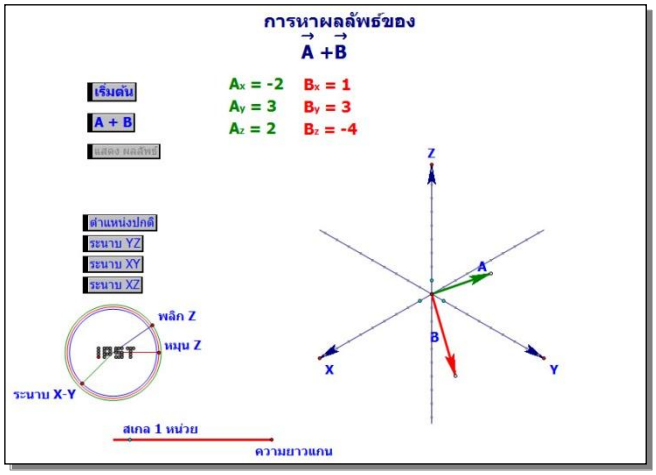


6. ใช้เครื่องมือลูกศร ลากจุด ระนาบ XY จุดแกน Z เพื่อให้แกนสามมิติหมุน แล้วสังเกตเวกเตอร์ทั้งสามที่ลงไว้ หรือคลิกปุ่มแสดงการทำงานต่าง ๆ ที่ควบคุมแกนสามมิติ

การบวกและการลบเวกเตอร์ในแกนสามมิติ

แบบร่างและการสืบเสาะ

1. เปิดแฟ้ม เวกเตอร์สามมิติ.gsp หน้า เวกเตอร์ A+B ในหน้านี้จะเป็นการแสดง การบวกเวกเตอร์สองเวกเตอร์บนแกนสามมิติตามบทนิยาม



2. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน **A+B** แล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงบนหน้าจอ
3. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน ควบคุมแกนสามมิติ หรือลากจุดที่ควบคุมแกนสามมิติ เพื่อให้แกนสามมิติมีการเปลี่ยนแปลง แล้วสังเกตเวกเตอร์ทั้งหมด
4. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน **แสดง ผลลัพธ์** เพื่อดูคำตอบทางพีชคณิต เปรียบเทียบกับคำตอบทางเรขาคณิต
5. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน **เริ่มต้น** และ **ซ่อน ผลลัพธ์**
6. เปลี่ยนแปลงเวกเตอร์ A และ B โดยการเปลี่ยนค่าของพารามิเตอร์ A_x, A_y, A_z, B_x, B_y และ B_z
7. ทำซ้ำข้อ 2 ถึงข้อ 5 เพื่อให้เกิดความคุ้นเคยกับการใช้งาน

คำถาม 1 ตารางต่อไปนี้แสดงพิกัดของจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ A เวกเตอร์ B และเวกเตอร์ A+B ให้เปลี่ยนพารามิเตอร์ในแบบร่าง ตามพิกัดที่ให้มา อ่านค่าที่เหลือจากแบบร่างแล้วบันทึกค่าลงในตารางให้สมบูรณ์

เวกเตอร์ A			เวกเตอร์ B			เวกเตอร์ A+B		
A_x	A_y	A_z	B_x	B_y	B_z	$(A+B)_x$	$(A+B)_y$	$(A+B)_z$
0	-2	3	3	4	-1			
2	-3	-1	1	2	3			
4	2	2	-1	2	3			
-3	1	-2	1	4	-2			
-1	-3	2	3	5	1			

คำถาม 2 ถ้าเวกเตอร์ A มีพิกัด $A_x = a$, $A_y = b$, $A_z = c$ และ

เวกเตอร์ B มีพิกัด $B_x = d$, $B_y = e$, $B_z = f$ แล้ว

$(A+B)_x$ = _____

$(A+B)_y$ = _____

$(A+B)_z$ = _____

งานที่มอบหมาย ให้ศึกษาแบบร่างหน้า เวกเตอร์ B+A เวกเตอร์ -A+B เวกเตอร์ A-B และเวกเตอร์ B-A แล้วสรุปเกี่ยวกับการบวกลบเวกเตอร์ด้วยวิธีทางพีชคณิต

ผลคูณเชิงเวกเตอร์

บทนิยาม ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (cross product) ของ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ คือ

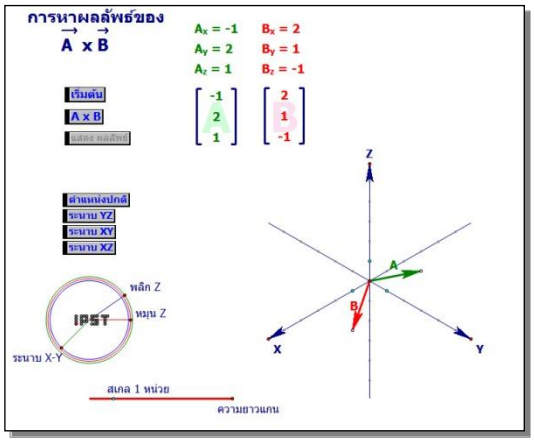
เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a_1b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$

เขียนแทนผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ด้วย $\vec{u} \times \vec{v}$ อ่านว่า **เวกเตอร์ยู ครอส เวกเตอร์วี**

ในกิจกรรมนี้เราจะแสดงผลคูณเชิงเวกเตอร์ แบบเรขาคณิต บนแกนสามมิติ ซึ่งไม่สามารถทำได้บนระนาบสองมิติ

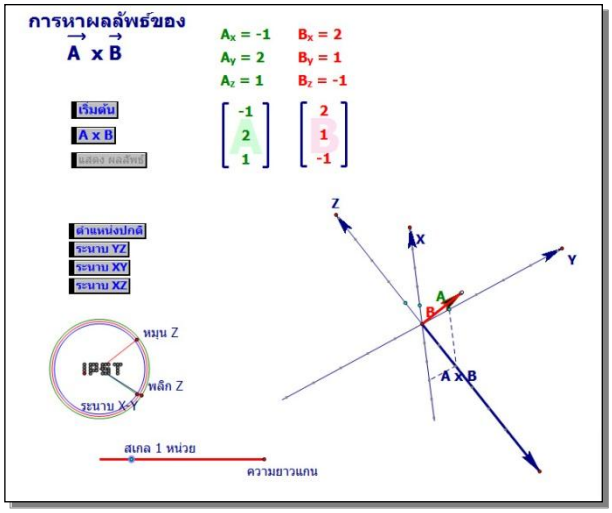
แบบร่างและการสืบเสาะ

1. เปิดไฟล์ เวกเตอร์สามมิติ.gsp หน้า เวกเตอร์ A×B ในหน้านี้จะเป็นการแสดง ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของสองเวกเตอร์บนแกนสามมิติ



2. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน **A×B** แล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงบนหน้าจอ

3. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน ควบคุมแกนสามมิติ หรือลากจุดที่ควบคุมแกนสามมิติ เพื่อให้แกนสามมิติมีการเปลี่ยนแปลง แล้วสังเกตขนาดของเวกเตอร์ A×B ในแนวแกนทั้งสาม
4. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน **แสดง ผลลัพธ์** เพื่อดูคำตอบทางพีชคณิต เปรียบเทียบกับคำตอบทางเรขาคณิต
5. ใช้เครื่องมือลูกศรลาก จุดระนาบ XY จุดพลิกแกน Z และจุดหมุนแกน Z เพื่อให้เวกเตอร์ A และเวกเตอร์ B ซ้อนทับกันสนิท



6. คลิกปุ่มแสดงการทำงาน **เริ่มต้น** และ **ซ่อน ผลลัพธ์**
7. เปลี่ยนแปลงเวกเตอร์ A และ B โดยการเปลี่ยนค่าของพารามิเตอร์ A_x, A_y, A_z, B_x, B_y และ B_z
8. ทำซ้ำข้อ 2 ถึงข้อ 5 เพื่อให้เกิดความคุ้นเคยกับการใช้งาน

คำถาม 1 ลองเปลี่ยนพารามิเตอร์ A_x, A_y, A_z, B_x, B_y และ B_z ให้ขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ A และ B เปลี่ยนไปหลาย ๆ ค่าแล้วตรวจสอบว่า เวกเตอร์ A×B สัมพันธ์อย่างไรกับระนาบที่มีทั้งเวกเตอร์ A และ B ให้เขียนข้อคาดเดา

9. ไปที่หน้า เวกเตอร์ B×A ทำกิจกรรมเหมือนกับหน้า เวกเตอร์ A×B

คำถาม 2 ถ้าให้เวกเตอร์ A หรือเวกเตอร์ B เป็นเวกเตอร์ศูนย์ จะเกิดอะไรขึ้นกับเวกเตอร์ A×B และ เวกเตอร์ B×A

คำถาม 3 ถ้าให้เวกเตอร์ A เท่ากับ เวกเตอร์ B จะเกิดอะไรขึ้นกับเวกเตอร์ A×B และ เวกเตอร์ B×A

คำถาม 4 ถ้าให้เวกเตอร์ B เท่ากับ นิเสธของเวกเตอร์ A จะเกิดอะไรขึ้นกับเวกเตอร์ A×B และ เวกเตอร์ B×A

เอกสารสำหรับวิทยากร

เฉลยคำถามการใช้ ICT ในการสอน เรื่อง ฟังก์ชัน

การแสดงฟังก์ชันอย่างพลวัต

คำถาม 1 คำตอบมีได้หลากหลายที่สอดคล้องกราฟรางเลื่อน h ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างหนึ่งของคำตอบ: เมื่อค่ารับเข้าอยู่ที่ศูนย์ ค่าส่งออกจะอยู่ที่ -5 เมื่อค่ารับเข้ามากกว่าศูนย์ ค่าส่งออกจะเพิ่มขึ้นและเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว เมื่อค่ารับเข้ามากกว่า 1 เมื่อค่ารับเข้าน้อยกว่าศูนย์ค่าส่งออกจะเพิ่มขึ้นและเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว เมื่อค่ารับเข้าน้อยกว่า

คำถาม 2

f(-3) = y,	y =	-5	f(-1) = y,	y =	-3
f(0) = y,	y =	-2	f(2) = y,	y =	0
f(4) = y,	y =	2	f(5) = y,	y =	3

คำถาม 3 f(x) = y = $x-2$

คำถาม 4 g(x) = y = $\frac{x}{2}-2$

คำถาม 5 h(x) = y = x^2-5

q(x) = y = $|x|$

r(x) = y = $(x-1)^2$

s(x) = y = $-x^2+4$

t(x) = y = $\sqrt{x}$

u(x) = y = trunc(x)

จากกราฟรางเลื่อนสู่ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

คำถาม 1 พิกัดของจุด P ทางแกน X สมนัยกับค่าของ A บนกราฟรางเลื่อน
และ พิกัดของจุด P ทางแกน Y สมนัยกับค่าของ f(A) บนกราฟรางเลื่อน

คำถาม 2 กราฟเป็นพาราโบลาหงายที่มีจุดต่ำสุดเท่ากับ -1 เมื่อ x = 0
ค่าส่งออกของกราฟรางเลื่อนจะมีค่ามากกว่า -1 เมื่อ x > 0 การเพิ่มขึ้นของค่าส่งออกเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วไม่เป็นเชิงเส้น และเมื่อ x < 0 ค่าส่งออกของกราฟรางเลื่อนจะมีค่ามากกว่า -1 และการเพิ่มขึ้นของค่าส่งออกเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วเหมือนกับกรณี x > 0

คำถาม 3 จุดบนกราฟในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนหนึ่งจุดประกอบด้วยข้อมูลสองส่วน พิกัด x และพิกัด y ของจุด และจากคำตอบของคำถาม 1 พิกัดของจุด P ทางแกน X สมนัยกับค่าของ A และพิกัดของจุด P ทางแกน Y สมนัยกับค่าของ f(A) บนกราฟรางเลื่อน ดังนั้นจุดบนกราฟของ

ฟังก์ชันในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนแทน คู่พิกัด ประกอบด้วยทั้งค่ารับเข้าและค่าส่งออกของตำแหน่งบนกราฟรางเลื่อน

คำถาม 4 ให้เติมข้อความลงในช่องว่าง

เมื่อทั้ง A บนแกนรับเข้าและ f(A) บนแกนส่งออกเคลื่อนที่ไปทางขวา จุดบนกราฟในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนจะเคลื่อนที่ ขึ้น

เมื่อทั้ง A บนแกนรับเข้าและ f(A) บนแกนส่งออกเคลื่อนที่ไปทางซ้าย จุดบนกราฟในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนจะเคลื่อนที่ ลง

คำถาม 5 กราฟในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนของ $f(x) = 5x$ มีความชันมากกว่ากราฟในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนของ $f(x) = x$ ซึ่งสอดคล้องกับความจริงที่ว่า ตัวชี้ส่งออกสำหรับกราฟรางเลื่อน $f(x) = 5x$ เคลื่อนที่เร็วกว่าตัวชี้ส่งออกสำหรับกราฟรางเลื่อน $f(x) = x$

คำถาม 6 คำตอบที่เป็นไปได้มีหลากหลาย

การสำรวจฟังก์ชันประกอบด้วยกราฟรางเลื่อน

คำถาม 1 ฟังก์ชันที่กำหนดให้ $f(x) = 2x$ และ $g(x) = x^2$ ให้หาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

ก. $f(g(2)) =$ 8 ข. $g(f(2)) =$ 16

คำถาม 2 $f(g(x))$ ไม่เท่ากับ $g(f(x))$ เสมอไป ในกรณีนี้ $f(g(2)) = 8$ และ $g(f(2)) = 16$

คำถาม 3 ก. $f(g(1)) =$ 2 ข. $f(g(-1)) =$ 2 ค. $f(g(-7)) =$ 98

คำถาม 4 เรนจ์ของฟังก์ชันประกอบ hog คือ จำนวนเต็มศูนย์ หรือ จำนวนเต็มบวก (0, 1, 2, 3, ...)

เรนจ์ของฟังก์ชันประกอบ goh คือ กำลังสองของจำนวนเต็มทั้งหมด (0, 1, 4, 9, 16, ...)

คำถาม 5 ทั้งสองกรณีค่าส่งออกและค่าป้อนเข้าเป็นค่าเดียวกันเสมอทีเป็นเช่นนี้เพราะว่า $f(x)$ และ $i(x)$ เป็นฟังก์ชันผกผันของกันและกัน หมายความว่าทำย้อนกลับซึ่งกันและกัน

คำถาม 6 คำตอบอาจมีได้หลากหลาย ตัวอย่างของคำตอบ

ก. ฟังก์ชันที่ให้ค่าส่งออกเป็นสองเท่าของจำนวนซึ่งเป็นกำลังสองสมบูรณ์ (0, 2, 8, 18, ...)

$s(r(q(x)))$ เมื่อ $q(x) = \text{round}(x)$, $r(x) = x^2$ และ $s(x) = 2x$

ข. ฟังก์ชันที่ให้ค่าส่งออกเป็นกำลังสองของจำนวนเต็มคู่ (0, 4, 16, 36, ...)

$s(r(q(x)))$ เมื่อ $q(x) = \text{round}(x)$, $r(x) = 2x$ และ $s(x) = x^2$

ค. ฟังก์ชันที่ให้ค่าส่งออกเป็นหนึ่งในสี่ของจำนวน ซึ่งเป็นกำลังสองสมบูรณ์ (0, 0.25, 1, 4, 6.25, ...) $s(r(q(x)))$ เมื่อ $q(x) = \text{round}(x)$, $r(x) = \frac{x}{2}$ และ $s(x) = x^2$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

คำถาม 1 กราฟเลื่อนขนานตามแกน Y และตัดแกน Y ที่ จุด (0, a)

คำถาม 2 $b < 0$ ไม่ปรากฏกราฟ

$0 < b < 1$ กราฟเป็นกราฟของฟังก์ชันลดเมื่อ x น้อยลง ค่าของ f(x) จะเพิ่มขึ้น

$b = 1$ กราฟเป็นเส้นตรงขนานกับแกน X

$b > 1$ กราฟเป็นกราฟของฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ x เพิ่มขึ้น ค่าของ f(x) จะเพิ่มขึ้น

คำถาม 3 เส้นทางการเคลื่อนที่ของจุด B และเส้นทางการเคลื่อนที่ของจุด B' จะเป็นภาพสะท้อนของกันและกัน โดยมีเส้นตรง OA เป็นเส้นสะท้อน

คำถาม 4 กราฟ g(y) จะทับสนิทพอดีกับเส้นทางการเคลื่อนที่จุด B' หรือจุด B' เคลื่อนที่อยู่บนกราฟ g(y)

คำถาม 5 พิกัดที่หนึ่ง (x) ของจุด B เท่ากับ พิกัดที่สอง (y) ของจุด B'

พิกัดที่สอง (y) ของจุด B เท่ากับ พิกัดที่หนึ่ง (x) ของจุด B'

คำถาม 6 เป็นฟังก์ชันผกผันของกันและกัน

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

คำถาม 1 ทำให้แอมพลิจูดของกราฟของฟังก์ชัน g เปลี่ยนแปลงเมื่อเทียบกับแอมพลิจูดของกราฟของฟังก์ชัน f

คำถาม 2

n	g(x) = Asin(nx)	จำนวนครั้งที่ฟังก์ชันซ้ำในช่วง 2π	คาบของฟังก์ชันไซน์
1	g(x) = Asin(x)	1	2π
2	g(x) = Asin(2x)	2	π
3	g(x) = Asin(3x)	3	$\frac{2\pi}{3}$
4	g(x) = Asin(4x)	4	$\frac{\pi}{2}$
n	g(x) = Asin(nx)	n	$\frac{2\pi}{n}$

n เป็นจำนวนครั้งที่ฟังก์ชันซ้ำในช่วง 2π หรือ คาบของฟังก์ชัน เท่ากับ $\frac{2\pi}{n}$

คำถาม 3 การเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ c ทำให้กราฟเลื่อนขนานตามแกน X

เฉลยการใช้ ICT ในการสอนเรื่องภาคตัดกรวย

วงรีตามบทนิยามเชิงเรขาคณิต

คำถาม 1 $m\overline{CE} = m\overline{GF_1} = m\overline{HF_1}$

$m\overline{ED} = m\overline{GF_2} = m\overline{HF_2}$

$m\overline{CE} + m\overline{ED} = m\overline{GF_1} + m\overline{GF_2} = m\overline{HF_1} + m\overline{HF_2}$

คำถาม 2 $m\overline{CE} = m\overline{GF_1} = m\overline{HF_1}$

$m\overline{ED} = m\overline{GF_2} = m\overline{HF_2}$

$m\overline{CE} + m\overline{ED} = m\overline{GF_1} + m\overline{GF_2} = m\overline{HF_1} + m\overline{HF_2}$

คำถาม 3 $m\overline{CE} = m\overline{GF_1} = m\overline{HF_1}$

$m\overline{ED} = m\overline{GF_2} = m\overline{HF_2}$

$m\overline{CE} + m\overline{ED} = m\overline{GF_1} + m\overline{GF_2} = m\overline{HF_1} + m\overline{HF_2}$

คำถาม 4 ลักษณะของวงรีจะรีน้อยลง มีลักษณะเป็นวงกลมมากขึ้น

คำถาม 5 ลักษณะของวงรีจะรีมากขึ้น

คำถาม 6 ไม่ปรากฏวงรี เพราะหาจุดตัดระหว่างวงกลมทั้งสองไม่ได้

คำถาม 7 ไม่ปรากฏวงรี เพราะวงกลมทั้งสองไม่ตัดกัน

คำถาม 8 ตำแหน่งของจุด F_1 และจุด F_2 มีผลต่อความรีของวงรี โดยวงรีที่มีจุด F_1 และจุด F_2 อยู่ใกล้กันจะมีความรีน้อยกว่าวงรีที่มีจุด F_1 และจุด F_2 อยู่ห่างกัน

คำถาม 9 วางโฟกัสทั้งสองให้เรียงกันอยู่ในแนวดิ่ง

พาราโบลาตามบทนิยามเชิงเรขาคณิต

คำถาม 1 ระยะห่างเท่ากัน เพราะสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีส่วนของเส้นตรง CD เป็นฐาน โดยให้จุดที่อยู่บนเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง CD นั้นเป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

คำถาม 2 จุด F สอดคล้องกับบทนิยามที่ให้ไว้ จึงเป็นจุดบนพาราโบลาที่กำหนดโดย โฟกัส และไดเรกตริกซ์

คำถาม 3 ค่าความยาวทั้งสองที่วัดได้เท่ากันเสมอ (เป็นการยืนยันคำตอบของคำถาม 1) จุด F สอดคล้องกับบทนิยามที่ให้ไว้ จึงเป็นจุดบนพาราโบลาที่กำหนดโดย โฟกัส และไดเรกตริกซ์

คำถาม 4 เมื่อลากโฟกัสเข้าใกล้ไดเรกตริกซ์ พาราโบลาจะแคบลง และเมื่อลากโฟกัสห่างออกไปจากไดเรกตริกซ์ พาราโบลาจะกว้างขึ้น

คำถาม 5 จะได้พาราโบลาคว่ำ เมื่อลากโฟกัสต่ำกว่าไดเรกตริกซ์ และพาราโบลาอยู่ใต้ไดเรกตริกซ์

คำถาม 6 จะได้พาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดไปทางขวา

คำถาม 7 จะได้พาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดไปทางซ้าย

คำถาม 8 ไม่ปรากฏพาราโบลา เพราะไม่มีจุดที่อยู่ห่างจากโฟกัสและไดเร็กตริกซ์เป็นระยะทางเท่ากัน

คำถาม 9 จะปรากฏพาราโบลาบางส่วน เพราะจุดที่เคลื่อนที่ได้บนเส้นตรงถูกจำกัดให้เคลื่อนที่ได้บนส่วนของเส้นตรง (โดเมนถูกกำหนดโดยส่วนของเส้นตรง)

ไฮเพอร์โบลาตามบทนิยามเชิงเรขาคณิต

คำถาม 1

คำถาม 2 $m\overline{AC} = m\overline{F_1G} = m\overline{F_1H}$

$m\overline{BC} = m\overline{F_2G} = m\overline{F_2H}$

$\left|m\overline{AC} - m\overline{BC}\right| = \left|m\overline{F_1G} + m\overline{F_2G}\right| = \left|m\overline{F_1H} + m\overline{F_2H}\right|$

คำถาม 3 $m\overline{AC} = m\overline{F_1G} = m\overline{F_1H}$

$m\overline{BC} = m\overline{F_2G} = m\overline{F_2H}$

$\left|m\overline{AC} - m\overline{BC}\right| = \left|m\overline{F_1G} + m\overline{F_2G}\right| = \left|m\overline{F_1H} + m\overline{F_2H}\right|$

ให้ผลเหมือนกัน

คำถาม 4 ไฮเพอร์โบลาจะเป็นเส้นโค้งแคบลง

คำถาม 5 ไฮเพอร์โบลาจะเป็นเส้นโค้งกว้างขึ้น

คำถาม 6 ไม่ปรากฏ ไฮเพอร์โบลา แต่จะปรากฏเส้นตรง F_1F_2

คำถาม 7 จะปรากฏวงรี เพราะจุดตัดของวงกลมที่มี F_1 และ F_2 เป็นจุดศูนย์กลาง สอดคล้องกับบทนิยามของวงรี

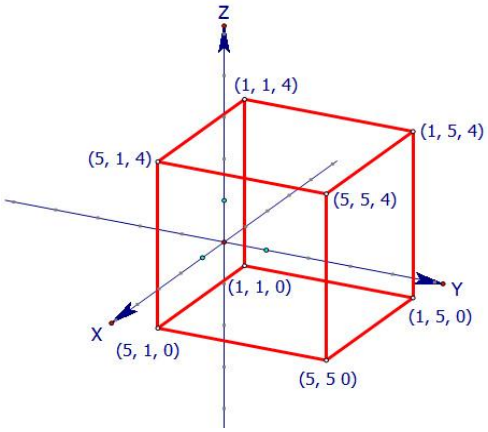
คำถาม 8 ตำแหน่งของจุด F_1 และจุด F_2 มีผลต่อความกว้างของโค้งของไฮเพอร์โบลา โดยโค้งของไฮเพอร์โบลาที่มีจุด F_1 และจุด F_2 อยู่ใกล้กัน จะแคบกว่า โค้งของไฮเพอร์โบลาที่มีจุด F_1 และจุด F_2 อยู่ห่างกัน

เฉลยใช้ ICT ในการสอนเรื่องเวกเตอร์

การลงจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ

คำถาม 1 ไม่เท่ากัน เพราะค่าที่ได้จากการวัดเป็นค่าที่วัดในระนาบสองมิติ

คำถาม 2



การบวกเวกเตอร์

คำถาม 1 ต่างกัน

การทำงานของ **A + B** : เลื่อนขนานเวกตอร์ B ไปหาเวกเตอร์ A โดยให้จุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ B ไปต่อที่จุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ A

การทำงานของ **B + A** : เลื่อนขนานเวกตอร์ A ไปหาเวกเตอร์ B โดยให้จุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ A ไปต่อที่จุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ B

คำถาม 2 เวกเตอร์ลัพธ์จากทั้งสองกรณีเหมือนกัน คือมีขนาดเท่ากัน และมีทิศทางเดียวกัน

คำถาม 3 ข้อคาดเดา : $\vec{a} + \vec{b}$ เท่ากับ $\vec{b} + \vec{a}$ จากการวัดขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์ทั้งสองปรากฏว่าเท่ากัน และมุมที่เวกเตอร์ลัพธ์ทั้งสองทำกับเวกเตอร์ a มีขนาดเท่ากัน

คำถาม 4 สอดคล้องกับข้อคาดเดาในคำถาม 3

การลบเวกเตอร์

คำถาม 1 ต่างกัน

การทำงานของ A - B : สร้างนิเสธของเวกเตอร์ B แล้วเลื่อนขนานนิเสธของเวกตอร์ B ไปหา เวกเตอร์ A โดยให้จุดเริ่มต้นของนิเสธของเวกเตอร์ B ไปต่อที่จุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ A การทำงานของ B - A : สร้างนิเสธของเวกเตอร์ A แล้วเลื่อนขนานนิเสธของเวกตอร์ A ไปหาเวกเตอร์ B โดยให้จุดเริ่มต้นของนิเสธของเวกเตอร์ A ไปต่อที่จุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ B

คำถาม 2 ต่างกัน คือมีทิศทางตรงข้ามกัน

คำถาม 3 ข้อคาดเดา : $\vec{a} + (-\vec{b})$ ไม่เท่ากับ $\vec{b} + (-\vec{a})$ จากการวัดมุมที่เวกเตอร์ลัพธ์ทั้งสองทำกับเวกเตอร์ a มีขนาดเท่ากันแต่ทิศทางตรงข้ามกัน ส่วนการวัดขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์ทั้งสองปรากฏว่าเท่ากัน

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

การบวกและการลบเวกเตอร์ในแกนสามมิติ

คำถาม 1

เวกเตอร์ A			เวกเตอร์ B			เวกเตอร์ A+B		
A_x	A_y	A_z	B_x	B_y	B_z	$(A+B)_x$	$(A+B)_y$	$(A+B)_z$
0	-2	3	3	4	-1	3	2	2
2	-3	-1	1	2	3	3	-1	2
4	2	2	-1	2	3	3	4	5
-3	1	-2	1	4	-2	-2	5	-4
-1	-3	2	3	5	1	1	2	4

คำถาม 2 ถ้าเวกเตอร์ A มีพิกัด $A_x = a$, $A_y = b$, $A_z = c$ และ

เวกเตอร์ B มีพิกัด $B_x = d$, $B_y = e$, $B_z = f$ แล้ว

$(A+B)_x = a + d$

$(A+B)_y = b + e$

$(A+B)_z = c + f$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์

คำถาม 1 ข้อคาดเดา : เวกเตอร์ A×B ตั้งฉากกับระนาบที่มีทั้งเวกเตอร์ A และ B

คำถาม 2 ได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ศูนย์

คำถาม 3 ได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ศูนย์

คำถาม 4 ได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ศูนย์

แบบบันทึกผลการประเมิน เรื่อง การใช้ ICT ในการสอน

เลขที่	ชื่อ-สกุล	การมีส่วนร่วมในกิจกรรม (5 คะแนน)	ชิ้นงาน (6 คะแนน)	รวม (11 คะแนน)
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				

ลงชื่อ.....วิทยากร

วัน/เดือน/ปี.....

แบบประเมินการมีส่วนร่วมในกิจกรรม

คำชี้แจง: ให้เขียนเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องตามความเห็นของท่านที่ตรงกับความเป็นจริงมากที่สุด

ที่	ชื่อ – สกุล	ความร่วมมือในกิจกรรม	ความรับผิดชอบ	การเสนอความคิดเห็น	ความริเริ่มสร้างสรรค์	การเป็นผู้นำหรือผู้ตามที่ดี	การตรงเวลา	รวม (5 คะแนน)
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								

ลงชื่อ.....วิทยากร

วันที่ประเมิน.....

รายชื่อคณะเรียบเรียงเนื้อหา

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

หน่วยการเรียนรู้ที่ 6 การออกแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ที่	ชื่อ – สกุล	โรงเรียน/ สังกัด
1	รศ.ดร.ปรีชา เนาว์เย็นผล	ข้าราชการบำนาญ
2	ดร.ไพโรจน์ น่วมนุ่ม	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
3	ดร.สุนีย์ เงินยวง	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
4	ดร.นัฐจิรา บุศย์ดี	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
5	ดร.รัชนิกร ชลไชยะ	มหาวิทยาลัยบูรพา
6	นางสาวจำเริญ เจียวหวาน	นักวิชาการอิสระ
7	นายสมนึก บุญพาไสว	นักวิชาการอิสระ
8	นางสาวยุดารัตน์ เพ็ชรรุ่ง	โรงเรียนปราจิณราษฎรอำรง
9	นางธัญสินี ฐานา	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาน้อมเกล้า
10	ดร.รชยา ศรีสุริฉัน	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
11	นางนวลจันทร์ ฤทธิ์ขำ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
12	นางสาวรัชนีกร กลิ่นหอมหวล	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
13	นางสาวกชพร วงศ์สว่างศิริ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะกรรมการโครงการ

โครงการพัฒนาชุดการอบรมครูผู้ช่วยหรือครูบรรจุใหม่ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี ระดับประถมศึกษาถึงระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่เน้นกระบวนการคิดวิเคราะห์แก้ปัญหา

1. ผู้อำนวยการ สสวท. (นางพรพรรณ ไวทยางกูร)	ที่ปรึกษา
2. ผู้อำนวยการ สคบศ. (นางสาวนฤมล ไทยวิรัช)	ที่ปรึกษา
3. นางดวงสมร คล่องสารา	ประธานกรรมการ
4. นางกัญณัฏฐ์ สวัสดิ์สว่าง	รองประธานกรรมการ
5. นายดุสิต สังข์ร่วมใจ	กรรมการ
6. นายประสงค์ เมธีพินิตกุล	กรรมการ
7. นางชมัยพร ตั้งตน	กรรมการ
8. นายราม ติวารี	กรรมการ
9. นางสาวสุพรรณี ชาญประเสริฐ	กรรมการ
10. นางสาววนิดา ธนประโยชน์ศักดิ์	กรรมการ
11. นายสุพจน์ วุฒิโสภณ	กรรมการ
12. นางเบ็ญจวรรณ ศรีเจริญ	กรรมการ
13. นางสาวกุศลิน มุสิกุล	กรรมการ
14. นายสมเกียรติ เพ็ญทอง	กรรมการ
15. นายวัฒน วัฒนากูล	กรรมการ
16. นายวิสูตร ปฐมโรจนฤทธิ์	กรรมการ
17. นางสาวสรัสวดี มุสิกบุตร	กรรมการ
18. นางจิรัฐ อนุเชิงชัย	กรรมการ
19. นางสาวสุนทรี ไกรกาบแก้ว	กรรมการ
20. นายโชคชัย อัศวินชัย	กรรมการ
21. นางสาวทิพย์วรรณ สุดปฐม	กรรมการ
22. นางสาวโศจิวัจน์ เสริฐศรี	กรรมการและเลขานุการ
23. นางสาวนิอร ภูรัตน์	กรรมการและผู้ช่วยเลขานุการ
24. นางสาวรัชนีกร กลิ่นหอมหวล	กรรมการและผู้ช่วยเลขานุการ
25. นางสาวกชพร วงศ์สว่างศิริ	กรรมการและผู้ช่วยเลขานุการ
26. นางสาวยุวรีย์ พันทวีศักดิ์	กรรมการและผู้ช่วยเลขานุการ